UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Soluzione della prova del 05.02.2008

1. Stabilire, al variare di $x \in I\!R$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^{n+2}}$$

e, per i punti ove converge, determinare la somma.

Scriviamo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^{n+2}} = \frac{1}{(1+x^2)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n .$$

La serie a secondo membro è un serie geometrica di ragione $x/(1+x^2)$. Siccome la ragione è strettamente minore di 1 in valore assoluto, la serie sarà assolutamente convergente per ogni $x \in I\!R$. Per la somma si ha:

$$S(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} \frac{1}{1-\frac{x}{1+x^2}} = \frac{1}{(x^2-x+1)(1+x^2)}.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$$

e tracciarne un grafico approssimativo. (Non è richiesto lo studio della derivata seconda).

Il dominio della funzione è l'insieme $D = \{x \in I\!R : x > -1\}$. Inoltre $f(x) > 0$ se $x+1 > x^2+1$ da cui si ricava $0 < x < 1$; $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$ e per $x > 1$. Infine $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0,\ x = 1$. Per quanto riguarda la ricerca degli asintoti, si ha

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Allora la retta $x = -1$ è un asintoto verticale, mentre non ci sono asintoti orizzontali. È facile anche vedere che non ci sono asintoti obliqui (si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$). Passiamo ora allo studio qualitativo. La funzione è sempre derivabile nel suo dominio, e risulta:

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x+1}\frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)(x+1)}.$$

Risulta allora che $f'(x) > 0$ se $x^2+2x-1 < 0$, cioè se $-1 < x < \sqrt{2}-1$, mentre $f'(x) < 0$ se $x > \sqrt{2}-1$. Nel punto $x = \sqrt{2}-1$ si ha $f'(x) = 0$ e questo punto è un punto di massimo relativo. Il valore assunto dalla funzione in tale punto è certamente positivo e vale $\log(\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}})$. Lo studio si completa con lo studio della derivata seconda.

3. Calcolare l'area della regione del piano delimitata dalle rette $x = 0$, $x = 1$, dall'asse x e dal grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}.$$

Occorre calcolare l'integrale definito

$$A = \int_0^1 f(x)dx.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2+6x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}dx \\ &= \frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3+3x^2+1}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{5}-1). \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 28.02.2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin^2(n^5).$$

LA serie é a segni alterni. ANalizziamo la convergenza assoluta. Siccome risulta

$$0 \le \frac{(-1)^n}{n^2} \sin^2(n^5) \le \frac{1}{n^2},$$

per ogni $n \in I\!N$, otteniamo subito la convergenza assoluta, perché la serie di termine generale $1/n^2$ é convergente. Pertanto la serie converge.

2. Dimostrare che per ogni $x > -1$ risulta

$$x \ge \log(1+x),$$

ed utilizzare questo risultato per studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x - \log(x+1)}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Posto $g(x) = x - \log(x+1)$, si ha

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1},$$

che é negativa per $x \in]-1, 0[$ e positiva per $x > 0$. Quindi il punto $x = 0$ é un punto di minimo assoluto per la funzione g e tale minimo assoluto vale 0. Dunque, $g(x) \ge 0$, per ogni $x > -1$ e $g(0) = 0$. In base a quanto stabilito, il dominio della funzione f é l'insieme

$$D = \{x \in I\!R : x > -1\}.$$

La funzione é sempre positiva e vale zero se $x = 0$. Calcoliamo i limiti. SI ha:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Calcoliamo ora la derivata: Si ha:

$$f'x) = \frac{x}{2\sqrt{x - \log(x+1)}(x+1)}, \quad x \neq 0$$

e quindi $f'(x)$ é positiva se $x > 0$, é negativa se $x \in]-1, 0[$. Quindi f é crescente in $]0, +\infty[$, é decrescente in $]-1, 0[$. Il punto $x = 0$ é allora un punto di minimo assoluto e $f(0) = 0$. In tale punto la f non é derivabile. Infatti, facendo il limite del rapporto incrementale, otteniamo $1/\sqrt{2}$ da destra e $-1/\sqrt{2}$ da sinistra. Infine si puó mostrare che la derivata seconda si mantiene negativa per $x > 0$ pertanto la funzione é concava sul semiasse reale positivo, mentre é positiva se $x \in]-1, 0[$ e quindi é ivi convessa.

3. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{2 - \log^2 x}} dx.$$

Calcoliamo prima l'integrale indefinito. Posto $t = \log x$, si ha

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x\sqrt{2 - \log^2 x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2 - t^2}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2 - (t/\sqrt{2})^2}} dt = \arcsin(t/\sqrt{2}) + C \\
&= \arcsin(\log x/\sqrt{2}) + C
\end{aligned}$$

Applicando la formula fondamentale del calcolo integrale, si ottiene:

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{2 - \log^2 x}} dx = \Big[\arcsin(\log x/\sqrt{2})\Big]_1^e = \arcsin(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 28.02.2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \arctan(n^3).$$

La serie é a segni alterni. Studiamo prima la convergenza assoluta. Risulta:

$$0 \leq \frac{\arctan(n^3)}{n\sqrt{n}} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

e la serie di termine generale $1/n^{3/2}$ é convergente. Pertanto la serie connverge assolutamente e quindi converge.

2. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$e^x \geq x + 1,$$

ed utilizzare questo risultato per studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{e^x - x - 1}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Posto $g(x) = e^x - x - 1$, si ha $g'(x) = e^x - 1$ che é positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Inoltre $g(0) = 0$, e quindi $x = 0$ é un punto di minimo assoluto per la funzione g e tale minimo vale 0. Quindi $e^x \geq x + 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque il dominio della funzione f é tutto $\mathbb{R}$. Risulta

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Calcoliamo la derivata. Si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^x - x - 1}}(e^x - 1),$$

e risulta $f'(x) > 0$ se $x > 0$, mentre $f'(x) < 0$ se $x < 0$. La funzione é quindi crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$. IL punto $x = 0$ é un punto di minimo assoluto e tale minimo assoluto vale 0. In tale punto la derivata non esiste. Infatti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{e^x - x - 1}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

mentre il limite sinistro vale $-1/\sqrt{2}$. In $x = 0$ abbiamo quindi un punto angoloso. Infine si puó mostrare che la derivata seconda si mantiene positiva per $x > 0$ pertanto la funzione é convessa sul semiasse reale positivo, mentre é negativa se $x < 0$ ed é quindi concava sul semiasse reale negativo.

3. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x + 1}{e^{3x} + 3e^x} dx.$$

Procediamo con il calcolo dell'integrale indefinito. Sostituendo $e^x = t$ otteniamo

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{3x} + 3e^x} dx = \int \frac{t + 1}{t^2(t^2 + 3)} dt.$$

Utilizzando la formula di Hermite, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{t+1}{t^2(t^2+3)} &= \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 3} + \frac{d}{dt}\frac{D}{t} \\ &= \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 3} - \frac{D}{t^2}. \end{aligned}$$

Risulta $A = 1/3$, $B = C = D = -1/3$, da cui

$$\begin{aligned} &\int \frac{t+1}{t^2(t^2+3)} dt \\ &= \frac{1}{3}\left\{\int \frac{1}{t} dt - \int \frac{t}{t^2+3} dt - \int \frac{1}{t^2+3} dt + \int \frac{1}{t^2} dt\right\} \\ &= \frac{1}{3}\log t - \frac{1}{3t} - \frac{1}{6}\log(t^2+3) - \frac{\sqrt{3}}{9}\arctan(\frac{t}{\sqrt{3}}) + C \\ &= \frac{x}{3} - \frac{1}{3e^x} - \frac{1}{6}\log(e^{2x}+3) - \frac{\sqrt{3}}{9}\arctan(\frac{e^x}{\sqrt{3}}) + C \end{aligned}$$

Applicando la formula fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x+1}{e^{3x}+3e^x} dx$$
$$= \frac{2\log 2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{\log 7}{6} - \frac{\sqrt{3}}{9}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}) + \frac{\sqrt{3}\pi}{54}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Parte I
Prova del 02.07.2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\log(1+\frac{1}{n^2}),$$

stabilendo in particolare se converge semplicemente o assolutamente.

