UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 02.07.2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale

$$\int\int\int_E \frac{z-3}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz$$

dove

$$E = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 3 - \sqrt{9-x^2-y^2}\}.$$

2. Stabilire se il campo vettoriale

$$\Omega(x,y,z) = (xy - \sin z, \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}, \frac{e^y}{z^2} - x\cos z)$$

é conservativo sul semispazio $z > 0$ ed in caso affermativo determinare i potenziali.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'' - 5y' + \frac{8}{x}y = x^2 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento

1. Usando le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \varrho \cos t \\ y = \varrho \sin t \\ z = z. \end{cases}$$

si ha che l'insieme E si trasforma nell'insieme E' definito da

$$1 \le \varrho \le 2, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad 0 \le z \le 3 - \sqrt{9 - \varrho^2}.$$

Allora otteniamo

$$\int\int\int_E \frac{z-3}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz = \int\int\int_{E'} \frac{z-3}{\varrho} \varrho d\varrho dt dz$$
$$= \int\int\int_{E'} (z-3) d\varrho dt dz = \int\int_{[1,2]\times[0,2\pi]} d\varrho dt \int_0^{3-\sqrt{9-\varrho^2}} (z-3)dz$$
$$= \frac{1}{2}\int\int_{[1,2]\times[0,2\pi]} d\varrho dt [(z-3)^2]_0^{3-\sqrt{9-\varrho^2}} = \frac{1}{2}\int\int_{[1,2]\times[0,2\pi]} (9-\varrho^2-9) d\varrho dt$$
$$= \frac{2\pi}{2}\int_1^2 (-\varrho^2) d\varrho = \pi[-\frac{\varrho^3}{3}]_1^2 = \frac{-7\pi}{3}.$$

2. Il campo vettoriale é ben definito nel semispazio $z > 0$ che risulta convesso. Controlliamo se la forma differenziale associata é chiusa, si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = x = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = -\cos z = \frac{\partial Z}{\partial x}$$
$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{e^y}{z^2} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

quindi la forma é chiusa perció é esatta perché definita sul semispazio. Calcoliamo ora una primitiva F. Deve risultare $\frac{\partial F}{\partial x} = xy - \sin z$ e quindi

$$F(x,y,z) = \int (xy - \sin z) dx = \frac{x^2}{2} y - x \sin z + C(y,z).$$

Derivando rispetto a y otteniamo
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}$$
da cui
$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{e^y}{z} \Leftrightarrow C(y,z) = -\frac{e^y}{z} + g(z)$$
e quindi
$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{2}y - x\sin z - \frac{e^y}{z} + g(z).$$
Infine, per determinare g,
$$\frac{\partial F}{\partial z} = -x\cos z + \frac{e^y}{z^2} + g'(z) = \frac{e^y}{z^2} - x\cos z$$
da cui
$$g'(z) = 0 \Leftrightarrow g(z) = c.$$
Quindi
$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{2}y - x\sin z - \frac{e^y}{z} + c.$$

3. Moltiplicando per x otteniamo
$$x^2y'' - 5xy' + 8y = x^3$$
che é un'equazione equidimensionale di Eulero. Ponendo $x = e^t$ si ha l'equazione
$$y'' - 6y' + 8y = e^{3t}.$$
Consideriamo l'equazione omogenea. L' integrale generale é
$$y = C_1e^{4t} + C_2e^{2t}.$$
Per la soluzione particolare, utilizzando i metodi standard con $\beta(t) = e^{3t}$, si ottiene l'integrale particolare $y = -e^{3t}$. Quindi l'interale generale dell'equazione assegnata risulta
$$C_1x^4 + C_2x^2 - x^3.$$
Dalle condizioni iniziali si ottiene infine
$$y = x^4 - x^3.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 17.07.2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma ye^x ds$$

dove γ é il segmento in $I\!R^3$ che unisce i punti $(1,1,1)$ e $(2,2,3)$.

Soluzione

L'equazione parametrica del segmento che unisce i punti dati risulta

$$\begin{cases} x(t) = (1-t) + 2t = 1 + t \\ y(t) = (1-t) + 2t = 1 + t \\ z(t) = (1-t) + 3t = 1 + 2t \end{cases}$$

per $t \in [0,1]$. Pertanto l'integrale diventa, considerando che $ds = \sqrt{6}dt$,

$$\int_\gamma ye^x ds = \sqrt{6}\int_0^1 (1+t)e^{1+t}dt = \sqrt{6}e\int_0^1 (1+t)e^t dt = \sqrt{6}e^2.$$

2. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\Omega(x,y) = (x^2 - y + x, -2xy)$$

uscente dalla frontiera dell'ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi 3 e 2.

Soluzione

Utilizzando il teorema della divergenza si ha che il flusso si calcola, indicando con D la parte interna dell'ellisse, con l'integrale

$$\int\int_D (div\Omega)dxdy = \int\int_D (\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y})dxdy = \int\int_D dxdy = 6\pi.$$

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' = 6y - 9x^4 e^{x^2} \sqrt[3]{y^2} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Soluzione

Assumendo $x > 0$ e dividendo per x otteniamo l'equazione di Bernoulli:

$$y' = \frac{6}{x} y - 9x^3 e^{x^2} \sqrt[3]{y^2}$$

con $s = \frac{2}{3}$. Ponendo allora $z = y^{1/3}$ otteniamo l'equazione lineare

$$z' = \frac{2}{x} z - 3x^3 e^{x^2}.$$

Per la soluzione si ha

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{2}{x} dx} \Big[\int -3x^3 e^{x^2} e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C \Big] = x^2 [\int -3x e^{x^2} dx + C] \\ &= -\frac{3}{2} x^2 e^{x^2} + Cx^2 \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$y(x) = \Big(-\frac{3}{2} x^2 e^{x^2} + Cx^2 \Big)^3.$$

Dal dato iniziale si ricava poi $C = 1 + \frac{3}{2} e$. La soluzione finale risulta quindi

$$y = \Big(-\frac{3}{2} x^2 e^{x^2} + (1 + \frac{3}{2} e) x^2 \Big)^3.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 17.07.2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma z e^y ds$$

dove γ é il segmento in $\mathbb{R}^3$ che unisce i punti $(0,1,0)$ e $(2,3,4)$.

Soluzione

L'equazione parametrica del segmento che unisce i punti dati risulta

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)0 + 2t = 2t \\ y(t) = (1-t) + 3t = 1 + 2t \\ z(t) = (1-t)0 + 4t = 4t \end{cases}$$

per $t \in [0,1]$. Pertanto l'integrale diventa, considerando che $ds = 2\sqrt{6}dt$,

$$\int_\gamma z e^y ds = 2\sqrt{6}\int_0^1 4te^{1+2t}dt = 8e\sqrt{6}\int_0^1 te^{2t}dt = 2e\sqrt{6}(e^2+1).$$

2. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\Omega(x,y) = (2x + xy, -\frac{1}{2}y^2)$$

uscente dalla frontiera del disco di centro $(1,1)$ e raggio 1.

Soluzione

Utilizzando il teorema della divergenza si ha che il flusso si calcola, indicando con D il disco, con l'integrale

$$\int\int_D (div\Omega)dxdy = \int\int_D (\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y})dxdy = \int\int_D 2dxdy = 2\pi.$$

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' = 9y - 12x^6 e^{x^3} \sqrt[3]{y^2} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Soluzione

Assumendo $x > 0$ e dividendo per x, otteniamo l'equazione di Bernoulli

$$y' = \frac{9}{x} y - 12x^5 e^{x^3} y^{2/3}$$

con $s = \frac{2}{3}$. Ponendo allora $z = y^{1/3}$ otteniamo l'equazione lineare

$$z' = \frac{3}{x} z - 4x^5 e^{x^3}.$$

Per la soluzione si ha

$$z = e^{\int \frac{3}{x} dx} \left[\int -4x^5 e^{x^3} e^{-\int \frac{3}{x} dx} dx + C \right] = x^3 [\int -4x^2 e^{x^3} dx + C]$$

$$= \quad -\frac{4}{3} x^3 e^{x^3} + Cx^3$$

da cui si ottiene

$$y(x) = \left(-\frac{4}{3} x^3 e^{x^3} + Cx^3 \right)^3.$$

Dal dato iniziale si ricava poi $C = 1 + \frac{4}{3} e$. La soluzione finale risulta quindi

$$y = \left(-\frac{4}{3} x^3 e^{x^3} + (1 + \frac{4}{3} e) x^3 \right)^3.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 29.09.2008

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \frac{y+x}{x^2+y^2}dx + \frac{y-x}{x^2+y^2}dy$$

nel suo dominio di definizione. Calcolare poi l'integrale curvilineo sulla frontiera del quadrato di vertici $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$, $(1,1)$.

2. Calcolare

$$\int\int_T \frac{x+3y}{2(x^2+y^2)}dxdy$$

dove T é la regione del semipiano $y \geq 0$ compresa tra le circonferenze centrate nell'origine e di raggi $\sqrt{2}$ e 2.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2x(1+x^2)y' - 4y + x(1+x^2)y^2 = 0 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento

1. La forma differenziale lineare é ben definita nell'insieme $I\!R^2\backslash\{(0,0)\}$. Controlliamo se la forma differenziale é chiusa. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{x^2+y^2-2y(y+x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

e quindi la forma é chiusa. Per controllare l'esattezza calcoliamo l'integrale della forma differenziale lineare su una curva chiusa che circonda l'origine ad esempio $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)\quad t\in[0,2\pi]$

$$\int_\gamma \frac{y+x}{x^2+y^2}dx+\frac{y-x}{x^2+y^2}dy=\int_0^{2\pi}(\sin t+\cos t)(-\sin t)+(\sin t-\cos t)\cos t dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t-\sin t\cos t+\sin t\cos t-\cos^2 t)dt=-\int_0^{2\pi}dt=-2\pi.$$

La forma differenziale lineare quindi non é esatta. Considerando poi il semipiano $y>0,$ l'integrale curvilineo viene zero, essendo qui ω esatta perché chiusa in un insieme convesso.

2. Usando le coordinate polari il dominio T diventa

$$T'=\{\sqrt{2}\le\varrho\le 2,\quad 0\le t\le\pi\}.$$

Allora

$$\frac{1}{2}\int\int_T\frac{x+3y}{x^2+y^2}dxdy=\frac{1}{2}\int\int_{T'}\frac{\varrho\cos t+3\varrho\sin t}{\varrho^2}\varrho d\varrho dt$$
$$=\frac{1}{2}\int\int_{T'}(\cos t+3\sin t)d\varrho dt=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^2 d\varrho\int_0^\pi(\cos t+3\sin t)dt$$
$$=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})[\sin t-3\cos t]_0^\pi=6-3\sqrt{2}.$$

3. Dividendo per y^2 otteniamo

$$y^{-2}y'-\frac{2y^{-1}}{x(1+x^2)}+\frac{1}{2}=0.$$

Ponendo $y^{-1}=z$ si ha $-y^{-2}y'=z'$ e quindi otteniamo

$$-y^{-2}y'+\frac{2y^{-1}}{x(1+x^2)}-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow z'+\frac{2z}{x(1+x^2)}-\frac{1}{2}=0$$

che é un'equazione lineare. Dalla formula risolutiva si ha

$$z = e^{-\int \frac{2}{x(1+x^2)}dx}[\int \frac{1}{2} e^{\int \frac{2}{x(1+x^2)}dx} dx + C].$$

Calcoliamo ora l'integrale considerando $x > 1$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx = \int (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2})dx = \log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Allora

$$\begin{aligned} z &= e^{-2(\log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2))}[\int \frac{1}{2} e^{2(\log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2))} dx + C] \\ &= e^{\log \frac{1+x^2}{x^2}}[\int \frac{1}{2} e^{\log \frac{x^2}{1+x^2}} dx + C] = \frac{1+x^2}{x^2}[\int \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x^2}dx + C] \\ &= \frac{1+x^2}{x^2}[\frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx + C] = \frac{1+x^2}{x^2}[\frac{1}{2}(x - \arctan x) + C] \\ &= \frac{1+x^2}{2x^2}[x - \arctan x + 2C] \end{aligned}$$

da cui

$$y = \frac{2x^2}{1+x^2}\frac{1}{x - \arctan x + 2C}.$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo

$$y(1) = 1 = \frac{1}{1 - \frac{\pi}{4} + 2C} \Leftrightarrow 1 = 1 - \frac{\pi}{4} + 2C$$

da cui

$$C = \frac{\pi}{8}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 21.01.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare, al variare delle costanti A e B, la chiusura e l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \frac{2(x+y)}{2x^2+y^2}dx + \frac{Ax+By}{2x^2+y^2}dy$$

nel suo dominio di definizione.

2. Calcolare

$$\int\int_T x\sqrt{y^2-x^2}dxdy$$

dove T é il triangolo di vertici $(0,0),\ (0,1),(1,1)$.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{e^{-x}+1}y = x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento

1. La forma differenziale lineare é ben definita nell'insieme $I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$. Controlliamo se la forma differenziale é chiusa. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{4x^2 - 2y^2 - 4xy}{(2x^2+y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{-2Ax^2 + Ay^2 - 4Bxy}{(2x^2+y^2)^2}$$

e quindi la forma é chiusa se $A=-2,\ B=1$. Per controllare l'esattezza calcoliamo l'integrale della forma differenziale lineare su una curva chiusa che circonda l'origine ad esempio $\gamma(t) = ((1/\sqrt{2})\cos t, \sin t)\ \ t \in [0, 2\pi]$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} (\frac{\sqrt{2}\cos t + 2\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t) + \frac{-\sqrt{2}\cos t + \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\cos t)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} -\sqrt{2}dt = -2\sqrt{2}\pi.$$

La forma differenziale lineare quindi non é esatta.

2. E' conveniente vedere l'insieme come dominio normale rispetto all'asse y e quindi

$$T = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le y\}.$$

Allora si ha

$$\int\int_T x\sqrt{y^2-x^2}dxdy = \int_0^1 dy \int_0^y x\sqrt{y^2-x^2}dx$$
$$= \int_0^1 dy \left(-\frac{1}{2}\int_0^y -2x\sqrt{y^2-x^2}dx\right) = -\frac{1}{2}\int_0^1 dy \left[\frac{2}{3}(y^2-x^2)^{3/2}\right]_0^y$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{2}{3}\int_0^1 -(y^2)^{3/2}dy = \frac{1}{3}\int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{12}.$$

3. Si tratta di un'equazione lineare. Dalla formula risolutiva si ha

$$y = e^{-\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx}\left[\int x e^{\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx}dx + C\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\log(1+e^x)}\left[\int x e^{\log(1+e^x)}dx + C\right]\\
&= \frac{1}{1+e^x}\left[\int x(1+e^x)dx + C\right] = \frac{1}{1+e^x}\left[\int (xe^x + x)dx + C\right]\\
&= \frac{1}{1+e^x}\left[\frac{x^2}{2} + xe^x - \int e^x dx + C\right] = \frac{1}{1+e^x}\left[\frac{x^2}{2} + xe^x - e^x + C\right].
\end{aligned}
$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo

$$
y(0) = 1 = \frac{1}{2}(-1+C) \Leftrightarrow 1 = -\frac{1}{2} + \frac{C}{2}
$$

da cui

$$
C = 3.
$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 18.02.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare l'integrale curvilineo rispetto al differenziale della coordinata y della funzione

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x(x + y)}$$

sull'arco di circonferenza del primo quadrante di centro l'origine e raggio 1 e compreso tra le rette $y = 0$ e $y = x$.

2. Data la funzione

$$f(x, y) = x^5 + x^4 y + x^4 - xy^4 - y^5 - y^4 + 1$$

stabilire se l'origine é un punto critico e, in caso affermativo, determinare se é punto di massimo o di minimo.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{3}{x - 2} y = \dfrac{1}{x^2 - 4} \sqrt[3]{y^2} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento

1. Le equazioni parametriche dell'arco di circonferenza γ, sono date da:

$$\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi/4].$$

Risulta quindi:

$$\int_\gamma \frac{x-y}{x(x+y)} dy = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t - \sin t}{\cos t(\cos t + \sin t)} \cos t dt$$
$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} dt = [\log(\cos t + \sin t)]_0^{\pi/4} = \log\sqrt{2}.$$

2. Risulta:

$$\nabla f(x,y) = (5x^4 + 4x^3 y + 4x^3 - y^4,\ x^4 - 4xy^3 - 5y^4 - 4y^3),$$

pertanto il punto $(0,0)$ é un punto critico di f. E' inoltre immediato osservare che l'Hessiano $H(0,0)$ é nullo, pertanto non possiamo dedurre nulla sulla natura del punto critico. Tuttavia, si ha $f(0,0) = 1$, mentre se restringiamo la funzione f alla semiretta positiva dell'asse delle x, si ha $f(x,0) = x^5 + x^4 + 1 > 1$ e se restringiamo f alla semiretta positiva dell'asse y si ha $f(0,y) = -y^5 - y^4 + 1 < 1$. Siccome in ogni intorno dell'origine cadono punti del tipo $(x,0), (0,y)$ con $x > 0$ e $y > 0$ rispettivamente, si vede subito che l'origine é un punto di sella.

3. Si tratta di un'equazione di Bernoulli. Ponendo $z = y^{1/3}$ si ottiene l'equazione differenziale

$$z' + \frac{1}{x-2} z = \frac{1}{3(x^2-4)}.$$

Dalla formula risolutiva delle equazioni lineari del primo ordine si ha, considerando $0 < x < 2$

$$z = e^{-\int \frac{1}{x-2}dx} \left[\int \frac{1}{3(x^2-4)} e^{\int \frac{1}{x-2}dx} dx + C \right]$$
$$= \frac{1}{|x-2|} \left[\int \frac{1}{3(x^2-4)} |x-2| dx + C \right] = \frac{1}{2-x} \left[-\int \frac{1}{3(x+2)} dx + C \right]$$
$$= \frac{1}{2-x} \left[-\frac{1}{3} \log(x+2) + C \right] = \frac{1}{3(x-2)} \log(x+2) + \frac{C}{2-x}.$$

Risolvendo rispetto ad y otteniamo

$$y(x) = \left(\frac{1}{3(x-2)} \log(x+2) + \frac{C}{2-x} \right)^3 .$$

Imponendo la condizione iniziale si ha

$$y(1) = 1 = (\frac{-1}{3} \log 3 + C)^3 \Leftrightarrow 1 + \frac{\log 3}{3} = C.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente-Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 16.06.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva definito da $y = x^{2/3}$ con $x \in [1, 8]$.

2. Calcolare il volume del solido che giace sotto il paraboloide $z = x^2 + y^2$ e sopra la regione del piano xy limitato dalla retta $y = 2x$ e dalla parabola $y = x^2$.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{x+3}y - \frac{x}{x^2-9} = 0 \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento

1. Una parametrizzazione della curva é data da $\gamma(t) = (t, t^{2/3})$ con $t \in [1,8]$, da cui otteniamo $\gamma'(t) = (1, \frac{2}{3}t^{-1/3})$.
Si ha, con la sostituzione $u = 9t^{2/3} + 4 \Leftrightarrow dt = \frac{1}{18}\sqrt{u-4}$

$$\int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^{-2/3}}dt = \int_1^8 \frac{\sqrt{9t^{2/3}+4}}{3t^{1/3}}dt = \int_{13}^{40} \frac{1}{18}\sqrt{u}du$$
$$= \frac{1}{18}\frac{2}{3}\Big[u^{3/2}\Big]_{13}^{40} = \frac{1}{27}(40\sqrt{40} - 13\sqrt{13}).$$

2. L'insieme su cui si deve integrare é dato da

$$T = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x\}.$$

Si ha

$$\int\int_T (x^2+y^2)dxdy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)dy$$
$$= \int_0^2 \Big[x^2y + \frac{y^3}{3}\Big]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 2x^3 + \frac{8}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3}dx$$
$$= \Big[\frac{2}{4}x^4 + \frac{8}{12}x^4 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\Big]_0^2 = \frac{216}{35}.$$

3. Si ha
$$y' = -\frac{2}{x+3}y + \frac{x}{x^2-9}$$
che é un'equazione lineare del primo ordine e dalla formula risolutiva otteniamo
$$y = e^{-\int \frac{2}{x+3}dx}\Big[\int \frac{x}{x^2-9}e^{\int \frac{2}{x+3}dx}dx + C\Big].$$
Si ha
$$y = e^{-2\log|x+3|}\Big[\int \frac{x}{x^2-9}e^{2\log|x+3|}dx + C\Big]$$
$$= \frac{1}{(x+3)^2}\Big[\int \frac{x}{x^2-9}(x+3)^2dx + C\Big] = \frac{1}{(x+3)^2}\Big[\int \frac{x(x+3)}{x-3}dx + C\Big]$$
$$= \frac{1}{(x+3)^2}\Big[\int (x + 6 + \frac{18}{x-3})dx + C\Big] = \frac{1}{(x+3)^2}\Big[\frac{x^2}{2} + 6x + 18\log|x-3| + C\Big].$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo

$$y(2) = 1 = \frac{1}{25}(2 + 12 + C) \Leftrightarrow 25 = 14 + C$$

da cui

$$C = 11.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 02.07.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dato il campo vettoriale

$$\Omega(x,y) = \left(xy, \frac{e^y}{y^2} + \frac{x^2}{2}\right)$$

determinare il lavoro compiuto lungo l'arco di circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1 congiungente i punti $(-1,1)$ e $(1,1)$, contenuto nel semipiano $y > 0$ e percorso in senso orario.

2. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_T \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdy$$

dove T é la parte di corona circolare contenuta nel primo quadrante e delimitata dalle circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e 2.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{\cos^2 y'}{x^2} \\ y(1) = y'(1) = -\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

(Suggerimento: abbassare l'ordine dell'equazione)

Svolgimento

1. La forma differenziale associata risulta chiusa. Inoltre nel semipiano $y > 0$ risulta anche esatta essendo convesso. Pertanto l'integrale che definisce il lavoro puó essere calcolato facilmente lungo il segmento γ che unisce i punti $(-1, 1)$ e $(1, 1)$. Tale segmento ha equazioni parametriche

$$\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (t, 1), \quad t \in [-1, 1].$$

Risulta quindi:

$$\int_\gamma xydx + (\frac{e^y}{y^2} + \frac{x^2}{2})dy = \int_{-1}^{1} tdt = 0.$$

2. Passando in coordinate polari si ha che il nuovo insieme di integrazione risulta $T' = \{(\varrho, t) : \ 1 \leq \varrho \leq 2, \ 0 \leq t \leq \pi/2\}$. Pertanto otteniamo

$$\int\int_T \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy = \int\int_{T'} \arcsin\left(\frac{\varrho \sin t}{\varrho}\right)\varrho d\varrho dt$$

$$= \int_1^2 \varrho d\varrho \int_0^{\pi/2} tdt = \frac{3\pi^2}{16}.$$

3. Posto $y' = z$ l'equazione diventa $z' = \dfrac{\cos^2 y}{x^2}$ che risulta a variabili separabili. Integrando si ha

$$\tan z = -\frac{1}{x} + C \Leftrightarrow z = \arctan(-\frac{1}{x} + C).$$

Pertanto sostituendo il dato iniziale $y'(1) = z(1) = -\dfrac{\pi}{4}$, otteniamo $C = 0$. Quindi

$$y' = \arctan(-\frac{1}{x}) = -\arctan(\frac{1}{x})$$

e facilmente si ha

$$y = -\int \arctan(\frac{1}{x})dx = -x\arctan(\frac{1}{x}) - \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$= -x\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + K.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = -\frac{\pi}{4}$, otteniamo immediatamente

$$K = \frac{1}{2}\log 2.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente-Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 09.09.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare

$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

dove D é la regione del piano nel primo quadrante compresa fra le rette di equazione $x+y=1$ e $x+y=4$.

2. Determinare i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = (x^2-y)(y^2-1).$$

3. Trovare le soluzioni $y \in C^2$ dell'equazione differenziale

$$2y'' - 3y' + y = f(x)$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sin x & x \geq 0 \end{cases}$$

tali che

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0.$$

Svolgimento

1. Calcoliamo l'integrale doppio passando a coordinate polari. Si ha che l'insieme D si trasforma in $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ e $\frac{1}{\cos t + \sin t} \leq \varrho \leq \frac{4}{\cos t + \sin t}$ e quindi

$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_{\frac{1}{\cos t+\sin t}}^{\frac{4}{\cos t+\sin t}} d\varrho$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \Big[\frac{4}{\cos t + \sin t} - \frac{1}{\cos t + \sin t}\Big] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\cos t + \sin t} dt.$$

Utilizzando la sostituzione $\tan \frac{t}{2} = z$ si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\cos t + \sin t} dt = -6 \int_0^1 \frac{1}{z^2 - 2z - 1} dz = -6 \int_0^1 \frac{1}{(z-1)^2 - 2} dz.$$

Ponendo ora $v = z - 1$ si ha

$$-6 \int_0^1 \frac{1}{(z-1)^2 - 2} dz = -6 \int_{-1}^0 \frac{1}{v^2 - 2} dv.$$

Scomponendo l'integranda si ha

$$-6 \int_{-1}^0 \frac{1}{v^2-2} dv = -6 \int_{-1}^0 \Big(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{v - \sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{v + \sqrt{2}}\Big) dv$$

e quindi otteniamo

$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = -\frac{3}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

2. La funzione é di classe C^∞ definita su tutto il piano e quindi i punti di massimo e minimo si trovano tra quelli che annullano il gradiente. Si ha

$$f'_x = 2x(y^2 - 1), \quad f'_y = 2x^2 y - 3y^2 + 1$$

e la soluzione del sistema é data dai punti $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}), (\pm 1, 1)$. I punti $(\pm 1, 1)$ poiché $f(\pm 1, 1) = 0$ e analizzando il segno della funzione, risultano essere di sella. Analizziamo ora i punti $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$. Si ha

$$f''_{xx} = 2y^2 - 2, \; f''_{xy} = 4xy = f''_{yx}, \; f''_{yy} = 2x^2 - 6y$$

e considerando la matrice Hessiana si ottiene che

$$H(0, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{8}{\sqrt{3}},\ H(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Nel primo caso poiché $f''_{xx} < 0$ il punto é di massimo nel secondo é punto sella.

3. Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine. L'equazione caratteristica risulta essere

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

le cui radici sono $\lambda = 1, \frac{1}{2}$ Risolviamo separatamente per $x < 0$ e per $x \geq 0$. Per $x < 0$ l'equazione é omogenea e otteniamo che l'integrale generale é dato da

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{x}{2}}.$$

Per $x \geq 0$ poiché $\lambda = i$ non é una soluzione poniamo $y = A\cos x + B\sin x)$. Sostituendo nell'equazione si ottiene facilmente

$$A = \frac{3}{10},\ B = -\frac{1}{10}.$$

Pertanto per $x \geq 0$ l'integrale generale é dato da

$$y = C_3 e^x + C_4 e^{\frac{x}{2}} + \frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\sin x.$$

Poiché le soluzioni devono essere di classe C^2 occorrono condizioni di raccordo in $x = 0$. Si ha facilmente

$$C_2 = C_4 + \frac{4}{5},\ C_1 = C_3 - \frac{1}{2}.$$

Quindi l'integrale generale su $I\!R$ risulta

$$y = \begin{cases} (C_3 - \frac{1}{2})e^x + (C_4 + \frac{4}{5})e^{\frac{x}{2}} & x < 0 \\ C_3 e^x + C_4 e^{\frac{x}{2}} + \frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\sin x & x \geq 0. \end{cases}$$

Imponendo infine le condizioni si ha che la condizione $\lim_{x\to-\infty} y = 0$ é sempre soddisfatta mentre la condizione $\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = 0$ é soddisfatta per $C_3 = C_4 = 0$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 17.09.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma dx - dy + z\sqrt{1+x^2+y^2}dz$$

dove γ é la curva di equazioni parametriche

$$\varphi(t) = (t\cos t, t\sin t, t), \ t \in [0, 2\pi].$$

2. Determinare l'insieme D dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che verificano la relazione

$$|x| + |y| = x + y.$$

Determinare poi i massimi e minimi relativi in D della funzione

$$f(x, y) = xye^{-(x+y)}.$$

3. Trovare le soluzioni al variare di α dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 10y = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = \alpha \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di α esiste finito

$$\lim_{x\to+\infty} y.$$

Svolgimento

1. Dalla definizione di integrale curvilineo si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \int_\gamma dx - dy + z\sqrt{1+x^2+y^2}dz \\
= & \int_0^{2\pi} (\cos t - t\sin t - \sin t - t\cos t + t\sqrt{1+t^2})dt \\
= & -\int_0^{2\pi} (t\sin t + t\cos t)dt + \int_0^{2\pi} t\sqrt{1+t^2}dt \\
= & -2\pi + \frac{1}{3}((1+4\pi^2)^{3/2} - 1).
\end{aligned}$$

2. Cominciamo col determinare l'insieme dei punti D che soddisfano la relazione

$$|x| + |y| = x + y.$$

Si ha anzitutto $x + y \geq 0$ ed elevando al quadrato ambo i membri della precedente relazione si ha l'uguaglianza

$$|xy| = xy,$$

che é soddisfatta per x, y non negativi (non possono essere negativi altrimenti $x + y$ sarebbe negativo. L'insieme D é dunque il I quadrante chiuso. Qui la funzione f é non negativa e si annulla sui punti $(x, 0)$, $(0, y)$, con $x, y \geq 0$. Pertanto tali punti sono minimi assoluti in D per la funzione f.

Calcoliamo ora le derivate prime di f. Si ha:

$$f'_x(x,y) = y(1-x)e^{-(x+y)}, \qquad f'_y(x,y) = x(1-y)e^{-(x+y)},$$

che in D° si annullano soltanto nel punto $(1, 1)$. Non ci sono altri punti critici in D°. Per determinare la natura del punto critico, calcoliamo le derivate seconde. Risulta:

$$f''_{xx}(x,y) = -y(2-x)e^{-(x+y)}, \qquad f''_{yy}(x,y) = -x(2-y)e^{-(x+y)},$$

$$f''_{xy}(x,y) = (1-x)(1-y)e^{-(x+y)},$$

da cui segue subito che $H(1, 1) = e^{-4} > 0$ e $f''_{xx}(1, 1) = -e^{-2} < 0$. Il punto $(1, 1)$ é dunque un punto di massimo relativo.

3. Si tratta di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica risulta essere

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

le cui radici sono $\lambda = -2$ e $\lambda = 5$. L'integrale generale é quindi dato da:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{5x}.$$

Imponendo i dati iniziali, si ottiene $c_1 + c_2 = 1$ e $-2c_1 + 5c_2 = \alpha$, da cui si ricava:

$$c_1 = \frac{5-\alpha}{7}, \quad c_2 = \frac{2+\alpha}{7}.$$

Il limite richiesto sará finito solo per $\alpha = -2$ e la soluzione corrispondente é data quindi da

$$y(x) = e^{-2x}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 19.01.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$G(x,y) = (y(\log x + 1) + 2x, \log(ex^x))$$

lungo la curva $y = x$ congiungente i punti $(1,1)$ e $(2,2)$.

2. Sia γ l'arco di circonferenza unitaria contenuto in $y \geq 0$. Calcolare

$$\int_\gamma y^2 x ds.$$

3. Trovare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y' = -3xy + \cos 2x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

.

Svolgimento

1. La forma differenziale associata risulta esatta in $x > 0$ poiché é chiusa infatti

$$X'_y = \log x + 1 = Y'_x.$$

Calcoliamo allora un potenziale F per la forma differenziale. Si ha

$$F(x,y) = \int \log(ex^x)dy = y(\log(ex^x) + h(x).$$

Per determinare la funzione $h(x)$ calcoliamo

$$F'_x(x,y) = y(\log x + 1) + h'(x) = y(\log x + 1) + 2x$$

e quindi

$$h'(x) = 2x \Leftrightarrow h(x) = x^2 + C.$$

Quindi un potenziale é dato da

$$F(x,y) = y(\log(ex^x)) + x^2.$$

Per il calcolo dell'integrale si ha

$$F(2,2) - F(1,1) = 2\log(4e) + 2.$$

2. Una rappresentazione parametrica della curva é data da

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0,\pi].$$

Pertanto si ha

$$\int_\gamma y^2 x ds = \int_0^\pi \sin^2 t \cos t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^\pi \sin^2 t \cos t dt$$
$$= \left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^\pi = 0.$$

3. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine. Possiamo scrivere per $x > 0$

$$y' = -3\frac{y}{x} + \frac{\cos 2x}{x^2}$$

e applicando la formula risolutiva

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-3\log x}\Big(\int e^{3\log x}\frac{\cos 2x}{x^2}dx + C\Big) = \frac{1}{x^3}\Big(\int x^3\frac{\cos 2x}{x^2}dx + C\Big) \\
&= \frac{1}{x^3}\Big(\int x\cos 2x dx + C\Big).
\end{aligned}
$$

Integrando per parti si ha

$$
y = \frac{1}{2x^2}\sin 2x + \frac{1}{4x^3}\cos 2x + \frac{C}{x^3}.
$$

Imponendo il dato iniziale otteniamo $C = (\pi^3 - 1/4)$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 08.06.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$G(x,y) = \left(\frac{y}{xy+1}, \frac{x}{xy+1}\right)$$

lungo la curva $y = \sin x$ congiungente i punti $(0,0)$ e $(\pi/2, 1)$.

2. Calcolare il volume del solido contenuto nel primo ottante dentro il cilindro $x^2 + y^2 = 2$ e sotto il piano $z = y$.

3. Trovare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + 3xy' - 3y = x^2 \log x \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases}$$

.

Svolgimento

1. Il campo vettoriale risulta definito quando $xy + 1 \neq 0$. La curva data si trova nella regione del piano compresa tra i rami dell'iperbole $y = -1/x$ che risulta un insieme stellato rispetto all'origine. La forma differenziale associata risulta esatta in questo insieme poiché é chiusa infatti

$$X'_y = \frac{1}{(xy+1)^2} = Y'_x.$$

Calcoliamo allora un potenziale F per la forma differenziale. Si ha

$$F(x, y) = \int \frac{y}{xy+1} dx = \log|xy + 1| + h(y).$$

Per determinare la funzione $h(y)$ calcoliamo

$$F'_y(x, y) = \frac{x}{xy+1} + h'(y) = \frac{x}{xy+1}$$

e quindi

$$h'(y) = 0 \Leftrightarrow h(y) = K.$$

Quindi un potenziale é dato da

$$F(x, y) = \log|xy + 1| + K.$$

Per il calcolo dell'integrale si ha quindi

$$\int_\gamma G \cdot d\varphi = F(\pi/2, 1) - F(0, 0) = \log(\pi/2 + 1).$$

2. Il solido di cui si deve calcolare il volume si trova nel primo ottante ed ha per base il quarto di cerchio D di equazione $x^2 + y^2 = 2$ ed é delimitato dall'alto da $z = y$. Pertanto il volume é dato da, passando a coordinate polari,

$$V = \int\int_D y dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \varrho^2 \sin\theta d\varrho = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

3. Si tratta di una equazione di Eulero non omogenea che puó essere studiata per $x > 0$. Consideriamo anzitutto l'equazione omogenea associata. Con la sostituzione $x = e^t$ otteniamo l'equazione a coefficienti costanti

$$\eta'' + 2\eta' - 3\eta = 0,$$

che possiede le soluzioni indipendenti $\eta_1(t) = e^t,\ \eta_2(t) = e^{-3t}$. Da queste ricaviamo le soluzioni dell'equazione originale (omogenea) $u_1(x) = x,\ u_2(x) = x^{-3}$. L'integrale generale dell'equazione omogenea é allora

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^{-3}.$$

Per ottenere una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, utilizziamo il metodo della variazione delle costanti, non senza aver prima di tutto normalizzato l'equazione. In tal modo, il termine noto dell'equazione é la funzione $\log x$. Il determinante della matrice Wronskiana delle soluzioni u_1, u_2 é dato da:

$$det(W(x)) = -4/x^3.$$

Utilizzando pertanto le note formule per le funzioni v_1 e v_2 otteniamo

$$v_1(x) = \frac{1}{4} x \log x - \frac{1}{4} x, \quad v_2(x) = -\frac{1}{20}\left[x^5 \log x - \frac{1}{5} x^5\right].$$

La soluzione articolare é allora data da:

$$\overline{y}(x) = u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x) = \frac{1}{5} x^2 \log x - \frac{6}{25} x^2$$

e quindi l'integrale generale é allora dato da:

$$Y(x) = c_1 x + c_2 x^{-3} + \frac{1}{5} x^2 \log x - \frac{6}{25} x^2.$$

Imponendo le condizioni inizialisi ottiene. $c_1 = 5/4,\ c_2 = -1/100$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 11.02.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea___________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'area della parte di corona circolare di raggi $\sqrt{2}$ e π contenuta nel semipiano delle y positive e al di sopra della retta $y = -x$.

2. Determinare i massimi e minimi liberi della funzione

$$f(x, y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 + y^4).$$

3. Determinare, se esistono, le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y'' + 9y = 2\cos 3x$$

tali che

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x} = 1.$$

Svolgimento

1. Indicata con D la regione detta, si ha che

$$AreaD = \int\int_D dxdy = \int_0^{3\pi/4} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{\pi} \varrho d\varrho = \frac{3\pi}{8}(\pi^2 - 2)$$

2. La funzione é parzialmente derivabile in ogni punto di $I\!R^2$, pertanto eventuali punti di massimo o di minimo si trovano tra le soluzioni del sistema $\nabla f = 0$. Risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4y^3.$$

Si ottengono quindi 9 punti soluzione:

$$(0,0), \ (\pm 1, \pm 1), \ (0, \pm 1), \ (\pm 1, 0).$$

Determiniamo ora l'Hessiano. Essendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 - 12x^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 - 12y^2,$$

si ottiene immediatamente che il punto $(0,0)$ é un punto di minimo relativo; i punti $(\pm 1, \pm 1)$ sono massimi relativi mentre i punti $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ sono punti sella.

3. L'equazione omogenea é data da

$$y'' + 9y = 0$$

che ha come equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3i$$

Quindi l'equazione omogenea ha come soluzioni

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Consideriamo ora l'equazione completa. La soluzione particolare si trova considerando le funzioni del tipo

$$y = x(A \cos 3x + B \sin 3x)$$

poiché $3i$ é soluzione dell'equazione caratteristica. Sostituendo nell'equazione troviamo

$$A = 0, \; B = \frac{1}{3}.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione assegnata risulta

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{x}{3} \sin 3x.$$

Dalla condizione iniziale si ottiene infine

$$C_1 = 0, \; C_2 = \frac{1}{3}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 15.04.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea____________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare il baricentro dell'insieme D del primo quadrante, compreso tra le curve di equazioni $y = x,\ y = 1/(2x)$ e $1 \le x \le 2$.

2. Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega = (\log y + \cos x)dx + \frac{x}{y}dy,$$

nel suo insieme di definizione e calcolare l'integrale curvilineo sull'ellisse di centro $(0,3)$ e semiassi 1 e 2.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'x - 2xy = -\dfrac{xe^{2x}}{x^2-1} \\ \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento

1. Calcoliamo anzitutto l'area del dominio D. Si ha:

$$\text{Area}(D) = \iint_D dxdy = \int_1^2 dx \int_{1/2x}^x dy = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log 2.$$

Determiniamo ora le coordinate (x_0, y_0) del baricentro. Si ha:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{2}{3-\log 2}\iint_D xdxdy = \frac{2}{3-\log 2}\int_1^2 xdx\int_{1/2x}^x dy \\ &= \frac{2}{3-\log 2}\int_1^2 x(x-\frac{1}{2x})dx = \frac{2}{3-\log 2}(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{2}{3-\log 3}\iint_D ydxdy = \frac{2}{3-\log 3}\int_1^2 dx\int_{1/2x}^x ydy \\ &= \frac{2}{6-2\log 2}\int_1^2 (x^2-\frac{1}{4x^2})dx = \frac{2}{6-2\log 2}(\frac{7}{3}-\frac{1}{8}) \end{aligned}$$

2. Il dominio é dato dal semipiano $y > 0$ che é un insieme convesso. Inoltre si vede facilmente che la forma é chiusa. La forma é dunque esatta e pertanto, siccome l'ellisse data é tutta contenuta nel suddetto semipiano, l'integrale curvilineo sará nullo.