Cominciamo subito con lo studiare la convergenza assoluta. La serie assoluta è:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\log(1+\frac{1}{n^2}).$$

Tenendo conto del limite notevole

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(t+1)}{t}=1,$$

confrontando con $n^{-3/2}$ si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\log(1+1/n^2)}{n^{-3/2}}=1$$

e quindi per il criterio degli infinitesimi, la serie assoluta converge. Pertanto la serie è convergente.

2. Studiare la funzione

$$f(x)=\arctan\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

determinando in particolare, eventuali punti di massimo e minimo relativi, punti di flesso e asintoti. Tracciare poi un grafico approssimativo.

La funzione è definita sull'insieme

$$D=\{x\in I\!R : x\neq 1\}.$$

Per quanto riguarda gli asiontoti, calcoliamo i limiti alla frontiera del campo di esistenza. Si ha facilmente:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=-\pi/2,\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=\pi/2.$$

Non ci sono pertanto asintoti verticali. Inoltre:

$$\lim_{x \to \pm\infty} = -\pi/4,$$

e quindi la retta $y = -\pi/4$ è un asintoto orizzontale. Studiamo ora il segno della funzione. Risulta $f(x) > 0$ se $0 < x < 1$, $f(0) = 0$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$ e $x > 1$. Calcoliamo ora la derivata prima ($x \neq 1$):

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + (1-x)^2}.$$

Pertanto la funzione f è crescente per $x < 0$, per $0 < x < 1$ e per $x > 1$. Non ci sono quindi punti di massimo o minimo relativo. Calcoliamo ora la derivata seconda ($x \neq 1$). Si ha:

$$f''(x) = \frac{2 - 4x}{(x^2 + (1-x)^2)^2},$$

pertanto la f è convessa se $x < 1/2$ e concava in $]1/2, 1[$ e in $x > 1$. Il punto $x = 1/2$ è allora un flesso per f e $f(1/2) = \pi/4$.

3. Calcolare l'area della regione del piano compresa tra i grafici delle funzioni $f, g : [0,1] \to I\!R$ definite dalle

$$f(x) = -x \arctan x^2, \quad g(x) = x \log(x^2 + 1).$$

Si tratta semplicemente di calcolare l'integrale

$$A = \int_0^1 (x \log(x^2+1) + x \arctan x^2) dx.$$

Si ha, integrando per decomposizione e per parti:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 x \log(x^2+1) dx + \int_0^1 x \arctan x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\left[(x^2+1)(\log(x^2+1) - 1)\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2}\left[x^2 \arctan x^2 - \frac{1}{2}\log(1+x^4)\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \log 2 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\log 2 = \frac{3}{4}\log 2 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Parte I
Prova del 17.07.2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare, al variare di $x \in I\!R$ il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+5}}{3n},$$

stabilendo in particolare in quali punti converge semplicemente o assolutamente.

Soluzione

Applicando il criterio del rapporto alla serie assoluta, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x^{2(n+1)+5}}{3(n+1)} \right| \left| \frac{3n}{x^{2n+5}} \right| = x^2.$$

pertanto la serie è assolutamente convergente se $-1 < x < 1$. Se $x > 1$ la serie diverge a $+\infty$ perchè il limite del termine generale non tende a 0, mentre se $x < -1$ ancora la serie diverge a $-\infty$. Se $x = 1$, la serie è divergente (si comporta come la serie armonica) e lo stesso accade per $x = -1$.) Concludendo: la serie converge assolutamente se $x \in]-1, 1[$ mentre diverge negli altri casi (a $+\infty$ se $x \geq 1$, a $-\infty$ se $x \leq -1$.

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|x|}{e^{x-1}},$$

determinando in particolare, eventuali punti di massimo e minimo relativi, punti di flesso e asintoti. Tracciare poi un grafico approssimativo.

Soluzione

La funzione è definita in tutto $I\!R$ ed è non negativa. Inoltre si annulla soltanto se $x = 0$. Pertanto $x = 0$ è un minimo assoluto. Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

La retta $y = 0$ è allora un asintoto orizzontale. É facile inoltre mostrare che non c'è asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Studiamo ora la derivata.