3. Siccome cerchiamo soluzioni locali in un intorno del punto $x = 2$, possiamo supporre $x > 0$. Dividendo allora per x, si ottiene:

$$y' = 2y - \frac{e^{2x}}{x^2-1}.$$

Questa é una equazione lineare del primo ordine, il cui integrale generale é dato da:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int 2dx}\Big[-\int e^{-\int 2dx}\frac{e^{2x}}{x^2-1}dx + C\Big] \\ &= -e^{2x}\int\frac{1}{x^2-1}dx + Ce^{2x}. \end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale $\int(x^2-1)^{-1}dx$. Si ha, decomponendo:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)},$$

e quindi

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right|.$$

L'integrale generale é allora dato da:

$$y(x) = -\frac{e^{2x}}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + Ce^{2x}.$$

imponendo ora la condizione iniziale, si trova $C = e^{-4}(1 - (e^4/2) \log 3)$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 24.06.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determinare il massimo e minimo assoluti (e i punti dove vengono assunti) della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

sulla curva $x^2 + 2y^2 = 4$.

2. Determinare il baricentro del solido D contenuto nel primo ottante e delimitato dal piano passante per i punti $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,7)$, assumendo la densitá del solido costante uguale ad 1.

3. Trovare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{2x\log x} = \dfrac{\log\sqrt{x}}{y} \\ y(e) = 1 \end{cases}$$

.

Svolgimento

1. Siccome la funzione f risulta continua e il vincolo compatto, la funzione ammette massimo e minimo assoluti in base al teorema di Weierstrass. La Lagrangiana risulta essere

$$H(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - 4).$$

Il sistema da risolvere risulta il seguente

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$(-2, 0),\ (2, 0),\ (0, -\sqrt{2}),\ (0, \sqrt{2}).$$

Calcolando i valori che la funzione assume in questi punti otteniamo che il massimo assoluto vale 4, assunto nei punti $(\pm 2, 0)$ mentre il minimo assoluto vale 2, assunto nei punti $(0, \pm\sqrt{2})$.

2. L'equazione del piano che passa per i punti dati é $z = -7x - (7/2)y + 7$. Calcoliamo anzitutto il volume (massa) del tetraedro. Ponendo D il triangolo del primo quadrante nel piano (x, y) delimitato dagli assi e dalla retta $y = 2 - 2x$, si ha:

$$m = \iint_D (-7x - \frac{7}{2}y + 7)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (-7x - \frac{7}{2}y + 7)dy = \frac{7}{3}.$$

Per quanto riguarda la coordinata x del baricentro si ha

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{3}{7} \int\int\int x dxdydz \\ &= \frac{3}{7} \int_0^1 x dx \int_0^{2(1-x)} dy \int_0^{7(1-x-y/2)} dz \\ &= \frac{3}{7} \int_0^1 x dx \int_0^{2(1-x)} 7(1 - x - y/2)dy = 1/4. \end{aligned}$$

Analogamente vengono le altre coordinate

$$y_0 = 1/2, z_0 = 7/4.$$

3. Possiamo supporre $x > 1$. L'equazione é del tipo Bernoulli con $s = -1$. Ponendo allora $z = y^2$ si ottiene l'equazione lineare:

$$z' = -\frac{1}{x \log x} z + \log x,$$

la cui soluzione generale é data da (tenendo conto che $x > 1$):

$$\begin{aligned} z &= \exp\left(\int -\frac{1}{xlogx}\right)\left[\int \log x \exp\left(\int \frac{1}{xlogx}\right) + c\right] \\ &= \frac{1}{\log x}\left[\int \log^2 x dx + c\right] = \frac{1}{\log x}\left[x \log^2 x - 2\int \log x dx + c\right] \\ &= \frac{1}{\log x}(x \log^2 x - 2x \log x + 2x + c). \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione originale é dato da:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{\log x}(x \log^2 x - 2x \log x + 2x + c)}.$$

Utilizzando il dato iniziale, che impone $y(e) = 1 > 0$, si deve scegliere necessariamente il segno $+$ nella radice e si ottiene $c = 1 - e$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 8.07.2010

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare il volume della regione di spazio delimitato dalla funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ che si proietta nel piano xy sul cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1.

2. Assegnata la forma differenziale lineare

$$\omega = xydx + (x^2+1)dy$$

determinare l'integrale curvilineo di ω lungo il segmento che unisce il punto $(1,1)$ al punto $(0,0)$ orientato da $(1,1)$ a $(0,0)$ e lungo il tratto di grafico della funzione $y = \sqrt{x}$ per $x \in [0,1]$.

3. Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$x^3y'' - xy' + y = 1$$

tale che $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.
(Suggerimento: determinare per tentativi una soluzione dell'equazione omogenea).

Svolgimento

1. Usando le coordinate polari con centro in $(0,0)$ si ottiene (scrivendo la circonferenza $(x-1)^2+y^2=1$ in coordinate polari) che il nuovo ominio D' é datoo da

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varrho \leq 2\cos t.$$

Pertanto

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy = \int\int_{D'} \varrho^2 d\varrho dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt \int_0^{2\cos t} \varrho^2 d\varrho$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3}\cos^3 t dt = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\cos t dt = \frac{32}{9}$$

2. La forma differenziale data non é esatta infatti

$$\frac{\partial X}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 2x.$$

La parametrizzazione del segmento γ orientato nel modo richiesto é data da

$$\varphi(t) = (1-t, 1-t), \quad t \in [0,1]$$

e quindi l'integrale curvilineo richesto é

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 [-(1-t)^2 - ((1-t)^2+1)]dt = -\frac{5}{3}.$$

Per quanto riguarda il secondo integrale curvilineo, una parametrizzazione regolare della curva τ é data da

$$\varphi(t) = (t^2, t), \quad t \in [0,1]$$

e quindi l'integrale curvilineo richesto é

$$\int_\tau \omega = \int_0^1 [t^3 2t + (t^4+1)] = \frac{8}{5}.$$

3. L'equazione normalizzata é data da

$$y'' - \frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x^3}y = \frac{1}{x^3}$$

e quindi l'equazione omogenea é data da

$$y'' - \frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x^3}y = 0.$$

E' facile verificare che la funzione $u_1(x) = x$ é soluzione dell'equazione omogenea. Un'altra soluzione linearmente indipendente é data da

$$u_2(x) = x\int \frac{e^{\int x^{-2}dx}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}dx = xe^{-1/x}.$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata é data da

$$y(x) = C_1x + C_2xe^{-1/x}.$$

Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Tenendo conto che $detW(x) = e^{-1/x}$ si ottiene

$$v_1(x) = -\int \frac{1}{x^3}xe^{-1/x}e^{1/x}dx = -\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x}$$

$$v_2(x) = \int \frac{1}{x^3}xe^{1/x}dx = \int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = -e^{1/x}.$$

Pertanto una soluzione particolare é data da

$$\overline{y}(x) = u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x) = 1 - x.$$

L'integrale generale dell'equazione completa é data da

$$Y(x) = C_1x + C_2xe^{-1/x} + 1 - x.$$

Dalle condizioni iniziali si ottiene infine

$$C_1 = 1,\ C_2 = 0$$

cioé la soluzione é data dalla funzione costante $y(x) = 1$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 14.09.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea___________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare continuitá, derivabilitá parziale e differenziabilitá nel punto $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{5/3}y^{4/3}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinare infine la derivata direzionale nell'origine rispetto alla direzione $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

2. Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega = \log y \ \arctan x dx + \Big(\frac{x \arctan x - (1/2)\log(1+x^2)}{y} + 2y \Big) dy,$$

nel suo insieme di definizione e determinare la famiglia dei potenziali. Infine determinare il potenziale che si annulla nel punto $(1, e)$.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} + 2y^2 \log x \\ \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Svolgimento

1. Verifichiamo anzitutto la continuitá globale. Risulta, passando a coordinate polari,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\varrho\to 0} \varrho \cos^{5/3}\theta \sin^{4/3}\theta = 0$$

uniformemente rispetto a θ, essendo $|\varrho \cos^{5/3}\theta \sin^{4/3}\theta| \leq \varrho$. Pertanto la funzione é continua globalmente nell'origine. Passiamo ora alle derivate parziali nell' origine. Siccome é immediato verificare che i rapporti incrementali nell'origine della f sono identicamente nulli, si ha subito $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Per quanto riguarda la differenziabilitá, ricorrendo alla definizione, si deve verificare che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Tuttavia, passando a coordinate polari, si ha:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \cos^{5/3}\theta \sin^{4/3}\theta$$

che dipende dalla scelta di θ. Pertanto il limite non esiste e quindi la f non puó essere differenziabile nell'origine. Per quanto riguarda la derivata direzionale richiesta, dobbiamo necessariamente utilizzare la definizione. Il rapporto incrementale direzionale é dato da:

$$\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \frac{f(t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2})}{t} = \frac{1}{2^{3/2}},$$

e quindi segue $\partial f/\partial v(0,0) = 2^{-3/2}$.

2. Il dominio é dato dal semipiano $y > 0$ che é un insieme convesso. Inoltre si vede facilmente che la forma é chiusa. La forma é dunque esatta. Per calcolare la famiglia delle primitive, utilizziamo il metodo delle integrazioni parziali. Se F é un potenziale, deve risultare

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int X(x,y)dx + \varphi(y) = \int \log y \ \arctan x dx + \varphi(y) \\ &= \log y[x\arctan x - (1/2)\log(1+x^2)] + \varphi(y). \end{aligned}$$

Per determinare la funzione φ imponiamo la condizione $\partial F/\partial y = Y$, cioé:

$$\frac{x\arctan x - (1/2)\log(1+x^2)}{y} + \varphi'(y) = \frac{x\arctan x - (1/2)\log(1+x^2)}{y} + 2y,$$

da cui si ricava $\varphi'(y) = 2y$. Dunque si trova $\varphi(y) = y^2 + c$, con c costante arbitraria. La famiglia delle primitive é allora data dalla

$$F(x,y) = \log y[x\arctan x - (1/2)\log(1+x^2)] + y^2 + c.$$

Per determinare quel potenziale che si annulla nel punto $(1,e)$ é sufficiente sostituire i dati per ottenere

$$c = \frac{\log 2}{2} - e^2 - \frac{\pi}{4}.$$

3. Siccome cerchiamo soluzioni locali in un intorno del punto $x = 1$, possiamo supporre $x > 0$. Questa é una equazione di Bernoulli con $s = 2$, $\alpha(x) = 1/x$, $\beta(x) = 2\log x$. Ponendo allora $z = 1/y$, si ottiene l'equazione lineare in z

$$z' = \frac{z}{x} - 2\log x,$$

il cui integrale generale é dato da (per $x > 0$)

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{\int \frac{1}{x}dx}\Big[-\int 2\log x \; e^{-\int \frac{1}{x}}dx + C\Big] \\ &= x\Big[-\log^2 x + C\Big] \\ &= -x\log^2 x + Cx. \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale generale (per $x > 0$) é dato da:

$$y(x) = \frac{1}{-x\log^2 x + Cx}.$$

Determiniamo ora la soluzione particolare, sostituendo i dati iniziali. Risulta facilmente $C = 1/3$ e quindi la soluzione é data da:

$$y(x) = \frac{1}{-x\log^2 x + \frac{x}{3}}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 10.12.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea _______________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Motivare l'esattezza nel suo dominio della forma differenziale

$$\omega = (x + y^2)dx + (2xy + y^3)dy.$$

Successivamente determinare la primitiva che in $(0, 1)$ vale zero.

2. Determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y - 2.$$

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento

1. Posto $X(x,y) = x + y^2$, $Y(x,y) = 2xy + y^3$, si vede subito che $\partial X/\partial y = \partial Y/\partial x$ per ogni $(x,y) \in I\!R^2$. Essendo poi le funzioni X, Y definite su tutto il piano, che é un insieme convesso, si deduce subito che la forma é esatta. Per determinare la famiglia delle primitive, poniamo

$$F(x,y) = \int (x + y^3)dx = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + \varphi(y).$$

Allora $\partial F/\partial x = X$, e dovendo essere $\partial F/\partial y = Y$ possiamo ricavare la funzione φ dalla:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2xy + \varphi'(y) = 2xy + y^3,$$

da cui $\varphi(y) = y^4/4 + c$, con c costante arbitraria. La famiglia delle primitive é allora data da:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + \frac{1}{4}y^4 + c.$$

Per determinare la primitiva che assume il valore 0 nel punto $(0,1)$ é sufficiente sostituire per avere $c = -1/4$, cioé:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}.$$

2. Risulta:

$$\nabla f(x,y) = (2x - 6y + 3, 3y^2 - 6x + 6)$$

pertanto i punti critici si ottengono risolvendo il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Il sistema ha le soluzioni $P_1 = (3/2, 1)$ e $P_2 = (27/2, 5)$. Essendo $\partial^2/\partial x^2 = 2$, $\partial^2/\partial x\partial y = \partial^2/\partial y\partial x = -6$, $\partial^2/\partial y^2 = 6y$, si vede subito che P_1 é un punto di sella, mentre P_2 é un minimo relativo. Non ci sono quindi punti di massimo relativo.

3. Si tratta di un'equazione lineare non omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica é $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ che ha soluzioni $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata é pertanto determinato da:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in I\!R.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione non omogenea, siccome il secondo membro é della forma $A\cos x + B\sin x$ e i non é soluzione dell'equazione caratteristica, possiamo cercare soluzioni delle forma $\overline{y}(x) = a_1\cos x + a_2\sin x$. Sostituendo nell'equazione si ricavano facilmente i valori per a_1, a_2. Si trova: $a_1 = 3/10,\ a_2 = 1/10$. Quindi l'integrale generale dell'equazione completa é dato da:

$$\eta(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x.$$

Per trovare la soluzione del problema di Cauchy, basta sostituire i dati iniziali per ottenere $c_1 = -4/5,\ c_2 = 3/2$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 21.01.2011

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_R \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy,$$

dove R é la regione del piano contenuta nel primo quadrante, al di sotto della retta $y = x$ e racchiusa tra le circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e $\sqrt{2}$.

2. Determinare le coordinate del baricentro dell'arco di cicloide di equazioni parametriche $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$, con $0 \leq t \leq \pi$.

3. Trovare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = x + \arcsin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

.

Svolgimento

1. Passando in coordinate polari, si ha

$$\begin{aligned}
\iint_R \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) dxdy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} (1+\tan^2\theta)\rho d\rho \\
= \frac{1}{2}\left[\tan\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. Determiniamo anzitutto la lunghezza (massa) dell'arco di curva. Si ha

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos t}dt \\
&= 2\int_0^{\pi}\sin(t/2)dt = 4.
\end{aligned}$$

Pertanto, le coordinate del baricentro sono date da:

$$\overline{x} = \frac{1}{4}\int_C xds = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(t-\sin t)\sin(t/2)dt = \frac{8}{3},$$

e

$$\overline{y} = \frac{1}{4}\int_C yds = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos t)\sin(t/2)dt = \frac{4}{3}.$$

3. Possiamo supporre $-1 < x < 1$. L'equazione é lineare del primo ordine. Utilizziamo allora la formula risolutiva. Si ha:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \exp\Big(\int -\frac{x}{1-x^2}dx\Big)\Big[\int (x+\arcsin x)\exp\Big(\int \frac{x}{1-x^2}dx\Big)dx + c\Big] \\
&= \sqrt{1-x^2}\Big[\int \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx + c\Big] \\
&= \sqrt{1-x^2}\Big[-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin^2 x + c\Big] \\
&= x^2-1+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x + c\sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}$$

Sostituendo il dato iniziale, si trova $c = 1$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 11.02.2011

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^8}{4} + y^8 - 3x^4y^4$$

studiandone la natura.

2. Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \left[y\log\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right]dx + \left[x\log\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^3}{x^2+y^2}\right]dy$$

nel primo quadrante aperto. Determinarne poi, se esistono, i potenziali.

3. Trovare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = \cosh 2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

.

Svolgimento

1. La funzione é di classe C^2. Il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$, é dato da:

$$\begin{cases} 2x^7 - 12x^3y^4 = 0 \\ 8y^7 - 12x^4y^3 = 0 \end{cases}$$

e ha come unica soluzione il punto origine $(0,0)$. Per studiarne la natura, calcoliamo intanto le derivate seconde. Si ha:

$$f''_{xx}(x,y) = 14x^6 - 36x^2y^4, \quad f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -48x^3y^3,$$

$$f''_{yy}(x,y) = 56y^6 - 36x^4y^2.$$

Quindi il determinante della matrice Hessiana calcolato nell'origine é nullo. Dunque, per determinare la natura del punto critico occorre procedere con un diverso approccio. Intanto $f(0,0) = 0$. Inoltre, se consideriamo la restrizione alla retta $y = x$ otteniamo: $f(x,x) = -(7/4)x^8$ che é strettamente negativo per $x \neq 0$, mentre ad esempio la restrizione all'asse y é $f(0,y) = y^8$ che é strettamente positivo se $y \neq 0$. Pertanto in ogni intorno dell'origine troviamo punti nei quali la f assume valori sia maggiori che minori di 0. Il punto $(0,0)$ é allora un punto di sella. La funzione non ammette quindi punti di massimo o minimo relativo.

2. Nel primo quadrante aperto la forma differenziale lineare é ben definita e di classe C^1. Studiamo anzitutto la chiusura. Indicate con X, Y le funzioni componenti del campo vettoriale, si ha facilmente:

$$\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) = \log\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

La forma é pertanto chiusa e poiché il primo quadrante aperto é un convesso, la forma é esatta. Per determinare la famiglia dei potenziali, conviene osservare che le funzioni X, Y sono positivamente omogenee di grado 1 e quindi si ha:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(xX(x,y) + yY(x,y)) + c = xy\log\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) + c.$$

3. L'equazione omogenea associata ha come soluzioni indipendenti le funzioni $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = e^x$. Pertanto l'integrale generale dell'omogenea associata é dato da:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x.$$

Per ottenere l'integrale generale dell'equazione completa utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Cerchiamo quindi funzioni $v_1(x)$ e $v_2(x)$ tali che la funzione $\overline{y}(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x)$ sia una soluzione particolare dell'equazione. Dalle formule generali si ricava:

$$v_1(x) = -\int \cosh(2x)dx = -\frac{1}{2}\int (e^{2x} + e^{-2x})dx = -\frac{1}{2}\sinh(2x)$$

$$v_2(x) = \int \cosh(2x)e^{-x}dx = \frac{1}{2}\int (e^x + e^{-3x})dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{6}e^{-3x}.$$

Pertanto otteniamo

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{2}\sinh(2x) + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{-2x}.$$

L'integrale generale é allora:

$$Y(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{2}\sinh(2x) + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{-2x}.$$

Per selezionare la soluzione del problema di Cauchy, occorrerá imporre i dati iniziali per ricavare i valori delle costanti. risulta: $c_1 = 1/3$, e $c - 2 = -2/3$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 29.04.2011

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'area della regione del piano

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 : \; |y| \leq 1, \; |y| - 1 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}.$$

2. Verificare se la forma differenziale lineare

$$\omega = (2xyz+y^2z-y+2z)\, dx + (x^2z+2xyz-x-4)\, dy + (x^2y+xy^2+2x+1)\, dz$$

é esatta. In caso affermativo calcolare la famiglia delle primitive.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = e^{-3x} \log(1 + x^2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento

1. Da semplici calcoli si ha che l'area é data da $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\pi+2}{2}$. Ora, indicando con D_1 la parte di D nel semipiano $x < 0$ e con D_2 la parte di D nel semipiano $x > 0$, si ha

$$AreaD_1 = \int\int_{D_1} dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x-1}^{x+1} dy = \int_{-1}^{0} (x+1+x+1)dx = \int_{-1}^{0} (2x+2)dx = 1,$$

mentre

$$AreaD_2 = \int\int_{D_2} dxdy = \int_{0}^{1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varrho d\varrho d\theta = \pi \int_{0}^{1} \varrho d\varrho = \frac{\pi}{2}.$$

2. La forma differenziale ha come dominio tutto lo spazio $I\!R^3$. Vediamo se la forma differenziale é chiusa, si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 2xz + 2yz - 1 = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = 2xy + y^2 + 2 = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = x^2 + 2xy = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Essendo chiusa in tutto $I\!R^3$ la forma differenziale risulta esatta. Determiniamo le primitive. Si ha

$$F(x, y, z) = \int (2xyz+y^2z-y+2z)dx+h(y, z) = x^2yz+y^2xz-xy+2xz+h(y, z)$$

e quindi

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2z+2xyz-x+\frac{\partial h}{\partial y}(y, z) = Y = x^2z+2xyz-x-4 \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial y}(y, z) = -4.$$

Allora

$$h(y, z) = \int -4dy + g(z) = -4y + g(y)$$

e quindi

$$F(x, y, z) = x^2yz + y^2xz - xy + 2xz - 4y + g(z)$$

da cui

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = x^2y+y^2x+2x+g'(z) = Z = x^2y+xy^2+2x+1 \Leftrightarrow g'(z) = 1 \Leftrightarrow g(z) = z+K$$

e quindi infine

$$F(x,y,z) = x^2yz + y^2xz - xy + 2xz - 4y + z + K.$$

3. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Consideriamo l'equazione omogenea associata la cui equazione caratteristica risulta

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$$

e quindi l'integrale generale é dato da

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}.$$

Determiniamo un integrale particolare con il metodo della variazione delle costanti. Il determinante della matrice Wronskiana vale e^{-6x}. Si ha

$$\begin{aligned} v_1 = & \int (-xe^{3x}e^{-3x}\log(1+x^2)dx = \int (-\frac{x^2}{x})'\log(1+x^2)dx \\ = & -\frac{x^2}{2}\log(1+x^2) + \int \frac{x^3}{1+x^2}dx \\ = & -\frac{x^2}{2}\log(1+x^2) + \int (x - \frac{x}{1+x^2})dx \\ = & -\frac{x^2}{2}\log(1+x^2) + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+x^2). \end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned} v_2 = & \int (e^{3x}e^{-3x}\log(1+x^2)dx = \int (x)'\log(1+x^2)dx \\ = & x\log(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx \\ = & x\log(1+x^2) - 2\int (\frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2})dx \\ = & x\log(1+x^2) - 2x + 2\arctan x. \end{aligned}$$

Allora l'integrale particolare risulta

$$
\begin{aligned}
& y = v_1 y_1 + v_2 y_2 \\
= \quad & e^{-3x}\left(-\frac{x^2}{2}\log(1+x^2) + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right) \\
+ \quad & xe^{-3x}(x\log(1+x^2) - 2x + 2\arctan x) \\
= \quad & \frac{1}{2}(x^2-1)e^{-3x}\log(1+x^2) - \frac{3x^2}{2}e^{-3x} + 2xe^{-3x}\arctan x.
\end{aligned}
$$

La soluzione del problema di Cauchy si determina imponeno le condizioni iniziali per determinare le costanti C_1, C_2.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 24.06.2011

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea _______________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare il minimo ed il massimo assoluti della funzione
$$f(x,y) = xye^{\sin(\pi(x^2+y^2))}$$
sull'insieme
$$C = \{(x,y) \in I\!R^2 : x \geq 0, y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1/4\}.$$

2. Determinare il lavoro compiuto dal campo vettoriale
$$\Omega(x,y) = \Big(x(x^2+y^2)^{-2/3}, y(x^2+y^2)^{-2/3}\Big),$$
lungo la poligonale (aperta) di vertici $(1,-1), (2,0), (1,1)$, orientata in senso antiorario.

3. Determinare, al variare del parametro $a \in I\!R$, l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'' - 2ay' + 4y = e^{2x}.$$
Infine, ponendo nell'equazione $a = 0$, la soluzione del corrispondente problema di Cauchy
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Svolgimento

1. Essendo l'insieme C un compatto e la funzione f continua, per il Teorema di Weierstrass esistono il massimo ed il minimo assoluti.

Inoltre, siccome in C risulta ovviamente $f(x,y) \geq 0$, mentre $f(x,0) = f(0,y) = 0$, per ogni $x \in [0,1/2]$ e $y \in [0,1/2]$, il minimo assoluto di f é 0 ed é assunto sui punti indicati. Ora cerchiamo il massimo assoluto.

Esaminiamo intanto i punti interni a C. Per essi si ha $x > 0$ e $y > 0$. Calcoliamo il gradiente di f. Risulta:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{\sin(\pi(x^2+y^2))}[1 + 2\pi x^2 \cos(\pi(x^2+y^2))],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{\sin(\pi(x^2+y^2))}[1 + 2\pi y^2 \cos(\pi(x^2+y^2))],$$

e quindi tenendo conto che in C, i termini entro le parentesi quadre sono strettamente positivi, non esistono punti critici interni. Esaminiamo quindi il tratto di frontiera costituito dall'arco di circonferenza. La restrizione della funzione f é data da:

$$f(x,y) = g(t) = \frac{e^{\sqrt{2}/2}}{4} \cos t \sin t = \frac{e^{\sqrt{2}/2}}{8} \sin 2t,$$

per $t \in [0, \pi/2]$. Allora il massimo assoluto é assunto quando $t = \pi/4$ e vale $\frac{e^{\sqrt{2}/2}}{8}$ e il punto ove viene assunto é dato da $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4)$.

2. Possiamo supporre che Ω sia definito nel semipiano $x > 0$, perché la poligonale assegnata é qui contenuta. Inoltre indicate con X, Y le componenti del campo, si vede facilmente che:

$$\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) = -\frac{4xy}{3(x^2+y^2)^{5/3}}.$$

Pertanto essendo il semipiano un insieme convesso, il campo é conservativo. Per determinare quindi il lavoro é sufficiente calcolare un potenziale della forma differenziale ω associata. Se $F(x,y)$ é un potenziale, risulta:

$$F(x,y) = \int \frac{x}{(x^2+y^2)^{2/3}} dx = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/3} + \varphi(y),$$

ed imponendo

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Y(x,y),$$

si ricava facilmente che $\varphi'(y) = 0$, cioé $\varphi(y) = c$, con c costante arbitraria. Per ottenere allora il lavoro, indicata con γ la poligonale, si ha:

$$\int_\gamma \omega = F(1,1) - F(-1,1) = 0.$$

Si noti che il potenziale si poteva calcolare facilmente utilizzando il fatto che le funzioni X, Y sono positivamente omogenee di grado $-1/3$.

3. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata é data dalla:

$$\lambda^2 - 2a\lambda + 4 = 0$$

e possiede: due soluzioni reali e distinte date da $\alpha_1 = a - \sqrt{a^2-4}$ e $\alpha_2 = a + \sqrt{a^2-4}$, se $|a| > 2$; due radici reali coincidenti $\alpha_{1,2} = \pm 2$, se $a = \pm 2$ rispettivamente; ed infine radici complesse coniugate $\alpha_1 = a - i\sqrt{4-a^2}, \alpha_2 = a + i\sqrt{4-a^2}$, se $|a| < 2$. Esaminiamo quindi i tre casi separatamente.

(i) Sia $|a| > 2$. In tal caso otteniamo per l'omogenea l'integrale generale:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x},$$

mentre siccome 2 non é soluzione dell'equazione caratteristica, un integrale particolare é dato da

$$\overline{y}(x) = \frac{e^{2x}}{8-4a},$$

e quindi l'integrale generale dell'equazione completa é dato dalla

$$Y(x) = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \frac{e^{2x}}{8-4a}.$$

(ii) Se $a = 2$, allora l'equazione omogenea ha l'integrale generale:

$$c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x},$$

mentre siccome 2 é ora soluzione dell'equazione caratteristica un integrale particolare é dato da:

$$\overline{y}(x) = \frac{x^2 e^{2x}}{2},$$

e quindi l'integrale generale é dato da:

$$Y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{x^2 e^{2x}}{2}.$$

Se invece $a = -2$, allora poiché 2 non é soluzione dell'equazione caratteristica, si ottiene con le stesse considerazioni precedenti,

$$Y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{16}.$$

(iii) Se $|a| < 2$, l'integrale generale dell'equazione omogenea é dato da:

$$y(x) = c_1 e^{ax} \cos(\sqrt{4-a^2}x) + c_2 e^{ax} \sin(\sqrt{4-a^2}x),$$

mentre un integrale particolare é dato da:

$$\overline{y}(x) = \frac{e^{2x}}{8-4a},$$

e quindi l'integrale generale é:

$$Y(x) = c_1 e^{ax} \cos(\sqrt{4-a^2}x) + c_2 e^{ax} \sin(\sqrt{4-a^2}x) + \frac{e^{2x}}{8-4a}.$$

Resta da determinare la soluzione del problema di Cauchy assegnato. Per $a = 0$, l'integrale generale é dato da:

$$Y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{e^{2x}}{8}$$

ed imponendo le condizioni iniziali, si ha $c_1 = c_2 = -1/8$. Pertanto la soluzione del Problema di Cauchy é data da:

$$u(x) = \frac{1}{8}(e^{2x} - \cos 2x - \sin 2x).$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 08.07.2011

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea ______________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Assegnati i campi vettoriali in $I\!R^2$

$$\Omega_1(x,y) = (ax+1, by+1), \quad \Omega_2(x,y) = (ax+1, -by+1), \quad (x,y) \in I\!R^2,$$

determinare le costanti $a, b \in I\!R$, in modo che i flussi di Ω_1, Ω_2 attraverso la frontiera del dominio

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 : x > 0,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \le y \le \sqrt{3}\,x\}$$

valgano 0 e $\pi/8$ rispettivamente.

2. Si calcoli l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = x \log\left(\frac{y}{x}\right) dx + y \log\left(\frac{x}{y}\right) dy$$

lungo il tratto di curva $\varphi(t) = (e^{2t}, e^t)$, $\ t \in [0,1]$, orientato nel senso positivo (t crescenti).

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$xy'' + (x^2 - 1)y' = x^3, \quad y(\sqrt{2}) = 0,\ y'(\sqrt{2}) = 0.$$

Svolgimento

1. Applicando il teorema della divergenza, si ha subito:

$$\text{Flusso } \Omega_1 = \int\!\!\int_D (a+b)dxdy = (a+b)\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \varrho d\varrho = (a+b)\frac{\pi}{8},$$

$$\text{Flusso } \Omega_2 = \int\!\!\int_D (a-b)dxdy = (a-b)\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \varrho d\varrho = (a-b)\frac{\pi}{8}.$$

Pertanto le costanti a, b devono sofddisfare il sistema $a+b=0,\ \ a-b=1$. Si ricava $a = 1/2,\ b = -1/2$.

2. La forma differenziale ω non é chiusa come é facile verificare. Pertanto occorre determinare il valore dell'integrale direttamente con la definizione. Detta γ la curva assegnata, si ha, integrando per parti:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_0^1 [e^{2t}\log(e^{-t})2e^{2t} + e^t\log(e^t)e^t]dt \\ &= -2\int_0^1 te^{4t}dt + \int_0^1 te^{2t}dt = -\frac{3e^4}{8} + \frac{e^2}{4} + \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

3. L'equazione non é a coefficienti costanti e non é di Eulero. Essa puó essere risolta in modi diversi. Si puó abbassare l'ordine dell'equazione ponendo $z = y'$, oppure si osserva immediatamente che la funzione $y(x) = 1$ é soluzione dell'equazione omogenea associata. Seguendo questa strada, posto $u_1(x) = 1$, un'altra soluzione indipendente la si ottiene dalla formula:

$$u_2(x) = \int e^{-a(x)}dx,$$

dove $a(x)$ é il coefficiente del termine y' normalizzato. Si ha:

$$a(x) = \frac{x^2-1}{x},$$

e pertanto

$$u_2(x) = \int xe^{-x^2/2}dx = -e^{-x^2/2}.$$

Dunque un sistema fondamentale dell'equazione omogenea associata é dato da $\{1, -e^{-x^2/2}\}$. La matrice wronskiana corrispondente ha determinante

$$detW(x) = xe^{-x^2/2}.$$

Utilizzando allora il metodo della variazione delle costanti (normalizzando preventivamente l'equazione), si ottengono le funzioni:

$$v_1(x) = \int xdx = \frac{x^2}{2}, \quad v_2(x) = \int xe^{x^2/2}dx) = e^{x^2/2}.$$

Un integrale particolare dell'equaqzione completa é allora dato da:

$$\overline{y}(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) = \frac{x^2}{2} - 1.$$

L'integrale generale dell'equazione completa é allora data da

$$Y(x) = c_1 + c_2e^{-x^2/2} + \frac{x^2}{2} - 1 = c_1 + c_2e^{-x^2/2} + \frac{x^2}{2}.$$

Sostituendo ora i dati iniziali assegnati, si ottiene $c_1 = -2, \ c_2 = e$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 09.09.2011

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dopo averne dimostrato l'esistenza, determinare i massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = y^2(|x|+1)+2$$

nel triangolo contenuto nel semipiano $y \geq 0$ e delimitato dalle rette $x+y=1,\ y-x=1,\ y=0$.

2. Calcolare l'area della parte di piano D data da

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2,\ \ -1 \leq x \leq 1,\ |x|-1 \leq y \leq (1-x^{2/3})^{3/2}\}.$$

3. Trovare l'integrale generale per $x>0$, dell'equazione differenziale

$$x^2y'' + 3xy' - 3y = \log x$$

e successivamente determinare quelle soluzioni che divergono a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

Svolgimento

1. Poiché la funzione é continua in un insieme compatto, per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. La funzione risulta essere sempre positiva, anzi $f(x,y) \geq 2$ con $f(x,y) = 2 \Leftrightarrow y = 0$. Quindi i punti (x,y) tali che $y = 0$ sono punti di minimo assoluto. Inoltre

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2(x+1)+2, & x \geq 0 \\ y^2(1-x)+2, & x < 0 \end{cases}$$

e quindi

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} 2y(x+1), & x \geq 0 \\ 2y(1-x), & x < 0. \end{cases}$$

Poiché questa derivata parziale non si annulla nei punti interni al triangolo, valutiamo direttamente il comportamento sulla frontiera. Data la simmetria della funzione e del dominio, possiamo limitarci a considerare il caso $x \geq 0$. In tal modo consideriamo soltanto la restrizione alla retta $r : x + y = 1$, con $x \in [0,1]$. Si ha:

$$f_{|r}(x,y) \equiv g(x) = x^3 - x^2 - x + 3, \quad x \in [0,1].$$

Si vede subito che nell'intervallo $[0,1]$ si ha $g'(x) < 0$ e quindi il massimo assoluto é assunto per $x = 0$. Pertanto il punto di massimo assoluto della f é il vertice superiore del triangolo $(0,1)$.

2. Con calcoli elementari si ha che la parte dell'insieme D sotto l'asse x ha area pari a 1. La parte sopra l'asse x invece é simmetrica e possiamo calcolare solo l'area della parte nel primo quadrante, che indicheremo con A. Parametrizzando l'arco di curva compreso nel primo quadrante, si ha $\gamma_1(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t),\ t \in [0, \pi/2]$, mentre la parte restante della frontiera si compone dei due segmenti $\gamma_2(t) = (t,0),\ t \in [0,1]$, e $\gamma_3(t) = (0,t),\ t \in [0,1]$. Indicata con $\mathcal{C}$ la frontiera del dominio ed utilizzando le formule di Green risulta:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} xdy - ydx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_i} xdy - ydx.$$

Gli integrali sulle curve $\gamma_2,\ \gamma_3$ sono ovviamente nulli, mentre per l'integrale su γ_1 si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} xdy - ydx &= 3\int_0^{\pi/2}(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)dt = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2tdt \\ &= \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{3\pi}{16},\end{aligned}$$

pertanto si ha $A = \frac{3\pi}{32}$ e quindi $D = 1 + 2A = 1 + \frac{3\pi}{16}$.

3. Si tratta di una equazione di Eulero. Consideriamo l'equazione omogenea associata

$$x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$$

ed applichiamo la procedura usuale con la sostituzione $x = e^z$, con $z \in \mathbb{R}$. Si ottengono le soluzioni particolari $u_1(x) = x^{-3},\ \ u_2(x) = x$. L'integrale generale dell'equazione omogenea é allora dato da:

$$y(x) = c_1x^{-3} + c_2x.$$

Per determinare l'integrale particolare dell'equazione completa, utilizziamo il metodo della variazione delle costanti, avendo cura prima di normalizzare l'equazione. Anzitutto, il determinante della matrice wronskiana é dato da $4x^{-3}$. Inoltre, integrando per parti,

$$v_1(x) = -\frac{1}{4}\int x^2\log x dx = -\frac{x^3}{12}\log x + \frac{x^3}{36},$$

$$v_2(x) = \frac{1}{4}\int\frac{\log x}{x^2}dx = -\frac{\log x}{4x} - \frac{1}{4x}.$$

Una soluzione particolare é allora data dalla

$$\overline{y}(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) = -\frac{\log x}{3} - \frac{2}{9}$$

e quindi l'integrale generale dell'equazione é dato da:

$$Y(x) = c_1x^{-3} + c_2x - \frac{\log x}{3} - \frac{2}{9}.$$

Le soluzioni che divergono a $+\infty$ sono tutte quelle con $c_2 > 0$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 10.06.2011

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{2xy}{(1+y^2)^2} dxdy$$

dove l'insieme D é dato da

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 : \ x^2 + y^2 \leq 10, \ xy \geq 3\}.$$

2. Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva

$$\gamma(t) = (\sin t(1 + \cos t), \ 1 + \cos t)$$

con $t \in [0, 2\pi]$.

3. Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'' - y = (e^x + 1)^{-1} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento

1. I punti di intersezione delle due curve $x^2+y^2=10$ e $xy=3$ sono $(1,3)$ e $(3,1)$. Quindi l'insieme D si scrive

$$D=\{(x,y)\in I\!R,\ 1\le x\le 3,\ \frac{3}{x}\le y\le\sqrt{10-x^2}\}.$$

Allora dal teorema di riduzione si ha

$$\begin{aligned}
&\int\int_D \frac{2xy}{(1+y^2)^2}dxdy = \int_1^3 xdx\int_{3/x}^{\sqrt{10-x^2}}\frac{2y}{(1+y^2)^2}dy\\
= &\int_1^3 x[-(1+y^2)^{-1}]_{3/x}^{\sqrt{10-x^2}}dx = \int_1^3 x\Big(-\frac{1}{(1+10-x^2)}+\frac{1}{1+\frac{9}{x^2}}\Big)dx\\
= &\int_1^3\Big(-\frac{x}{11-x^2}+\frac{x^3}{x^2+9}\Big)dx = \frac{1}{2}[\log|11-x^2|]_1^3+\int_1^3(x-\frac{9x}{x^2+9})dx\\
= &\frac{1}{2}(\log 2-\log 10)+[\frac{x^2}{2}]_1^3-\frac{9}{2}[\log|x^2+9|]_1^3 = 4\log 5+4-9\log 3.
\end{aligned}$$

2. Utilizzando le formule di Green si ha

$$\begin{aligned}
Area = &\int_{\mathcal{C}} xdx = -\int_0^{2\pi}\sin t(1+\cos t)(-\sin t)dt\\
= &\int_0^{2\pi}\sin^2 tdt+\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos tdt\\
= &[\frac{-\sin t\cos t+t}{2}]_0^{2\pi}=\pi
\end{aligned}$$

3. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Consideriamo l'equazione omogenea associata la cui equazione caratteristica risulta

$$\lambda^2-1=0\Leftrightarrow\lambda=\pm 1$$

e quindi l'integrale generale dell'omogenea é dato da

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^x.$$

Determiniamo un integrale particolare con il metodo della variazione delle costanti. Il determinante della matrice Wronskiana vale 2. Si ha

$$v_1=\int(\frac{-e^x}{2}\frac{1}{e^x+1})dx=-\frac{1}{2}\log(1+e^x)$$

e anche, con la sostituzione $e^x = t$

$$\begin{aligned} v_2 &= \int \frac{e^{-x}}{2} \frac{1}{1+e^x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{e^x(e^x+1)} dx \\ = \quad & \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2(t+1)} dt = \frac{1}{2} \int (-\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t^2}) dt = \frac{1}{2} \log(\frac{t+1}{t}) - \frac{1}{2t}. \end{aligned}$$

Allora l'integrale particolare risulta

$$\begin{aligned} & y = v_1 y_1 + v_2 y_2 \\ = \quad & e^{-x}\Big(-\frac{1}{2} \log(1+e^x)\Big) + e^x \Big(\frac{1}{2} \log(\frac{e^x+1}{e^x}) - \frac{1}{2e^x}\Big). \end{aligned}$$

Imponendo le condizione iniziale otteniamo

$$y(0) = 0 = C_1 + C_2 - \frac{1}{2}$$

e

$$y'(0) = 0 = -C_1 + C_2 + \log 2 - \frac{1}{2}$$

da cui

$$C_2 = \frac{1 - \log 2}{2}, \ C_1 = \frac{\log 2}{2}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 12.01.2012

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Posto, per ogni $n \in I\!N$, $B_n = \{(x,y) \in I\!R^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\}$, calcolare al variare del parametro $\gamma > 0$, l'integrale doppio

$$I_n(\gamma) = \iint_{B_n} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\gamma} dxdy,$$

ed infine trovare i valori di γ per i quali esiste finito il limite

$$\lim_{n \to +\infty} I_n(\gamma).$$

2. Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\Omega(x,y,z) = (x^2 + z, -xy + y^2, zy), \quad (x,y,z) \in I\!R^3,$$

lungo il tratto di curva che unisce i punti $P_1 = (1,0,4\pi)$ e $P_2 = (-1,0,\pi)$, di equazioni parametriche

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [\pi, 4\pi],$$

orientato da P_1 a P_2.

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2x^2y'' - xy' - 2y = \sqrt{x^5} \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

1. Per il calcolo dell'integrale, utilizzando le coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned} I_n(\gamma) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n \frac{\rho}{(1+\rho^2)^\gamma} d\rho \\ &= \pi \int_0^n \frac{1}{(1+\rho^2)^\gamma} d(1+\rho^2). \end{aligned}$$

Pertanto, se $\gamma = 1$, si ha $I_n(1) = \pi \log(1+n^2)$, mentre per $\gamma \neq 1$ risulta

$$I_n(\gamma) = \frac{\pi}{1-\gamma}[(1+n^2)^{-\gamma+1} - 1],$$

e quindi se $0 < \gamma < 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty} I_n(\gamma) = +\infty$, mentre se $\gamma > 1$ si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(\gamma) = \frac{\pi}{\gamma - 1}.$$

Pertanto il limite é finito se $\gamma > 1$.

2. Applicando la deinizione di integrale curvilineo si ha che il lavoro L é dato da:

$$\begin{aligned} L &= -\int_\pi^{4\pi} [(\cos^2 t + t)(-\sin t) + (-\cos t \sin t + \sin^2 t)\cos t + t \sin t] dt \\ &= -\int_\pi^{4\pi} (2\cos^2 t \sin t + \cos t \sin^2 t) dt = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

3. L'equazione é del tipo di Eulero. Procediamo allora con la determinazione dell'integrale generale dell'omogena associata. Si ottiene facilmente (per esempio sostituendo la funzione x^m oppure applicando l'equazione a coefficienti costanti corrispondente) che una coppia di soluzioni indipendenti (per $x > 0$), é $u_1(x) = x^{-1/2}$, $u_2(x) = x^2$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea é dato da:

$$c_1 x^{-1/2} + c_2 x^2.$$

Troviamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa applicando il metodo della variazione delle costanti. Normalizzando, il termine noto é dato da $f(x) = \sqrt{x}/2$ e quindi utilizzando le formule per la determinazione delle costanti arbitrarie v_1, v_2 si ha:

$$v_1(x) = -\frac{1}{5}\int x^2 dx = -\frac{1}{15}x^3, \quad v_2(x) = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}\sqrt{x}.$$

Pertanto, una soluzione particolare é data da:

$$\overline{y}(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) = \frac{1}{3}x^{5/2}.$$

In conclusione l'integrale generale dell'equazione, per $x > 0$ é dato da:

$$y(x) = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^2 + \frac{1}{3}x^{5/2}.$$

Ora l'integrale particolare che soddisfa il Problema di Cauchy si trova imponendo le condizioni iniziali e si trovano le costanti: $c_1 = 1/15, \quad c_2 = -2/5$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 09.02.2012

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$$

dove D é la regione del primo quadrante compresa tra le curve $x^2+y^2=\pi^2/9$, $x^2+y^2=\pi^2$, l'asse delle x e la retta $y=x$.

2. Determinare il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\omega(x,y)=(y+\log(x+1))dx+(x+1-\arctan e^y)dy$$

lungo la semicirconferenza di centro $(1,0)$ e raggio 1, contenuta nel primo quadrante orientata positivamente.

3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2yy' = 1-y^2 \\ y(0)=1/2. \end{cases}$$

Svolgimento

1. Passando alle coordinate polari, il dominio si trasforma nell'insieme

$$T = \{(\theta, \rho) : 0 \leq \theta \leq \pi/4, \quad \pi/3 \leq \rho \leq \pi\}$$

e l'integrale diventa:

$$\int_0^{\pi/4} d\theta \int_{\pi/3}^{\pi} \sin \rho d\rho = \frac{\pi}{4} \left[-\cos \rho\right]_{\pi/3}^{\pi} = \frac{3}{8}\pi.$$

2. Il campo vettoriale é conservativo, poiché la forma differenziale associata ω é chiusa e la semicirconferenza é contenuta tutta nel semipiano $x > -1$ che é un insieme convesso. Pertanto il calcolo del lavoro puó essere effettuato lungo il segmento γ dato da $(x, 0)$, con $0 \leq x \leq 2$, e poi cambiare segno. Risulta facilmente

$$\int_\gamma \omega = \int_0^2 \log(x+1)dx = \left[(x+1)\log(x+1) - x\right]_0^2 = 3\log 3 - 2.$$

Il lavoro é quindi dato da $2 - 3\log 3$.

3. L'equazione differenziale é a variabili separabili. Inoltre tenuto conto del dato iniziale, possiamo supporre $0 < y < 1$. L'equazione puó allora essere scritta nella forma

$$\frac{2y}{1-y^2}dy = dx,$$

ed integrando, otteniamo

$$-\log(1-y^2) = x + c$$

da cui, ponendo $k = e^{-c}$, otteniamo

$$y = \sqrt{1 - ke^{-x}}.$$

Sostituendo il dato iniziale si ha subito $k = 3/4$ e pertanto l'unica soluzione del problema é data da:

$$y = \sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{-x}}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 07.06.2012

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Si consideri l'arco di curva γ di rappresentazione parametrica

$$\varphi(t) = (t + \cos^2 t, 1 + \sin^2 t), \quad t \in [0, \pi].$$

Si calcoli l'integrale curvilineo sulla curva γ della forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = \Big(\frac{1}{x} + y\Big)dx + \Big(\frac{1}{y} + x\Big)dy.$$

2. Determinare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{xy(x + y)}{(x^2 + y^2)^2} dxdy$$

dove D é la regione del primo quadrante compresa tra le rette di equazioni $x + y = 1$ e $x + y = 4$.

3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2y'' + 5xy' + 3y = x^3\sqrt{x} \\ y(1) = 1, \ y'(1) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento

1. La curva assegnata é tutta contenuta nel primo quadrante. La forma differenziale é chiusa, come é immediato verificare, e siccome il primo quadrante é un insieme convesso, é ivi anche esatta. Calcoliamo allora i potenziali sul primo quadrante. Si ha:

$$F(x,y) = \int \left(\frac{1}{x} + y\right)dx + \xi(y) = \log x + yx + \xi(y).$$

Inioltre dalla

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y} + x,$$

segue subito $\xi'(y) = 1/y$, da cui $\xi(y) = \log y + c$, con c costante arbitraria. La famiglia dei potenziali é allora data da:

$$F(x,y) = \log xy + xy + c.$$

Per calcolare l'integrale curvilineo é ora sufficiente applicare la formula

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0)) = F(\pi+1,1) - F(1,1) = \log(\pi+1) + \pi.$$

2. Passiamo in coordinate polari. Le rette $x+y=1, \quad x+y=4$ si scrivono rispettivamente $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=1$ e $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=4$ e quindi si ha:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{xy(x+y)}{(x^2+y^2)^2}dxdy &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{1/(\cos\theta+\sin\theta)}^{4/(\cos\theta+\sin\theta)} \cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)d\rho \\ &= 3\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta d\theta = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

3. Si tratta di una equazione di Eulero. Con la solita sostituzione $x = e^z$, l'equazione omogenea associata diventa a coefficienti costanti e le soluzioni corrispondenti sono date da $u_1(x) = x^{-3}, \quad u_2(x) = x^{-1}$. L'integrale generale dell'equazione omogenea é quindi dato da:

$$y(x) = \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa utilizzando il metodo della variazione delle costanti. Si ha intanto

$detW(x) = 2/x^5$, dove $W(x)$ é la matrice wronskiana delle u_1, u_2. Ora normalizzando l'equazione, calcoliamo le funzioni v_1, v_2, utilizzando le note formule. Si ha:

$$v_1(x) = -\int x\sqrt{x}\frac{x^5}{2}\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{2}\int x^{11/2}dx = -\frac{1}{13}x^{13/2}$$

$$v_2(x) = \int x\sqrt{x}\frac{x^5}{2}\frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2}\int x^{7/2}dx = \frac{1}{9}x^{9/2}.$$

Pertanto la soluzione perticolare é:

$$\overline{y}(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) = \frac{4}{117}x^{7/2}$$

e l'integrale generale dell'equazione completa é:

$$Y(x) = \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x} + \frac{4}{117}x^{7/2}.$$

Per trovare ora la soluzione del problema di Cauchy, imnponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{113}{117} \\ \\ 3c_1 + c_2 = \frac{14}{117} \end{cases}$$

Le soluzioni sono $c_1 = 11/26$, $c_2 = 127/234$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 21.06.2012

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione ____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Assegnata la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \arctan \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

(i) studiare continuitá, derivabilitá parziale e differenziabilitá in $(0,0)$

(ii) stabilire se in $(0,0)$ la funzione ammette un estremo relativo.

2. Determinare il flusso del campo vettoriale

$$\Omega(x,y) = (\sin^2 y + \frac{x^3}{3}, y^3 + \cos^2 x),$$

uscente dalla frontiera dell'insieme $D = \{(x,y) \in I\!R^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

3. Assegnata l'equazione differenziale:

$$y'' + \frac{y'}{x+2} - \frac{y}{x(x+2)} = 0, \quad x > 0,$$

dopo aver trovato una soluzione non banale u_1, determinarne l'integrale generale. Trovare infine le soluzioni $y(x)$ che hanno limite 1 per $x \to 0^+$.

Svolgimento

1. Per la continuitá globale nell'origine, basta osservare che

$$|f(x,y)| \leq \frac{\pi}{2}|xy|,$$

e siccome la funzione xy é ovviamente continua nell'origine, l'asserto segue dal teorema dei carabinieri. Inoltre i rapporti incrementali

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}, \qquad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}$$

sono ovviamente identicamente nulli e quindi $\nabla f(0,0) = \mathcal{O}$. Pertanto per verificare se la funzione f é differenziabile in $(0,0)$ utilizzando la definizione, si deve provare che

$$L = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Passando a coordinate polari, si ha:

$$L = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho} \arctan\frac{1}{\rho^2} = 0,$$

uniformemente rispetto a θ, essendo

$$\left|\frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho} \arctan\frac{1}{\rho^2}\right| \leq \frac{\pi\rho}{2}.$$

La f é pertanto differenziabile nell'origine. Quanto al secondo quesito, il punto $(0,0)$ é un punto critico di sella, poiché $f(0,0) = 0$, mentre $f(x,y) > 0$ nel primo e terzo quadrante e $f(x,y) < 0$ negli altri due quadranti.

2. Utilizziamo il teorema della divergenza. Si ha $\text{div}\Omega(x,y) = x^2 + 3y^2$ e quindi, sfruttando le simmetrie,

$$\text{Flusso}\Omega(x,y) = \iint_D (x^2+3y^2)dxdy = 4\iint_T (x^2+3y^2)dxdy,$$

dove $T = \{(x,y) \in I\!R^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x\}$. S ha pertanto

$$\begin{aligned}\text{Flusso}\Omega(x,y) &= 4\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2+3y^2)dy = 4\int_0^1 [x^2(1-x)+(1-x)^3]dx \\ &= 4\int_0^1 (4x^2-3x-2x^3+1)dx = 4/3.\end{aligned}$$

3. Per semplice sostituzione si vede che una soluzione dell'equazione é la funzione $u_1(x) = x$, che per $x > 0$ non si annulla. Pertanto una seconda soluzione linearmente indipendente é data dalla

$$u_2(x) = x \int \frac{R(x)}{x^2} dx, \qquad R(x) = \exp\Big(- \int (1/(x+2)) dx \Big) = \frac{1}{x+2}.$$

Si ha dunque, usando la formula di Hermite,

$$\begin{aligned} u_2(x) &= x \int \frac{1}{x^2(x+2)} dx = x \Big[-\frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2} dx \Big] \\ &= -\frac{x}{4} \log x + \frac{x}{4} \log(x+2) - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} \log \frac{x+2}{x} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale generale é dato da:

$$Y(x) = c_1 x + c_2 \Big(\frac{x}{4} \log \frac{x+2}{x} - \frac{1}{2} \Big).$$

Siccome ciascuna soluzione tende a $-c_2/2$ per $x \to 0^+$, per ottenere quella che tende ad 1 é sufficiente porre $c_2 = -2,\ c_1 \in \mathbb{R}$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 06.07.2012

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare il volume del solido del I ottante che é delimitato dal cilindro di equazione $x^2 + y^2 = a^2$ e sotto il piano di equazione $z = y$, dove a é una costante positiva.

2. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 - xy)dx + (xy - y^2)dy$$

dove $\mathcal{C}$ é la frontiera del triangolo T di vertici $(-1,0), (0,1), (1,0)$.

3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' = x^2 \log x \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

1. Il volume puó essere calcolato utilizzando un integrale doppio. Precisamente, possiamo calcolare il volume della regione di spazio delimitato dalla superficie piana $z = y$ che si proietta sul quarto D di disco del primo quadrante di centro $(0,0)$ e raggio a. Si ha:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D y dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \rho^2 \sin\theta d\rho \\ &= \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = \frac{a^3}{3}. \end{aligned}$$

2. Per calcolare l'integrale curvilineo I, conviene utilizzare il teorema di Green. Risulta facilmente

$$\begin{aligned} I &= \iint_T (x+y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} (x+y) dx \\ &= \int_0^1 (2y - 2y^2) dy = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. Si tratta di una equazione di Eulero. L'equazione omogenea associata ha soluzione generale (facendo il cambiamento di variabile $x = e^t$):

$$c_1 + c_2 \log x.$$

Per trovare ora una soluzione particolare dell'equazione completa, utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Essendo $detW(x) = 1/x$, risulta:

$$v_1(x) = -\int x \log^2 x dx, \qquad v_2(x) = \int x \log x dx.$$

Per il primo, integrando due volte per parti si ha:

$$v_1 = -\left[\frac{x^2}{2} \log^2 x - \int x \log x dx\right] = -\frac{x^2}{2} \log^2 x + \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4},$$

mentre per il secondo risulta

$$v_2(x) = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}.$$

Pertanto una soluzione particolare é data dalla funzione

$$\overline{y}(x) = \frac{x^2}{4}\log x - \frac{x^2}{4},$$

e quindi l'integrale generale é dato da:

$$Y(x) = c_1 + c_2 \log x + \frac{x^2}{4}\log x - \frac{x^2}{4}.$$

Per trovare ora l'integrale particolare, basta sostituire i dati iniziali per ottenere facilmente $c_1 = c_2 = 1/4$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 13.09.2011

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la differenziabilitá della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y^3)}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nel punto $(0,0)$.

2. Calcolare

$$\int\int_D (1+4(x^2+y^2))\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

dove D é la corona circolare di centro $(0,0)$ e raggi 1 e 2.

3. Risolvere l'equazione differenziale

$$y' + \frac{1}{x^2}y = e^{1/x}\arctan x$$

con la condizione $y(1) = 0$.

Svolgimento

1. Per quanto riguarda la continuitá si ha

$$\left|\frac{\sin(x^2y^3)}{x^2+y^4}\right| \le \left|\frac{x^2y^3}{x^2}\right| = |y^3|$$

e quindi la funzione f risulta continua in $(0,0)$. Poiché la funzione é nulla sugli assi si ha che le derivate parziali nell'origine sono nulle. Infine si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(h^2k^3)}{(h^2+k^4)\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

poiché

$$\left|\frac{\sin(h^2k^3)}{(h^2+k^4)\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le |\frac{h^2k^3}{h^2|k|}| \le k^2$$

e pertanto, utilizzando la definizione di differenziabilitá, la funzione é anche differenziabile nell'origine.

2. Utilizzando un cambiamento di coordinate polari l'insieme D si trasforma in

$$D' = \{(\varrho,\theta) : 1 \le \varrho \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Quindi si ha

$$\iint_D (1+4(x^2+y^2))\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \iint_D (1+4x^2+4y^2)^{3/2}dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 (1+4\varrho^2)^{3/2}\varrho d\varrho d\theta = 2\pi\int_1^2 \varrho(1+4\varrho^2)^{3/2}d\varrho$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^2 8\varrho(1+4\varrho^2)^{3/2}d\varrho = \frac{\pi}{4}\frac{2}{5}\Big[(1+4\varrho^2)^{5/2}\Big]_1^2 = \frac{\pi}{10}\Big[17^{5/2}-5^{5/2}\Big]$$

3. Si tratta di una equazione lineare del primo ordine. Si ha

$$y = e^{-\int\frac{1}{x^2}}\left[\int e^{\frac{1}{x}}\ \arctan x\ e^{\int\frac{1}{x^2}}dx + C\right] = e^{\frac{1}{x}}\left[\int \arctan x dx + C\right]$$

e integrando per parti si ha

$$y(x) = e^{\frac{1}{x}}\left[x\arctan x - \int\frac{x}{1+x^2}dx + C\right] = e^{\frac{1}{x}}x\arctan x - e^{\frac{1}{x}}\frac{\log(1+x^2)}{2} + Ce^{\frac{1}{x}}$$

Dalla condizione iniziale ricaviamo la costante C

$$y(1) = 0 = e\frac{\pi}{4} - \frac{e}{2}\log 2 + eC \leftrightarrow 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2} + C$$

e quindi la costante é data da $C = \dfrac{\log 2}{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 10.01.2013

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Assegnata la funzione

$$f(x, y) = (x + y)|x + y|$$

(i) studiare continuitá, derivabilitá parziale e differenziabilitá in ogni punto del tipo $(x_0, -x_0)$, $\quad x_0 \in I\!R$.

(ii) stabilire se in $(0, 0)$ la funzione ammette un estremo relativo.