Se $x > 0$, si ha:

$$f'(x) = \frac{e^{x-1}(1-x)}{e^{2(x-1)}}$$

pertanto se $0 < x < 1$ la funzione è crescente, mentre se $x > 1$ la f é decrescente. Nel punto $x = 1$ la derivata si annulla. Quindi $x = 1$ è un punto di massimo relativo.

Se invece $x < 0$, si ha:

$$f'(x) = \frac{e^{x-1}(x-1)}{e^{2(x-1)}}$$

e in tal caso si vede subito che $f'(x) < 0$, per ogni $x < 0$. Quindi f è decrescente in $]-\infty, 0[$.

Infine nel punto $x = 0$ la f non è derivabile, in quanto la derivata destra risulta uguale a 1 mentre la derivata sinistra è -1. Il punto $x = 0$ è allora un punto angoloso (di minimo assoluto, come abbiamo già detto).

Calcoliamo ora la derivata seconda. Per $x > 0$ si ha:

$$f''(x) = \frac{e^{(x-1)}(x-2)}{e^{2(x-1)}}.$$

Pertanto $f''(2) = 0$, f è concava se $x \in]0, 2[$ ed è convessa se $x > 2$. Il punto $x = 2$ è un punto di flesso. Infine, se $x < 0$ si vede immediatamente che f'' è sempre positiva, e quindi è convessa in $]-\infty, 0[$.

3. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 x \arcsin x dx.$$

Soluzione

Eseguendo una integrazione per parti si ha:

$$\int_0^1 x \arcsin x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \arcsin x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx - \frac{\pi}{2}.$$

Ora l'ultimo integrale si calcola facilmente con la sostituzione $x = \cos t$ oppure tenendo conto che esso rappresenta l'area del quarto di cerchio di centro l'origine e raggio 1, contenuto nel I quadrante. Il valore è allora $\pi/4$. Concludendo,

$$\int_0^1 x \arcsin x dx = \frac{\pi}{8}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio - Edile Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 21.01.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea ________________________________ **Matr.**_____________

Votazione _________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare il limite
$$\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t}$$
ed utilizzare il risultato ottenuto per studiare il comportamento della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan e^{nx}}{n},$$
al variare di $x \in I\!R$.

2. Studiare la funzione
$$f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 1},$$
determinando in particolare eventuali punti di massimo e di minimo, monotonia e asintoti, concavitá e convessitá. Tracciare poi un grafico approssimativo.

3. Calcolare l'area della regione del piano definita dalla:
$$A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \frac{x}{\cos^2 x}\}.$$

Svolgimento

1. La serie risulta assolutamente convergente e quindi anche convergente. Infatti, utilizzando il criterio degli infinitesimi applicato alla serie dei valori assoluti, si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n^2|a_n| &= \lim_{n\to+\infty} n^2\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n^2})\\ &= \lim_{n\to+\infty} n^2\sin(\frac{1}{n^2}) = 1.\end{aligned}$$

2. Il dominio della funzione si ricava dalle condizioni $x \neq 0$ e $x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Si ha facilmente

$$D = \{x \in I\!R : x \leq 1, \quad x \geq 2, \quad x \neq 0\}.$$

La funzione risulta positiva per $x \in]0,1[\cup]2,+\infty[$, mentre é negativa per $x < 0$. Essa si annulla per $x = 1,\ x = 2$.. Determiniamo gli asintoti. Risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

e quindi la retta $x = 0$ é un asintoto verticale. Inoltre ovviamente la funzione e' continua a sinistra nel punto $x = 1$ e a destra nel punto $x = 2$. Dallo studio del segno si ricava anche che $x = 2$ é un minimo relativo e $x = 1$ é pure un minimo relativo. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 1,$$

e quindi le rette $y = \pm 1$ sono asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$ rispettivamente. Calcoliamo ora la derivata prima. Si ha per $x \in D,\ x \neq 1, 2,$

$$f'(x) = \frac{3x-4}{2\sqrt{x^2-3x+2}x^2},$$

che non si annulla mai in D. In particolare, se $x > 2$ si ha che $f'(x) > 0$ e quindi f é crescente in $[2,+\infty[$, mentre risulta $f'(x) < 0$ se $x < 0$ e $0 < x < 1$. La f é pertanto decrescente per $x < 0$ e sull'intervallo $]0,1]$. Non vi sono quindi altri punti di massimo o minimo relativo. Infine, per completare lo studio della derivata prima, si vede subito che nei punti $x = 1$, $x = 2$ non esistono le derivate sinistra e destra rispettivamente. Risulta infatti:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty.$$

Lo studio precedente porta a prevedere un punto di flesso nell'intervallo $]0, 1[$.