2. Sia D l'insieme contenuto nel semipiano $y \geq 0$ e delimitato dal basso dal grafico della funzione $f(x) = |x|$ e dall'alto dal grafico della funzione $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Determinare la massa di D se la sua densitá é data dalla funzione $\delta(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $\quad (x, y) \in D$.

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' - \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = 0, \quad y(1) = 2.$$

Qual é il massimo intervallo aperto di esistenza della soluzione?

Svolgimento

1. La funzione assegnata é ovviamente continua globalmente in tutto $I\!R^2$. Determiniamo ora le derivate parziali (se esistono) nei punti della bisettrice $y = -x$. Per ogni $x_0 \in I\!R$ si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, -x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, -x_0) - f(x_0, -x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t|t|}{t} = 0,$$

ed una relazione analoga sussiste per la derivata parziale rispetto ad y. Per la differenziabilitá, utilizziamo la definizione. Ora, siccome il gradiente di f nel punto $(x_0, -x_0)$ é il vettore nullo, la f é differenziabile in $(x_0, -x_0)$ se risulta:

$$f(x_0 + h, -x_0 + k) - f(x_0, -x_0) = \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon(h, k),$$

con $\varepsilon(h, k)$ infinitesimo per $(h, k) \to (0, 0)$. Si ha:

$$\varepsilon(h, k) = \frac{(h + k)|h + k|}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

e passando in coordinate polari si ha:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2(\cos\theta + \sin\theta)|\cos\theta + \sin\theta|}{\rho} = 0$$

uniformemente rispetto a θ. Pertanto il limite esiste ed é nullo e quindi la f é differenziabile in ogni punto del tipo $(x_0, -x_0)$.

Siccome la funzione f é positiva se $y > -x$ ed é negativa se $y < -x$ la funzione cambia segno nel passare dal semipiano $x+y > 0$ al semipiano $x + y < 0$. Nell'origine si ha ovviamente $f(0, 0) = 0$, e siccome ogni intorno dell'origine interseca entrambe i semipiani detti, $(0, 0)$ é un punto di sella.

2. L'insieme D puó essere definito dal dominio normale rispetto all'asse x,

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 : -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |x| \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}.$$

L'insieme D e la funzione densitá sono simmetrici rispetto all'asse y e quindi possiamo determinare la massa della parte D_1 di D contenuta nel primo quadrante e moltiplicare poi per due. Si ha allora

$$\begin{aligned} M &= 2\iint_{D_1} \delta(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} e^{x^2+y^2}dxdy = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 e^{\rho^2}\rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^1 2\rho e^{\rho^2}d\rho = \frac{(e-1)\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. Possiamo considerare $x > 0$, visto che il dato iniziale é il punto $(1, 2)$. Si tratta di una equazione di Bernoulli, con $\alpha(x) = 1/x$, $\beta(x) = 1/x^2$ e $s = 2$. Operando allora la sostituzione $z = 1/y$, si ottiene l'equazione lineare

$$z' = -\frac{z}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

L'integrale generale di questa equazione, per $x > 0$ é allora:

$$z(x) = e^{-\int(1/x)dx}\left\{-\int \frac{1}{x^2}e^{\int(1/x)dx}dx + c\right\} = -\frac{\log x}{x} + \frac{c}{x}.$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione originale, per $x > 0$ é :

$$y(x) = \frac{x}{c - \log x},$$

con c costante arbitraria tale che non si annulli mai il denominatore. Per selezionare la soluzione che passa per il punto $(1, 2)$, sostituendo si ottiene $c = 1/2$. Il massimo intervallo di esistenza é allora l'intervallo $]0, e^{1/2}[$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 14.02.2013

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'area del settore circolare $0 < a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ nel primo quadrante al di sotto della retta $y = \sqrt{3}x$ dove a, b sono due costanti positive.

2. Dato il campo vettoriale

$$\Omega(x, y, z) = (Ax \sin(\pi y),\ x^2 \cos(\pi y) + Bye^{-z},\ y^2 e^{-z}), \qquad (x, y, z) \in I\!R^3,$$

determinare le costanti A e B per cui risulta conservativo. Con tale scelta di costanti calcolare

$$\int_C \omega$$

dove C é data da

$$\varphi(t) = (\cos t,\ \sin(2t),\ \sin^2 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

3. Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2\cos(2x)}{\sin(2x) + 1} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

1. Per il calcolo dell'integrale, utilizzando le coordinate polari si ha, indicando con A l'insieme di cui dobbiamo calcolare l'area

$$\int_A dxdy = \int_0^{\pi/3} d\theta \int_a^b \varrho d\varrho = \frac{\pi}{6}(b^2 - a^2).$$

2. Il dominio é dato da tutto lo spazio R^3 che é un insieme convesso. Valutiamo quindi la chiusura della relativa forma differenziale lineare. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = Ax\pi\cos(\pi y), \quad 2x\cos(\pi y) = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0 = \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = -Bye^{-z}, \quad 2ye^{-z} = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Per la chiusura deve quindi risultare

$$Ax\pi\cos(\pi y) = 2x\cos(\pi y), \quad -Bye^{-z} = 2ye^{-z} \Leftrightarrow A = \frac{2}{\pi}, \quad B = -2.$$

Con questi valori delle costanti, il campo risulta conservativo. Infine, essendo la curva chiusa, si ha che l'integrale é nullo.

3. L'equazione differenziale é del primo ordine a variabili separabili. Passando agli integrali di ambo i membri si ha

$$\int dy = \int \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)+1}dx \Leftrightarrow y = \log(\sin(2x)+1) + C.$$

Dal dato iniziale si ha

$$y(0) = C = 0.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 6.06.2013

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\,dx - \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\,dy$$

determinare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \omega,$$

dove γ é il tratto di asteroide di equazione $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ che unisce i punti $(\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/4)$ e $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4)$ percorso in senso antiorario.

2. Trovare tre numeri positivi x, y, z tali che $x+y+z = 8$ e x^2yz sia massimo.

3. Verificare che la funzione $u_1(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ é soluzione dell'equazione

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0, \quad x \in]0, \pi[$$

e trovare quindi l'integrale generale. Infine, dire se le soluzioni ottenute possono essere prolungate per ogni $x > 0$.

Svolgimento

1. Indicata con $\omega = Xdx + Ydy$ la forma differenziale, le funzioni X, Y sono ben definite nell'insieme dei punti del piano privato dell'asse y. La curva assegnata si trova tutta nel sempiano $x > 0$. Studiamo allora l'esattezza della forma in questo semipiano. Siccome il semipiano é una regione convessa, é sufficiente studiare la chiusura. Si ha facilmente

$$\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x} = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y),$$

pertanto la forma é chiusa e quindi esatta. Pertanto, per calcolare l'integrale assegnato, conviene determinare un potenziale ed applicare la formula fondamentale. Se F é un potenziale, si deve avere $F'_x(x,y) = X(x,y)$, da cui integrando rispetto ad x,

$$F(x,y) = \int \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx + \varphi(y) = -\sin\frac{y}{x} + \varphi(y),$$

e imponendo $F'_y(x,y) = Y(x,y)$, otteniamo $\varphi'(y) = 0$, da cui $\varphi(y) = k$, con k costante. La famiglia delle primitive é allora

$$F(x,y) = -\sin\frac{y}{x} + k.$$

Per il calcolo dell'integrale si ha allora:

$$\int_\gamma \omega = F(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4) - F(\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/4) = -2\sin 1.$$

2. Osserviamo intanto che la funzione $f(x,y,z) = x^2yz$ é continua e l'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \quad x + y + z = 8\},$$

é compatto.Pertanto il massimo assoluto esiste per il teorema di Weierstrass. Ora, se almeno uno dei numeri x, y, z é nullo si ha $f(x,y,z) = 0$. Pertanto il massimo valore non puo' essere assunto sugli assi. Si tratta di un problema vincolato. Conviene ricondurre il calcolo del punto di massimo della funzione di due variabili, ottenuta ricavando z dall'equazione del vincolo

$$F(x,y) = x^2y(8 - x - y),$$

definita sull'insieme $T = \{(x, y) \in I\!R^2 : x \geq 0, y \geq 0, \quad x + y \leq 8\}$. Possiamo limitarci a considerare i punti interni a T. Si ha:

$$\nabla f(x, y) = (16xy - 3x^2y - 2xy^2, \quad 8x^2 - x^3 - 2x^2y),$$

e risolvendo il sistema $\nabla f = \mathcal{O}$, nei punti interni a T, otteniamo l'unica soluzione $P = (4, 2) \in T$. Tale punto é ovviamente il valore massimo di F in T, poiché sulla frontiera di T si ha $F(x, y) = 0$. Il punto corrispondente sul vincolo é allora $Q = (4, 2, 2)$. Il valore massimo di f vale quindi 64.

3. Tenendo conto che

$$u_1'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin x}{2x\sqrt{x}},$$

$$u_1''(x) = -\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{x\sqrt{x}} + \frac{3}{4}\frac{\sin x}{x^2\sqrt{x}},$$

sostituendo nell'equazione si ottiene facilmente un' identitá. Per calcolare l'integrale generale per $x > 0$ tenendo conto che la funzione u_1 é diversa da zero nell'intervallo assegnato, determiniamo un'altra soluzione, linearmente indipendente con u_1 mediante la formula

$$u_2(x) = u_1(x) \int \frac{R(x)}{(u_1(x))^2} dx,$$

dove $R(x) = \exp(-\int(1/x)dx) = 1/x$. Risulta:

$$u_2(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cot x = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

l'integrale generale é dato allora da:

$$y(x) = c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Si osservi che queste soluzioni possono poi essere prolungate per ogni $x > 0$, come si puó anche verificare direttamente.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 20.06.2013

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{|y|}{(x^2+y^2)^2} dxdy,$$

dove R é la regione del piano definita da

$$D = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4x,\ |y| \leq \sqrt{3}x\}.$$

2. Determinare il flusso del campo vettoriale

$$\Omega(x,y) = (2x^3 + \log(y^2+1),\ 3x^2y + 3y^3 + \log(x^2+1)),$$

uscente dalla frontiera del dominio del primo quadrante compreso tra l'asse delle x, la retta $y = \sqrt{3}x$ e la circonferenza $x^2+y^2 = 1$.

3. Trovare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - 5xy' + 8y = x^3 - x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

.

Svolgimento

1. La funzione e il dominio possiedono simmetria rispetto all'asse delle x. Pertanto possiamo calcolare l'integrale sulla parte D_1 del dominio D che si trova al di sopra dell'asse x e poi moltiplicare per 2. Passando in coordinate polari, il dominio D_1 diventa

$$D_1' = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi/3,\ 1 \leq \rho \leq 4\cos\theta\},$$

pertanto si ha:

$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{|y|}{(x^2+y^2)^2} dxdy = 2 \iint_{D_1} \frac{|y|}{(x^2+y^2)^2} dxdy \\ = \ & 2\int_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta \int_1^{4\cos\theta} \rho^{-2} d\rho = 2\int_0^{\pi/3} \sin\theta \Big[1 - \frac{1}{4\cos\theta}\Big] d\theta \\ = \ & 2\int_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \tan\theta d\theta = 1 - \frac{1}{2}\log 2. \end{aligned}$$

2. Applichiamo il teorema della divergenza. Si ha

$$\mathrm{div}\Omega(x, y) = 9(x^2 + y^2),$$

e quindi, indicato con D il dominio considerato, si ha

$$\text{Flusso } \Omega = \iint_D 9(x^2 + y^2) dxdy = 9\int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{3}{4}\pi.$$

3. Si tratta di una equazione di Eulero. Si vede immediatamente che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata é dato da

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^4.$$

Il determinante della matrice Wronskiana delle funzioni $\{x^2, x^4\}$ é dato da $2x^5$. Normalizzando l'equazione, si ha che un integrale particolare ha la forma

$$\overline{y}(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x),$$

dove

$$v_1(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{x^2 - 1}{x^2} dx = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$$

$$v_2(x) = \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4}dx = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{6x},$$

da cui si ha

$$\overline{y}(x) = -x^3 - \frac{x}{3}$$

e quindi l'integrale generale é dato da

$$Y(x) = c_1x^2 + c_2x^4 - (x^3 + \frac{x}{3}).$$

Per trovare la soluzione del problema di Caucchy, é sufficiente sostituire i dati inziali per ottenere $c_1 = 1/2,\ c_2 = 5/6$.

La soluzione del problema di Cauchy é allora

$$u(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{6} - (x^3 + \frac{x}{3}).$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 11.07.2013

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Si consideri la funzione seguente:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\log\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare continuitá globale, derivabilitá parziale e differenziabilitá nell'origine. Stabilire infine se il punto $(0,0)$ é un punto di massimo o minino relativo per f.

2. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \sqrt{1+4x^2z^2}\,ds,$$

dove γ é la curva in $\mathbb{R}^3$, intersezione della superficie cilindrica di equazione $x^2+z^2=1$ e della superficie $y=x^2$, $z \in \mathbb{R}$.

3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 2y = e^{x+1}.$$

Determinare infine tutte le soluzioni che divergono a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

Svolgimento

1. La funzione é continua globalmente, infatti si ha, utilizzando le coordinate polari:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 \log\frac{1}{\rho^2} = 0,$$

uniformemente rispetto a θ. Inoltre,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} t\log\frac{1}{t^2} = 0,$$

ed analogamente per la derivata rispetto ad y. Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Per dimostrare che f é differenziabile nell'origine dobbiamo quindi mostrare che la funzione:

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

é infinitesima per $(h,k) \to (0,0)$. Si ha, passando ancora in coordinaate polari,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = \lim_{\rho\to 0} \rho\log\frac{1}{\rho^2} = 0.$$

quindi f é differenziabile nell'origine. Infine si osservi che per ogni (x,y) tale che $x^2+y^2<1$, si ha $f(x,y)>0$. Quindi il punto $(0,0)$ é un punto di minimo relativo.

2. La curva assegnata puó essere parametrizzata dalla funzione

$$\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \cos^2 t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Per tale curva si ha quindi

$$ds = |\varphi'(t)|dt = \sqrt{1 + 4\cos^2 \sin^2 t}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \sqrt{1+4x^2z^2}ds = \int_0^{2\pi} (1 + 4\cos^2 \sin^2 t)dt \\
&= 2\pi + \int_0^{2\pi} \sin^2 2tdt = 2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}dt = \\
&= 3\pi - \frac{1}{8}\Big[\sin 4t\Big]_0^{2\pi} = 3\pi.
\end{aligned}$$

3. L'equazione omogenea associata é coefficienti costanti e l'integrale generale é dato da:

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x.$$

Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa, si possono utilizzare i metodi particolari nel caso di funzioni esponenziali come termine noto. Oppure si puó seguire la strada piú lunga (ma anche piú sicura) del metodo della variazione delle costanti. In tal caso la matrice Wronskiana delle soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea é e^{2x} e le funzioni $v_1(x), v_2(x)$ sono date rispettivamente da $e \cos x, \quad e \sin x$, e quindi una soluzione particolare é data da $\overline{y}(x) = e^{x+1}$. Pertanto l'integraale generale dell'equazione completa é

$$Y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + e^{x+1}.$$

Infine l'unica soluzione che tende all'infinito per $x \to +\infty$ si ottiene ponendo $c_1 = c_2 = 0$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 12.09.2013

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la continutá in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Inoltre stabilire se esistono le derivate direzionali e se é differenziabile sempre nel punto $(0,0)$.

2. Considerando il cono D di equazione $x^2 + y^2 = (1-z)^2, 0 \leq z \leq 1$ e supponendo che abbia densitá $\varrho(x,y,z) = z$ si calcoli la massa totale.

3. Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = 3y + 4x^3 + 2x^2 - x + 1.$$

Svolgimento

1. Per quanto riguarda la continuitá si ha

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2} = 1 + \frac{x}{x^2+y^2}$$

e quindi basta studiare il limite del secondo addendo in $(0,0)$. Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho \cos t}{\varrho^2} = \nexists.$$

Quindi la funzione non é continua e allora neppure differenziabile. Per quanto riguarda il calcolo delle derivate direzionali si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{t^2(v_1^2+v_2^2)+tv_1}{t^2(v_1^2+v_2^2)} - 1\right) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{tv_1}{t^3} = v_1 \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

che esiste finito solo se $v_1 = 0$.

2. Il cono é dato da $D = \{(x,y,z) : 0 < z < 1 - \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 < 1\}$ e quindi la massa é data da

$$M = \int\int_{x^2+y^2<1} dxdy \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} zdz = \int\int_{x^2+y^2<1} \frac{1}{2}(1-\sqrt{x^2+y^2})^2 dxdy.$$

Utilizzando il cambiamento di coordinate polari l'insieme D si trasforma in

$$D' = \{(\varrho,\theta) : 0 \le \varrho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} &\int\int_{x^2+y^2<1} \frac{1}{2}(1-\sqrt{x^2+y^2})^2 dxdy = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}(1-\varrho)^2 \varrho d\varrho \\ &= \pi \int_0^1 (\varrho^3 - 2\varrho^2 + \varrho) d\varrho = \pi \Big[\frac{\varrho^4}{4} - \frac{2}{3}\varrho^3 + \frac{\varrho^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

3. Si tratta di una equazione lineare del primo ordine. Si ha

$$
\begin{aligned}
& y = e^{\int 3dx}\left[\int e^{-\int 3dx}\ (4x^3+2x^2-x+1)dx + C\right] \\
= \quad & e^{3x}\left[\int e^{-3x}(4x^3+2x^2-x+1)dx + C\right] \\
= \quad & e^{3x}\left[\int e^{-3x}4x^3dx + \int e^{-3x}2x^2dx - \int e^{-3x}xdx + \int e^{-3x}dx + C\right].
\end{aligned}
$$

Integrando per parti si ha

$$
\begin{aligned}
& y(x) = e^{3x}\left[\frac{e^{-3x}}{-3}4x^3 - \int \frac{e^{-3x}}{-3}12x^2dx + \int e^{-3x}2x^2dx - \int e^{-3x}xdx + \frac{e^{-3x}}{-3}\right] \\
= \quad & -\frac{4}{3}x^3 + 6e^{3x}\int e^{-3x}x^2dx - e^{3x}\int e^{-3x}xdx - \frac{1}{3} + Ce^{3x} \\
& = -\frac{4}{3} - 2x^2 - x - \frac{2}{3} + Ce^{3x}
\end{aligned}
$$

che é l'integrale generale dell'equazione.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 23.01.2014

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = xe^{-x-y},$$

sull'insieme

$$T = \{(x,y) \in I\!R^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}.$$

2. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma (-y^2 - 2y - 2 + e^y - x^2 y)dx + (-2xy - 2x + xe^y - \frac{x^3}{3})dy,$$

dove γ é la curva di rappresentzione parametrica $\varphi(t) = (t, \sin(2\pi t))$, $t \in [0,1]$.

3. Determinare, se esistono, le soluzioni $y(x)$ dell'equazione lineare

$$y' = y + x^2$$

tali che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$.

Svolgimento

1. La funzione assegnata é ovviamente continua globalmente in tutto $\mathbb{R}^2$. Quindi, siccome T é un insieme compatto, la funzione ammette massimo e minimo assoluti. Per determinarli, calcoliamo intanto il gradiente nei punti interni a T. Si ha in T°

$$\nabla f(x,y) = (e^{-x-y}(1-x), -xe^{-x-y}) \neq (0,0)$$

e pertanto i punti di massimo e minimo assoluti appartengono alla frontiera di T. Sull'asse x si ha

$$g(x) = f(x,0) = xe^{-x},$$

per $x \in [0,1]$, e in tale intervallo g é crescente con $g(0) = f(0,0) = 0$ e $g(1) = f(1,0) = e^{-1}$. Sull'asse y la funzione é invece identicamente nulla. Determiniamo ora la restrizione della f alla retta $x+y=1$. Tale restrizione é data da

$$h(x) = f(x,1-x) = e^{-1}x,$$

per $x \in [0,1]$ e in tale intervallo h é crescente con $h(0) = f(0,1) = 0$ e $h(1) = f(1,0) = e^{-1}$. Pertanto, il minimo assoluto vale 0 ed é assunto in tutti i punti del tipo $(0,y), \quad y \in [0,1]$ e il massimo assoluto vale e^{-1} ed é assunto nel punto $(1,0)$.