3. Calcoliamo l'integrale indefinito di f. Risulta facilmente con la sostituzione $t = logx$,

$$\int \frac{1}{x\log^3 x}dx = \int \frac{1}{t^3}dt = -\frac{1}{2t^2} + c = -\frac{1}{2\log^2 x} + c,$$

per $x \in]0, 1[$. Inoltre, per determinare la primitiva che soddisfa alla relazione di limite richiesta, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} (-\frac{1}{2\log^2 x} + c) = 1,$$

da cui segue subito $c = 1$. Pertanto la primitiva é:

$$P(x) = -\frac{1}{2\log^2 x} + 1.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Parte I
Prova del 11.09.2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^3 \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n .$$

stabilendo in particolare se converge semplicemente o assolutamente.

Soluzione

La serie converge assolutamente. Infatti utilizzando il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^3}\frac{n+1}{2n+1} = 1/2 < 1.$$

Pertanto la serie è anche convergente.

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x| + x^2}$$

determinando in particolare, eventuali punti di massimo e minimo relativi, punti di flesso e asintoti. Tracciare poi un grafico approssimativo.

Soluzione

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed inoltre $f(x) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essendo $f(0) = 0$, $f(x) > 0$, per $x \neq 0$, il punto $x = 0$ è un minimo assoluto. Non ci sono asintoti verticali. Controlliamo l'esistenza di altri asintoti. Essendo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty,$$

non ci sono neppure asintoti orizzontali. Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 1/2,$$

pertanto la retta $y = x + 1/2$ è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Sicome la funzione è pari, per simmetria la retta $y = -x + 1/2$ è pure un asintoto per $x \to -\infty$. Per quanto riguarda la derivata, possiamo limitarci a studiare la funzione soltanto per $x \geq 0$. In tal caso si ha:

$$f(x) = \sqrt{x + x^2},$$

la cui derivata, per $x > 0$, è

$$f'(x) = \frac{1 + 2x}{2\sqrt{x + x^2}} > 0, \quad \text{per ogni } x > 0.$$

Quindi la funzione f è crescente per $x > 0$. Per simmetria, la funzione decresce per $x < 0$. Si osservi che la funzione non è derivabile in $x = 0$, perchè

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \pm\infty.$$

Calcoliamo ora la derivata seconda, sempre per $x > 0$. Risulta

$$f''(x) = -\frac{1}{4(x + x^2)\sqrt{x + x^2}} < 0, \ \text{per ogni } x > 0.$$

La funzione è quindi concava per $x > 0$. Per simmetria la funzione è concava anche per $x < 0$. Non ci sono pertanto punti di flesso.

3. Determinare l'espressione della funzione integrale della funzione $f : [-1, 1] \to I\!R$, definita dalla

$$f(x) = x|e^x - 1|.$$

Soluzione

La funzione si può scrivere anche nella forma:

$$f(x) = \begin{cases} x(1 - e^x), & -1 \leq x \leq 0 \\ x(e^x - 1), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Pertanto, per la funzione integrale $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$, si ha:

$$F(x) = \int_{-1} x(t - te^t)dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{e} - xe^x + e^x,$$

se $-1 \leq x \leq 0$. Se invece $0 \leq x \leq 1$, si ha

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^{0}(t - te^t)dt + \int_{0}^{x}(te^t - t)dt = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} t(e^t - 1)dt \\ &= \frac{3}{2} - \frac{2}{e} + xe^x - e^x - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio - Edile Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 21.01.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea ________________________________ **Matr.**_____________

Votazione _________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare il limite
$$\lim_{t \to 0} \frac{\arctan t}{t}$$
ed utilizzare il risultato ottenuto per studiare il comportamento della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan e^{nx}}{n},$$
al variare di $x \in I\!R$.

2. Studiare la funzione
$$f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 1},$$
determinando in particolare eventuali punti di massimo e di minimo, monotonia e asintoti, concavitá e convessitá. Tracciare poi un grafico approssimativo.

3. Calcolare l'area della regione del piano definita dalla:
$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \frac{x}{\cos^2 x}\}.$$

Svolgimento

1. Anzitutto é immediato verificare che

$$\lim_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t}=1;$$

si puó usare ad esempio la regola de l' Hospital. Passiamo allora alla serie. Essa é a termini positivi. Se $x=0$, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan 1}{n}=\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

che diverge, essendo la serie armonica divergente.

Se $x>0$, la serie é divergente essendo

$$\frac{\arctan e^{nx}}{n}\geq\frac{\arctan 1}{n}=\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Se infine $x<0$ allora $e^{nx}\to 0$ se $n\to+\infty$. Pertanto possiamo scrivere:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan e^{nx}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan e^{nx}}{e^{nx}}\frac{e^{nx}}{n}$$

e utilizzando il limite precedente si ha, per esempio,

$$\lim_{n\to+\infty}n^2\frac{\arctan e^{nx}}{e^{nx}}\frac{e^{nx}}{n}=0.$$

Pertanto la serie converge per il criterio degli infinitesimi.

2. Il dominio della funzione si ricava dalla condizione $4x^2-1\geq 0$, da cui si ha:

$$D=\{x\in I\!R: x\leq -1/2\}\cup\{x\in I\!R: x\geq 1/2\}.$$

Inoltre, la funzione é positiva per $x>1/2$ e negativa se $x<-1/2$. Questo si vede subito risolvendo la disequazione irrazionale $2x-\sqrt{4x^2-1}>0$. Non ci sono intersezioni con gli assi. La funzione f é continua a destra nel punto $1/2$ e risulta $f(1/2)=1$, e continua a sinistra nel punto $-1/2$ e risulta $f(-1/2)=-1$. Non ci sono pertanto asintoti verticali.

Determiniamo ora gli eventuali asintoti orizzontali ed obliqui. Si ha, razionalizzando:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x+\sqrt{4x^2-1}} = 0,$$

pertanto l'asse delle x é un asintoto orizzontale. Inoltre si vede facilmente che:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Controlliamo se per $x \to -\infty$ c'é un asintoto obliquo. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} (2 - \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}) \\ &= \lim_{x\to-\infty} (2 + \frac{\sqrt{4x^2-1}}{|x|}) = 4. \end{aligned}$$

Inoltre, ancora razionalizzando, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2x-\sqrt{4x^2-1}} = 0.$$

La retta $y = 4x$ é allora un asintoto obliquo.

Calcoliamo ora la derivata prima. Si ha per $x \in D,\ x \neq \pm 1/2$,

$$f'(x) = 2 - \frac{8x}{2\sqrt{4x^2-1}} = 2 - \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}},$$

che non si annulla mai in D. In particolare, se $x > 1/2$ si ha che $f'(x) < 0$ e quindi f é decrescente per $x > 1/2$, mentre risulta $f'(x) > 0$ se $x < -1/2$ e pertanto la f é crescente per $x < -1/2$. Non vi sono quindi punti di massimo o minimo relativo interni a D. Infine, per completare lo studio della derivata prima, si vede subito che nei punti $x = 1/2,\ x = -1/2$ non esistono le derivate destra e sinistra rispettivamente. Risulta infatti:

$$\lim_{x\to(1/2)^+} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to(-1/2)^-} f'(x) = +\infty.$$

Lo studio precedente implica che $x = 1/2$ é un massimo assoluto per la f, mentre non esiste il minimo assoluto. Il punto $x = -1/2$ puó essere considerato un massimo relativo (non interno a D.) Infine, la derivata seconda é data da:

$$f''(x) = \frac{4}{(4x^2-1)^{3/2}},$$

che risulta sempre positiva in ogni punto interno di D. Dunque la funzione é convessa sia per $x < -1/2$ che per $x > 1/2$.