2. La forma differenziale lineare

$$\omega = (-y^2 - 2y - 2 + e^y - x^2y)dx + (-2xy - 2x + xe^y - \frac{x^3}{3})dy,$$

é chiusa come si verifica facilmente. Inoltre siccome essa é definita in tutto il piano, che é un insieme convesso, essa é anche esatta. Per determinare quindi il valore dell'integrale richiesto, é sufficiente determinare una primitiva $F(x,y)$. Dalla

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -y^2 - 2y - 2 + e^y - x^2y,$$

si ricava

$$F(x,y) = (-y^2 - 2y - 2 + e^y)x - \frac{x^3y}{3} + \varphi(y),$$

e dalla

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = (-2y - 2 + e^y)x - \frac{x^3}{3}$$

si deduce $\varphi(y) = k$, con k costante. La famiglia delle primitive é allora

$$F(x,y) = -xy^2 - 2xy - 2x + xe^y - \frac{x^3 y}{3} + k.$$

Per l'integrale si ha quindi:

$$\int_\gamma \omega = F(1,0) - F(0,0) = -1.$$

3. L'equazione é lineare del primo ordine e la soluzione generale si determina con l'usuale formula risolutiva. Nel caso presente si ha:

$$y(x) = e^x \left\{ \int x^2 e^{-x} dx + c \right\}.$$

Integrando due volte per parti si ottiene la soluzione generale ($c \in I\!R$)

$$y(x) = -x^2 - 2x - 2 - ce^x, \quad x \in I\!R.$$

Affinché la relazione di limite sia soddisfatta deve essere necessariamente $c \geq 0$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova de 20.02.2014

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}\,(1+e^{\sqrt{x^2+y^2}})^2} dxdy,$$

dove $D = \{(x,y) : I\!R^2 : 1 \le x^2+y^2 \le r^2\}$, con r fissata costante maggiore di 1.

2. Determinare la lunghezza dell'arco di curva di rappresentazione parametrica $\varphi(t) = (a\cos t, a\sin t, a\log(\cos t))$, con $t \in [0, \pi/4]$, dove a é una fissata costante reale non nulla.

3. Stabilire esistenza ed unicitá locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0 \\ \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

e determinare la soluzione.

Svolgimento

1. Passando a coordinate polari, l'integrale si scrive nella forma

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^r \frac{e^\rho}{\rho(1+e^\rho)^2}\rho d\rho = 2\pi \int_1^r \frac{e^\rho}{(1+e^\rho)^2} d\rho.$$

eseguendo la sostituzione (immediata) $e^\rho = t$ nell'ultimo integrale, otteniamo

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_e^{e^r} \frac{1}{(t+1)^2} dt = 2\pi \Big[-\frac{1}{t+1} \Big]_e^{e^r} \\ &= 2\pi \Big(\frac{1}{1+e} - \frac{1}{1+e^r} \Big) = 2\pi \frac{e^r - e}{(1+e)(1+e^r)}. \end{aligned}$$

2. La curva é di classe C^1 pertanto la sua lunghezza é finita e puó essere calcolata con l'integrale

$$L = \int_0^{\pi/4} |\varphi'(t)| dt = |a| \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t} dt.$$

Utilizzando la nota sostituzione $\tan(t/2) = v$, e le note formule trigonometriche, si ha

$$\begin{aligned} L &= |a| \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{2}{1-v^2} dv = |a| \int_0^{\tan(\pi/8)} \Big(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{1+v} \Big) dv \\ &= |a| \Big[\log \frac{1+v}{1-v} \Big]_0^{\tan(\pi/8)} = |a| \log \frac{1+\tan(\pi/8)}{1-\tan(\pi/8)}. \end{aligned}$$

Siccome, utilizzando le formule di bisezione, si ha $\tan(\pi/8) = \sqrt{2-\sqrt{2}}/\sqrt{2+\sqrt{2}}$, il risultato finale é

$$L = |a| \log \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}} = |a| \log(\sqrt{2}+1).$$

3. Si osservi che la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

é ben definita e di classe C^1 per esempio nell'intorno del punto $(0, 1/2)$ dato da $[-1/2, 1/2] \times [1/4, 3/4]$, pertanto per il teorema di esistenza ed unicitá locale, esiste una ed una sola soluzione del problema. Per ottenere la soluzione, si osservi che l'equazione é a variabili separabili e puó essere scritta nella forma:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

che integrata fornisce

$$\arcsin y = \arcsin x + c.$$

Ora, la condizione iniziale impone $c = \arcsin(1/2) = \pi/6$, e quindi l'unica soluzione locale dell'equazione é

$$y(x) = \sin(\arcsin x + \pi/6).$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova de 06.06.2014

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare, se esistono, i massimi e minimi della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ sull'insieme

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 : x^2 y - 1 = 0\}.$$

2. Detarminare i valori della costante C per i quali il campo vettoriale

$$\Omega(x, y) = (Cx \sin(\pi y), x^2 \cos(\pi y))$$

é conservativo in $I\!R^2$. Per tali valori di C determinare la famiglia dei potenziali.

3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0,$$

sull'intervallo $I =]0, 1[$. Determinare poi, se esistono, le soluzioni $y(x)$ tali che

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1^-} y(x) = 1.$$

(Per l'integrale generale, prima determinare per tentativi una soluzione non banale).

Svolgimento

1. Siccome i punti del tipo $(0, y)$ sicuramente non appartengono a D, il vincolo puó essere visto come il grafico della funzione $y = 1/x^2$, che é definita se $x \neq 0$. Allora facendo la restrizione di f a D otteniamo

$$f_D(x, y) \equiv F(x) = x^2 + \frac{1}{x^4},$$

da studiare in $I\!R \setminus \{0\}$. Derivando si ottiene

$$F'(x) = 2x - \frac{4}{x^5} = \frac{2}{x^5}(x^6 - 2).$$

Tale derivata si annulla nei punti $x = \pm\sqrt[6]{2}$. Dallo studio della crescenza e decrescenza della funzione F si ottiene che tali punti sono minimi assoluti per F. Corrispondentemente i punti $P(-\sqrt[6]{2}, 2^{-1/3})$ e $Q = (\sqrt[6]{2}, 2^{-1/3})$ sono minimi assoluti vincolati di f in D. Si vede poi facilmente che la funzione non ha massimi vincolati.

2. Consideriamo la forma differenziale lineare associata

$$\omega(x, y) = X(x, y)dx + Y(x, y)dy = Cx\sin(\pi y)dx + x^2\cos(\pi y)dy.$$

Siccome essa é definita in tutto il piano, che é un insieme convesso, per studiare l'esattezza di ω, é sufficiente mostrare che essa é chiusa. Ora si vede subito che

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

se e solo se $Cx\pi\cos(\pi y) = 2x\cos(\pi y)$ da cui deve essere $C = 2/\pi$, che é l'unico valore di C per il quale ω é chiusa, quindi esatta e quindi ancora, per il quale il campo Ω é conservativo. Per calcolare i potenziali, $F(x, y)$, essendo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{2}{\pi}x\sin(\pi y),$$

si ricava

$$F(x, y) = \frac{x^2}{\pi}\sin(\pi y) + \varphi(y),$$

e dalla

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x^2\cos(\pi y)$$

si deduce $\varphi(y) = k$, con k costante. La famiglia delle primitive é allora

$$F(x, y) = \frac{x^2}{\pi} \sin(\pi y) + k.$$

3. Si vede immediatamente che la funzione $u_1(x) = x$ é una soluzione dell'equazione che non si annulla in I. Per determinare un'altra soluzione $u_2(x)$ indipendente, normalizzando l'equazione e posto

$$R(x) = \exp\Big(- \int \frac{2x}{1 - x^2} dx \Big),$$

risulta:

$$u_2(x) = x \int \frac{R(x)}{x^2} dx = -(1 + x^2).$$

L'integrale generale é quindi

$$Y(x) = c_1 x + c_2(1 + x^2).$$

Ora imponendo le condizioni ai limiti, si ottiene subito $c_2 = 1$ e $c_1 = -1$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 20.06.2014

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \exp\left(\frac{y-2x}{y+2x}\right)dxdy,$$

dove $D = \{(x,y) \in I\!R^2 : 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2-2x\}$, utilizzando il cambiamento di variabili $u = y - 2x, \quad v = y + 2x$.

2. Determinare l'integrale curvilineo rispetto alla lunghezza d'arco

$$\int_\Gamma \left(\frac{2x}{3} + 4z\right)ds$$

dove Γ é la curva in $I\!R^3$ di rappresentazione parametrica

$$\varphi(t) = (3t, (3/2)t^2, t^3), \quad t \in [0,1].$$

3. Determinare, per $x > -1$, l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + \frac{y'}{x+1} = 1$$

e successivamente le soluzioni $y(x)$ tali che

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = 2.$$

Svolgimento

1. Con l'assegnato cambiamento di variabili, il dominio D si trasforma intanto nel dominio del piano (u, v)

$$D' = \{(u, v) : 0 \leq v \leq 2, \quad -v \leq u \leq v\}.$$

Ricavando x, y in funzione di u, v otteniamo $x = (v-u)/4, \quad y = (u+v)/2$, e il determinante della trasformazione in valore assoluto vale $1/4$. Dunque

$$\begin{aligned}&\iint_D \exp\left(\frac{y-2x}{y+2x}\right)dxdy = \frac{1}{4}\iint_{D'} \exp(u/v)dudv \\ &= \frac{1}{4}\int_0^2 dv \int_{-v}^{v} e^{u/v}du = \frac{e-e^{-1}}{4}\int_0^2 vdv = \frac{1}{2}(e-e^{-1}) \\ &= \sinh 1.\end{aligned}$$

2. Il parametro lunghezza d'arco ds é uguale a

$$ds = \sqrt{9+9t^2+9t^4}dt = 3\sqrt{1+t^2+t^4}dt,$$

e quindi si ha

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma \left(\frac{2x}{3}+4z\right)ds = 3\int_0^1 (2t+4t^3)\sqrt{1+t^2+t^4}dt \\ &= 3\int_0^1 \sqrt{1+t^2+t^4}d(1+t^2+t^4) = 2(3^{3/2}-1).\end{aligned}$$

3. L'equazione omogenea associata puó facilmente essere risolta ponendo $z = y'$ e poi ricavando y. Tuttavia é facile vedere che la funzione $u_1(x) = 1$ é soluzione e un'altra soluzione indipendente la si ricava con la formula

$$u_2(x) = u_1(x)\int \frac{R(x)}{(u_1(x))^2}dx,$$

dove

$$R(x) = \exp\left(-\int \frac{1}{x+1}dx\right) = \frac{1}{x+1}.$$

Pertanto ricaviamo $u_2(x) = \log(x+1)$, e l'integrale generale dell'equazione omogenea é:

$$y(x) = c_1 + c_2 \log(x+1).$$

Per trovare ora una soluzione particolare dell'equazione completa, utilizziamo il metodo della variazione delle costanti, ottenendo una soluzione del tipo $\overline{y}(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x)$, dove

$$v_1(x) = -\int (x+1)\log(x+1)dx = -\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)^2,$$

$$v_2(x) = \int (x+1)dx = \frac{1}{2}(x+1)^2.$$

Quindi:

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2.$$

L'integrale generale é allora

$$Y(x) = c_1 + c_2 \log(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)^2.$$

L'unica soluzione che soddisfa la relazione di limite richiesta si ottiene ponendo $c_2 = 0$ e $c_1 = 2$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 11.07.2014

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right),$$

nel suo insieme di definizione.

2. Calcolare l'integrale curvilineo del campo vettoriale

$$\Omega(x,y) = (\sin x + 3y^2,\ 2x - e^{-y^2}),$$

sulla frontiera del dominio regolare

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0\},$$

orientato positivamente.

3. Determinare la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' = x(y')^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

Svolgimento

1. La funzione é definita nell'insieme (aperto) D costituito dal piano $\mathbb{R}^2$ privato degli assi cartesiani. Ogni punto di D é quindi interno e siccome la funzione é di classe C^2 in D, possiamo procedere col determinare i punti in cui si annulla il gradiente ed utilizzare successivamente la matrice Hessiana per stabilire la natura dei punti critici. Si ha facilmente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{y}\right)\frac{2y+x+xy}{xy} = -\frac{2y^2+2xy+xy^2+2y+x}{x^3y^2},$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{y^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{2x+y+xy}{xy} = -\frac{2x^2+2xy+x^2y+2x+y}{x^2y^3}.$$

Risulta quindi $\nabla(x,y) = (0,0)$ se e solo se

$$\begin{cases} (y+1)(2y+x+xy) = 0 \\ (x+1)(2x+y+xy) = 0. \end{cases}$$

Sulle rette $x = -1$ e $y = -1$ si trovano i punti soluzione $P_1 = (-1,-1)$, $P_2 = (-1,1)$ e $P_3 = (1,-1)$. Per $x \neq -1$ e $y \neq -1$ il sistema precedente é equivalente a

$$\begin{cases} 2y+x+xy = 0 \\ 2x+y+xy = 0, \end{cases}$$

la cui unica soluzione é il punto $P_4 = (-3,-3)$. Pertanto troviamo quattro punti critici. Per determinarne la natura, calcoliamo le derivate seconde. Dopo tediosi (ma semplici) calcoli si ottiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y+1}{y^2}\;\frac{2x+2xy+6y}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x+1}{x^2}\;\frac{2y+2xy+6x}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{2y+2x+2xy}{x^3y^3}.$$

Calcolando ora la matrice Hessiana nei punti $P_i, i = 1,2,3$ si ottiene $\det H(P_i) = -4 < 0$ e pertanto i punti P_i sono punti di sella. Valutando invece la matrice Hessiana nel punto P_4 otteniamo $f''_{xx}(P_4) < 0$ e $\det H(-3,-3) > 0$, pertanto P_4 é un massimo relativo.

2. Il dominio D é regolare e il campo vettoriale é di classe C^1, pertanto il metodo piú semplice consiste nell'applicare il teorema di Gauss-Green. In tal caso si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int_{+FrD} \Omega \cdot d\varphi = \iint_D (2-6y)dxdy \\ = & \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 (2-6\rho\sin\theta)\rho d\rho = \int_0^{\pi} (4-16\sin\theta)d\theta \\ = & \; 4\pi + 32 \end{aligned}$$

3. L'equazione puó facilmente essere risolta ponendo $z = y'$ e poi ricavando y. Con la sostituzione si ottiene l'equazione a variabili separabili

$$z' = xz^2,$$

la cui soluzione generale é

$$z(x) = -\frac{2}{x^2 + C_1},$$

con C_1 costante arbitraria. Tale C_1 si puó subito ricavare imponendo il dato iniziale $y'(0) = z(0) = -2$, da cui $C_1 = 1$. Ricavando ora la funzione y si ha:

$$y(x) = \int z(x)dx = -2\arctan x + C_2,$$

e imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$, si ricava subito $C_2 = 1$. La soluzione richiesta é allora $y(x) = -2\arctan x + 1$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova de 11.09.2014

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare l'integrale doppio

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy,$$

dove $D = \{(x,y) \in I\!R^2 : 0 \le y \le \sqrt{3}, \quad y/\sqrt{3} \le x \le \sqrt{4-y^2}\}$.

2. Calcolare l'integrale curvilineo del campo vettoriale

$$\Omega(x,y,z) = \left(\frac{2x}{z}, \quad \frac{2y}{z}, \quad -\frac{x^2+y^2}{z^2}\right),$$

lungo la curva in $I\!R^3$ di rappresentazione parametrica

$$\varphi(t) = (t, t, t^2+1), \quad t \in [0,1].$$

3. Determinare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{x^2+1}{2} y'' + xy' - y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

1. In coordinate polari il dominio D si scrive

$$D' = \{(\theta, \rho) : 0 \leq \theta \leq \pi/3, \quad 0 \leq \rho \leq 2\}.$$

Dunque si ha

$$I = \int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^2 \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{6}(1 - e^{-4}).$$

2. Il campo Ω é conservativo nel primo ottante aperto, che contiene la curva, perché é irrotazionale e l'ottante é convesso. Determiniamo allora i potenziali $F(x, y, z)$ nel primo ottante. Si ha, dalla definizione,

$$F(x, y, z) = \int \frac{2x}{z} dx + g(y, z) = \frac{x^2}{z} + g(y, z).$$

Per determinare la funzione g utilizziamo ancora la definizione di esattezza. Dalla $F_y(x, y, z) = 2y/z$ si deduce $g'_y(y, z) = 2y/z$, cioé $g(y, z) = (y^2/z) + \psi(z)$. Pertanto

$$F(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z} + \psi(z).$$

Ancora la funzione ψ si determina imponendo $F_z(x, y, z) = -\frac{x^2+y^2}{z^2}$. Si deduce subito $\psi(z) = k$, e quindi

$$F(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z} + k.$$

Essendo ora $\varphi(0) = (0, 0, 1)$ e $\varphi(1) = (1, 1, 2)$, l'integrale curvilineo si calcola subito con la differenza $F(1, 1, 2) - F(0, 0, 1) = 1$.

3. Si vede immediatamente che la funzione $u_1(x) = x$ é una soluzione dell'equazione. Per determinare un'altra soluzione $u_2(x)$ indipendente, normalizzando l'equazione e posto

$$R(x) = \exp\Big(- \int \frac{2x}{1 + x^2} dx\Big),$$

risulta:

$$u_2(x) = x\int \frac{R(x)}{x^2}dx = x\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx = -1 - x\arctan x$$

L'integrale generale é quindi

$$Y(x) = c_1 x + c_2(1 + x\arctan x).$$

Ora imponendo le condizioni iniziali si ha subito $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. La soluzione finale é allora

$$y(x) = 1 + x\arctan x.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 23.01.2015

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la continuitá, la derivabilitá e la differenziabilitá in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \cos \frac{1}{y}, \ y \neq 0 \\ \\ 0, \ y = 0 \end{cases}$$

2. Calcolare

$$\int\int_D \sin(y^3) dxdy$$

dove D é la parte di piano definita da

$$D = \{0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}.$$

3. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + y' + \frac{1}{4} y = \cos x.$$

Svolgimento

1. Per quanto riguarda la continuitá si ha

$$\left|y^2 \cos\frac{1}{y}\right| \leq y^2$$

e quindi risulta continua in $(0,0)$. Poiché la funzione é nulla sull' asse x si ha che la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ é nulla. Inoltre si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\cos(1/h)}{h} = \lim_{h\to 0} h\cos(1/h) = 0.$$

Infine per la differenziabilitá

$$f(0+h,0+k) = f(0,0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$

diventa

$$f(h,k) = \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k) \leftrightarrow \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \varepsilon(h,k)$$

con

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$$

poiché

$$\left|\frac{k^2\cos(1/k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \left|\frac{k^2}{\sqrt{k}}\right| = \sqrt{k^2}.$$

Pertanto f risulta differenziabile nell'origine.

2. Poiché l'integrale risulta complicato se l'insieme D si vede come dominio normale rispetto all'asse x, scriviamo il dominio come normale rispetto all'asse y. Si ha

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y^2\}.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} & \int\int_D \sin(y^3)dxdy = \int_0^1\int_0^1 \sin(y^3)dxdy \\ = & \int_0^1(\int_0^{y^2} \sin y^3 dx)dy = \int_0^1 y^2 \sin y^3 dy \\ = & [-\frac{1}{3}\cos y^3]_0^1 = -\frac{\cos 1}{3} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. Si tratta di una equazione differenziale a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico é $\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2$ che ha radice doppia $\lambda = -\frac{1}{2}$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata é

$$y(x) = C_1 e^{-x/2} + C_2 x e^{-x/2}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa della forma $A\cos x + B\sin x$. Derivando si ha $y^{'} = -A\sin x + B\cos x$ e $y^{''} = -A\cos x - B\sin x$. Sostituendo nell'equazione completa si ottiene

$$-A\cos x - B\sin x - A\sin x + B\cos x + \frac{1}{4}A\cos x + \frac{1}{4}B\sin x = \cos x$$

da cui

$$(-A + B + \frac{A}{4})\cos x + (-B - A + \frac{B}{4})\sin x = \cos x.$$

Questa relazione deve essere vera per ogni $x \in R$ e allora deve risultare

$$-\frac{3}{4}A + B = 1, \qquad -\frac{3}{4}B - A = 0$$

la cui soluzione é $A = -\frac{12}{25}, \quad B = \frac{16}{25}$. L'integrale generale é dunque

$$y(x) = C_1 e^{-x/2} + C_2 x e^{-x/2} - \frac{12}{25}\cos x + \frac{16}{25}\sin x.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 19.02.2015

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Verificare se, nel suo dominio, é esatta la seguente forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \frac{1+y}{1+x}dx + \log(1+x)dy,$$

ed eventualmente determinarne i potenziali.

2. Calcolare

$$\int\int_D x^2 e^{xy} dxdy$$

dove D é il triangolo di vertici $(0,0),\ (1,1),\ (1,0)$.

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$y'' + \pi^2 y = 0$$

con $y(\frac{1}{4}) = 0, y^{'}(\frac{1}{4}) = 1$.

Svolgimento

1. Per quanto riguarda il dominio si ha $D = \{(x,y) \in I\!R^2 : x > -1\}$, che é un insieme convesso. Studiamo allora la chiusura della forma diferenziale, si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1+y}{1+x}\Big) = \frac{1}{1+x} = \frac{\partial}{\partial x}\log(1+x)$$

quindi ω risulta chiusa in un insieme convesso e quindi é esatta in D. Determiniamo un potenziale U

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1+y}{1+x} \leftrightarrow U = \int \frac{1+y}{1+x}dx + \varphi(y) = (1+y)\log(1+x) + \varphi(y).$$

Inoltre

$$\log(1+x) = \frac{\partial U}{\partial y} = \log(1+x) + \varphi'(y) \leftrightarrow \varphi'(y) = 0 \leftrightarrow \varphi(y) = C$$

quindi

$$U(x,y) = (1+y)\log(1+x) + C.$$

2. Consideriamo l'insieme D come dominio normale rispetto all'asse x, quindi si ha

$$D = \{(x,y) \in I\!R : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}.$$

Allora, considerando la sostituzione $xy = t \leftrightarrow xdy = dt$

$$\begin{aligned}
\int\int_D x^2 e^{xy}dxdy &= \int_0^1 (\int_0^x x^2 e^{xy}dy)dx = \int_0^1 (\int_0^{x^2} xe^t dt)dx \\
&= \int_0^1 x(\int_0^{x^2} e^t dt)dx = \int_0^1 x[e^t]_0^{x^2}dx = \int_0^1 x(e^{x^2}-1)dx \\
&= \int_0^1 (xe^{x^2} - x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx - [\frac{x^2}{2}]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}[e^{x^2}]_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1.
\end{aligned}$$

3. Si tratta di una equazione differenziale a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica é

$$\lambda^2 + \pi^2 = 0 \leftrightarrow \lambda^2 = -\pi^2 \leftrightarrow \lambda = \pm\pi.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata é

$$y(x) = C_1 \cos \pi x + C_2 \sin \pi x.$$

Determiniamo ora le costanti C_1 e C_2. Si ha

$$y(\frac{1}{4}) = 0 = C_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \leftrightarrow C_1 + C_2 = 0$$

e

$$y'(\frac{1}{4}) = 1 = -\pi C_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi C_2 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Da $C_1 = -C_2$ nella prima equazione si ottiene da cui sostituendo nella seconda si ha

$$\pi C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \leftrightarrow C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}$$

e quindi $C_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}\pi}$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 11.06.2015

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare, se esistono, i massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - \log(1 + x^2 + y^2)$$

sulla boccia chiusa di centro l'origine e raggio 2.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare l'integrale doppio

$$I = \iint_D \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, \quad y \geq \sqrt{3}|x|\}.$$

3. Determinare le soluzioni del problema ai limiti

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' - y = x^2(x+1) \\ y(1) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} y(x) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

1. La funzione possiede punti di minimo e massimo assoluti nella boccia assegnata B per il teorema di Weierstrass. Determiniamo gli eventuali punti critici all'interno della boccia di centro l'origine e raggio 2. Risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - \dfrac{2x}{1+x^2+y^2} = 0 \\ \\ 2y - \dfrac{2y}{1+x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2x(x^2+y^2) = 0 \\ \\ 2y(x^2+y^2) = 0 \end{cases}$$

L'unico punto critico é quindi l'origine $(0,0)$. Ora senza esaminare la matrice Hessiana, dalla disuaglianza di Bernoulli per il logaritmo, si ricava subito che il punto $(0,0)$ é un punto di minimo assoluto, perché $f(0,0) = 0$ mentre la funzione é sempre positiva se $(x,y) \neq (0,0)$. Ora esaminiamo il comportamento di f sulla frontiera. Risulta, per $x^2+y^2 = 4$, $f_{|FrB}(x,y) = 4 - \log 5$, cioé f é costante sulla frontiera di B, e pertanto il massimo assoluto di f vale $4 - \log 5$ ed é assunto su tutti i punti della frontiera di B.

2. Conviene utilizzare il fatto che il dominio e la funzione sono simmetrici rispetto all'asse y. Pertanto

$$I = 2\int_{D_1} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy,$$

dove D_1 é la parte di D che si trova nel primo quadrante. Scrivendo D_1 in coordinate polari, otteniamo l'insieme

$$E = \{(\theta,\rho) : \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq \rho \leq \sqrt{2}\}.$$

Si ha dunque

$$I = 2\int_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\rho^2 - \log(1+\rho^2)}{\rho} \rho d\rho = \frac{\pi}{3}\int_1^{\sqrt{2}} (\rho^2 - \log(1+\rho^2)) d\rho$$

$$= \frac{\pi}{3}\Big[\frac{\rho^3}{3} - \rho\log(1+\rho^2) + 2\rho - 2\arctan\rho\Big]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi}{3}\Big(\frac{8\sqrt{2}-7}{3} + \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\log 3 + \log 2 - 2\arctan\sqrt{2}\Big)$$

3. L'equazione é del tipo di Eulero. Per l'equazione omogenea associata, facendo la sostituzione $x = e^t$ otteniamo l'equazione a coefficienti costanti

$$\eta'' + \eta' - \eta = 0$$

che ha come soluzioni $\eta_1(t) = e^{\alpha_1 t}$ e $\eta_2(t) = e^{\alpha_2 t}$, dove

$$\alpha_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Allora l'equazione omogenea associata ha integrale generale $c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$, dove

$$u_1(x) = x^{\alpha_1}, \quad u_2(x) = x^{\alpha_2}.$$

Essendo $\alpha_2 - \alpha_1 = \sqrt{5}$ e $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$ si ottiene per la matrice Wronskiana di (u_1, u_2)

$$\det W(x) = \frac{\sqrt{5}}{x^2}.$$

Per calcolare una soluzione particolare, applichiamo il metodo della variazione delle costanti. Per la funzione vettoriale $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$, si ha, normalizzando l'equazione:

$$v_1(x) = -\int (x+1)x^{\alpha_2}\frac{x^2}{\sqrt{5}}dx = -\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\frac{x^{4+\alpha_2}}{4+\alpha_2} + \frac{x^{3+\alpha_2}}{3+\alpha_2}\Big]$$

$$v_2(x) = \int (x+1)x^{\alpha_1}\frac{x^2}{\sqrt{5}}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\frac{x^{4+\alpha_1}}{4+\alpha_1} + \frac{x^{3+\alpha_1}}{3+\alpha_1}\Big]$$

e quindi con facili calcoli si perviene alla soluzione particolare

$$\overline{y}(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) = \frac{x^3}{11} + \frac{x^2}{5}.$$

L'integrale generale dell'equazione data é allora

$$Y(x) = c_1x^{\alpha_1} + c_2x^{\alpha_2} + \frac{x^3}{11} + \frac{x^2}{5}.$$

Risolviamo ora il problema ai limiti assegnato. Affiché sia verificata la relazione di limite, siccome $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_2 > 0$ deve necessariamente essere $c_1 = 0$. Imponendo poi la condizione $y(1) = 0$, si ottiene $c_2 = -(1/11) - (1/5) = -16/55$. Il problema possiede quindi l'unica soluzione

$$y(x) = -\frac{16}{55}x^{\alpha_2} + \frac{x^3}{11} + \frac{x^2}{5}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 25.06.2015

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Assegnata la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \dfrac{\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

determinare i valori di $\alpha > 0$ per i quali in $(0,0)$, la f: (i) é continua; (ii) ammette tutte le derivate direzionali; (iii) é differenziabile.

2. Determinare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma e^{y/x}\left(1 - \frac{y}{x}\right)dx + (e^{y/x} + \cos y)dy,$$

dove γ é il grafico della funzione $f(x) = \log(e+x)$, $x \in [1/2, 1]$, orientato nel senso delle x crescenti.

3. Determinare i valori del parametro k per i quali la funzione $u(x) = e^{kx}$ é soluzione dell'equazione omogenea per $x > 1$

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0.$$

Determinare quindi l'integrale generale in $]1, +\infty[$ dell'equazione

$$(x-1)y'' - xy' + y = e^x(1-x)^2.$$

Infine dire se esistono soluzioni che sono infinitesime per $x \to 1^+$.

Svolgimento

1. Studiamo la continuitá. Utilizzando le coordinate polari, si ha

$$\left| |y|^\alpha \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \rho^{\alpha-1} |\sin\theta|^\alpha |\cos(\rho\cos\theta)|$$

e quindi si ha continuitá nell'origine per $\alpha > 1$. Per quanto riguarda la derivabilitá direzionale si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{t} |v_2|^\alpha \cos(tv_1)$$

e quindi in questo caso il limite esiste finito per $\alpha > 2$ e le derivate valgono zero. Per la differenziabilitá, dobbiamo limitarci agli $\alpha > 2$, e siccome $\nabla f(0,0) = (0,0)$ si ha

$$f(h,k) = \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k) \leftrightarrow \frac{|k|^\alpha \cos h}{h^2+k^2} = \varepsilon(h,k)$$

e passando ancora a coordinate polari, si vede subito che la funzione risulta anche differenziabile per $\alpha > 2$.

2. Studiamo anzitutto l'esattezza della forma differenziale lineare. Poiché

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{y}{x^2} e^{y/x} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

la forma differenziale lineare risulta chiusa nell'insieme convesso $x > 0$ che contiene la curva e quindi risulta esatta in questo insieme. Determiniamo una primitiva F. Poiché $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{y/x} + \cos y$

$$F(x,y) = \int (e^{y/x} + \cos y) dy = xe^{y/x} + \sin y + g(x)$$

inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{y/x}(1 - \frac{y}{x}) + g'(x) = e^{y/x}(1 - \frac{y}{x})$$

e quindi $g'(x) = 0 \leftrightarrow g(x) = k$. Le primitive sono date da

$$F(x,y) = xe^{y/x} + \sin y + k$$

e allora l'integrale é

$$\int_\gamma e^{y/x}(1-\frac{y}{x})dx + (e^{y/x}+\cos y)dy = F(1,\log(e+1)) - F(1/2,\log(e+1/2))$$

$$= e^{\log(e+1)} + \sin(\log(e+1)) - \frac{1}{2}e^{2\log(e+1/2)} - \sin(\log(e+1/2))$$

$$= (e+1) + \sin(\log(e+1)) - \frac{1}{2}(e+1/2)^2 - \sin(\log(e+1/2)).$$

3. Si tratta di una equazione del secondo ordine a coefficienti non costanti. Determiniamo le eventuali soluzioni della forma $y = e^{kx}$. Si ha $y' = ke^{kx}$ e $y'' = k^2e^{kx}$ da cui sostituendo

$$(x-1)k^2e^{kx} - xke^{kx} + e^{kx} = 0 \leftrightarrow (x-1)k^2 - xk + 1 = 0 \leftrightarrow$$
$$x(k^2-k) - k^2 + 1 = 0 \leftrightarrow xk(k-1) - (k+1)(k-1) = 0 \leftrightarrow$$
$$(k-1)(xk-(k+1)) = 0$$

da cui $k = 1$, poiché l'equazione deve essere vera per ogni x. Un'altra soluzione linearmente indipendente si trova con la formula

$$y_2(x) = e^x\Big[\int \frac{e^{-\int -\frac{x}{x-1}dx}}{e^{2x}}dx\Big] = e^x\Big[\int \frac{e^{x+\log(x-1)}}{e^{2x}}dx\Big]$$

$$= e^x\Big[\int \frac{(x-1)}{e^x}dx\Big] = e^x[\int (x-1)e^{-x}dx]$$

$$= e^x[-(x-1)e^{-x} - e^{-x}] = -x.$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea é allora dato da:

$$y(x) = c_1e^x + c_2(-x).$$

Per determinare l'integrale particolare dell'equazione completa, utilizziamo il metodo della variazione delle costanti, avendo cura prima di normalizzare l'equazione. Anzitutto, il determinante della matrice wronskiana é dato da $e^x(x-1)$. Inoltre

$$v_1(x) = \int e^x(x-1)\frac{x}{x-1}e^{-x}dx = \int xdx = \frac{x^2}{2},$$

$$v_2(x) = \int e^x = e^x.$$

Una soluzione particolare é allora data dalla

$$\overline{y}(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) = e^x(\frac{x^2}{2} - x)$$

e quindi l'integrale generale dell'equazione é dato da:

$$Y(x) = c_1 e^x + c_2(-x) + e^x(\frac{x^2}{2} - x).$$

Le soluzioni che sono infinitesime per $x \to 1^+$ sono tutte quelle con $c_2 = e(c_1 - \frac{1}{2})$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
del 16.07.2015

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare la lunghezza della curva data da

$$\gamma(t) = (t, \log(1 - t^2))$$

con $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (e^{-x} + e^x)y' = 2\sqrt{y}(1 + y) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

3. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma y^2(1 - x^2)dx + 4xy^3dy$$

dove γ é la frontiera della parte del piano interna alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ nel primo quadrante.

Svolgimento

1. Poiché la parametrizzazione della curva é quella data, possiamo calcolare

$$\sqrt{x'^2+y'^2} = \sqrt{1+\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+2t^2+t^4}{(1-t^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

essendo $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Quindi

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+t^2}{1-t^2}dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Big(-1 + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\Big) dt \\ &= \Big[-t - \log|1-t| + \log|1+t| \Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -1 - 2\log\frac{1}{2} + 2\log\frac{3}{2} \\ &= -1 + 2\log 3 \end{aligned}$$

2. L'equazione differenziale é del primo ordine a variabili separabili e allora si ha

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}(1+y)} = \frac{dx}{e^{-x}+e^x}$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)} = \int \frac{dx}{e^{-x}+e^x} \leftrightarrow \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)} = \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}.$$

Nel primo integrale poniamo $\sqrt{y} = t \leftrightarrow y = t^2 \leftrightarrow dy = 2tdt$ mentre nel secondo poniamo $e^x = z \leftrightarrow x = \log z \leftrightarrow dx = \frac{1}{z}dz$, si ha

$$\frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t(1+t^2)} = \int \frac{zdz}{z(1+z^2)} \Leftrightarrow \int \frac{dt}{(1+t^2)} = \int \frac{dz}{(1+z^2)} \Leftrightarrow \arctan t = \arctan z + K$$

sostituendo si ha

$$\arctan\sqrt{y} = \arctan e^x + K$$

e dalla condizione iniziale si ottiene $\arctan 1 = \arctan 1 + K \leftrightarrow K = 0$.
Quindi

$$\arctan\sqrt{y} = \arctan e^x \leftrightarrow \sqrt{y} = e^x \leftrightarrow y = e^{2x}.$$

3. Utilizzando le formule di Gauss-Green si ha

$$
\begin{aligned}
& \int_\gamma y^2(1-x^2)dx + 4xy^3dy = \int\int(4y^3 - 2y(1-x^2))dxdy \\
= \; & \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (4y^3 - 2y(1-x^2))dy = \int_0^1 dx[y^4 - y^2(1-x^2)]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\
= \; & \int_0^1 [(1-x^2)^2 - (1-x^2)(1-x^2)]dx = 0.
\end{aligned}
$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
del 10.09.2015

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = \pi + \sqrt{3}x + 2y - 2\sin x + 4\sin y$$

nell'insieme $]0,\pi[\times]-\pi,\pi[$.

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + x^2\right)^2 - x^4 \\ y(1) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

dove D é la parte interna alle circonferenze di equazione $(x-\frac{1}{2})^2+y^2 = \frac{1}{4}$ e $(x-1)^2+y^2 = 1$ e compresa tra le rette $y = \pm x$.

Svolgimento

1. La funzione é di classe C^∞ su tutto il piano e quindi anche sul rettangolo. Studiamo per cominciare i punti interni valutando il gradiente, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{3} - 2\cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 + 4\cos y.$$

Considerando il sistema del gradiente uguagliato a zero si ottiene

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2K\pi, \quad y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2K\pi.$$

Nel rettangolo si trovano solo i punti

$$P_1 = (\frac{\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}) \quad P_2 = (\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}).$$

Le derivate seconde sono date da

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\sin x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\sin y$$

e quindi calcolando l'Hessiano si ha

$$H(P_1) = 2\sqrt{3}, \quad H(P_2) = -2\sqrt{3}$$

e quindi P_1 é minimo relativo, P_2 é un punto sella.

2. Consideriamo l'equazione differenziale, si ha

$$y' = \Big(\sqrt{\frac{y}{x}} + x^2\Big)^2 - x^4 \leftrightarrow y' = \Big((\sqrt{\frac{y}{x}} + x^2) - x^2\Big)\Big((\sqrt{\frac{y}{x}} + x^2) + x^2\Big)$$

$$\leftrightarrow \quad y' = \sqrt{\frac{y}{x}}\Big(\sqrt{\frac{y}{x}} + 2x^2\Big) \leftrightarrow \frac{y}{x} + 2\sqrt{y}x^{3/2}$$

che é un'equazione differenziale del primo ordine di Bernoulli e allora ponendo $\sqrt{y} = z \leftrightarrow z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$ si ha

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{2x} + x^{3/2} \leftrightarrow z' = \frac{z}{2x} + x^{3/2}$$

che é un'equazione differenziale lineare del primo ordine la cui soluzine risulta

$$z = e^{1/2 \log x}[\int e^{-1/2 \log x} x^{3/2} dx + C] = \sqrt{x}\Big(\int x dx + C\Big) = \frac{x^{5/2}}{2} + C\sqrt{x}.$$

Dalla sostituzione otteniamo

$$\sqrt{y} = \frac{x^{5/2}}{2} + \sqrt{x} C$$

e dalla condizione iniziale si ha

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C \leftrightarrow C = 0.$$

Quindi

$$\sqrt{y} = \frac{x^{5/2}}{2} \leftrightarrow y = \frac{x^5}{4}.$$

3. Passando a coordinate polari $x = \varrho \cos t,\ y = \varrho \sin t$ si ha che

$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \leftrightarrow (\varrho \cos t - \frac{1}{2})^2 + \varrho^2 \sin^2 t = \frac{1}{4} \leftrightarrow \varrho = \cos t$$

e

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \leftrightarrow (\varrho \cos t - 1)^2 + \sin^2 t = 1 \leftrightarrow \varrho = 2\cos t.$$

Quindi le limitazioni sono date dall'insieme D' definito da

$$-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4} \qquad \cos t \leq \varrho \leq 2\cos t.$$

Allora l'integrale diventa

$$\begin{aligned} & \int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int\int_{D'} \frac{1}{\varrho} \varrho d\varrho dt = \int\int_{D'} d\varrho dt \\ = & \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt \int_{\cos t}^{2\cos t} d\varrho = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt [\varrho]_{\cos t}^{2\cos t} \\ = & \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos t - \cos t) dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = [\sin t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$