3. Si tratta di un integrale quasi immediato, poiché $1/\cos^2 x$ é la derivata di $\tan x$. Allora integrando per parti si ha subito:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{x}{\cos^2 x} dx = [x \tan x]_0^1 - \int_0^1 \tan x dx \\ = \quad & \tan 1 - \int_0^1 \frac{\sin x}{\cos x} dx = \tan 1 + [\log(\cos x)]_0^1 \\ = \quad & \tan 1 + \log(\cos 1). \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio (per A.A. prima del 2007/08
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 18.02.2009

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare al variare di $\alpha > 0$, il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} - 1}{n^{5/2}}.$$

2. Studiare la funzione

$$\frac{\sqrt{x^2 - x}}{x}$$

e tracciarne un grafico approssimativo

3. Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx.$$

Svolgimento

1. La serie é a termini positivi (é 0 solo il primo termine,gli altri sono positivi), pertanto essa diverge oppure converge. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^{(5/2)-\alpha}\frac{n^\alpha - 1}{n^{5/2}} = 1,$$

pertanto se $(5/2) - \alpha > 1$, cioé $\alpha < 3/2$, la serie converge, mentre se $\alpha \geq 3/2$, la serie diverge.

2. Il dominio della funzione é l'insieme

$$D = \{x \in I\!R : x^2 - x \geq 0,\ x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[.$$

La funzione risulta positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 0$, mentre si annulla nel punto $x = 1$, che é quindi un punto di minimo relativo (non interno).

Determiniamo ora gli eventuali asintoti. Si ha:

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} -\sqrt{1-(1/x)} = -\infty,$$

pertanto l'asse delle y é un asintoto verticale. Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2}} = 1,$$

e quindi la retta $y = 1$ é un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2}} = -1,$$

e quindi la retta $y = -1$ é un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Non ci sono pertanto asintoti obliqui.

Calcoliamo ora la derivata prima. Si ha, per $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{x}{2x^2\sqrt{x^2 - x}},$$

che nel dominio D non si annulla mai. La derivata destra nel punto $x = 1$ non esiste finita perché risulta:

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty.$$

Inoltre, $f'(x) > 0$ se $x > 1$, mentre $f'(x) < 0$ se $x < 0$. Dunque f é crescente per $x \geq 1$, mentre é decrescente se $x < 0$.

Studiamo ora la derivata seconda. Si ha per $x \neq 1$,

$$f''(x) = -\frac{4x^2 - 3x}{4x^2(x^2 - x)^{3/2}},$$

che é negativa sia per $x < 0$ che per $x > 1$. Pertanto la f é sempre concava nei due intervalli.

3. Si ha facilmente

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx = [\arctan e^x]_0^1 = \arctan e - (\pi/4).$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 02.07.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Corso di Laurea_____________________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{x-n}$$

e per i punti x per i quali converge determinare la somma.

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 6}{x + 2}$$

determinando in particolare eventuali punti di massimo o di minimo, asintoti e flessi. Tracciare poi un grafico approssimativo.

3. Determinare la famiglia delle primitive della funzione

$$g(x) = f(x) + 3^{x+2}$$

nell'intervallo $[0, +\infty[$. Determinare poi quella primitiva che assume il valore 1 nel punto $x = 0$.

Svolgimento

1. La serie risulta convergente per ogni $x \in I\!R$ infatti possiamo scrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{x-n} = e^x \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = e^x \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e^{x+1}}{e-1}.$$

2. La funzione é definita in $I\!R \setminus \{-2\}$ ed essendo

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} f(x) = \pm\infty,$$

la retta $x = -2$ é un asintoto verticale. Inoltre la funzione f si annulla per $x = \frac{3\pm\sqrt{33}}{2}$. Dallo studio del segno si deduce subito che la funzione é positiva per $-2 < x < \frac{3-\sqrt{33}}{2}$ e per $x > \frac{3+\sqrt{33}}{2}$. Inoltre é negativa per $x < -2$ e per $\frac{3-\sqrt{33}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{33}}{2}$. Interseca inoltre l'asse y nel punto $(0, -3)$.

Studiamo ora gli eventuali asintoti orizzontali e obliqui. Essendo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

non ci saranno asintoti orizzontali. Tuttavia la retta $y = x - 5$ é un asintoto obliquo essendo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = -5.$$

Studiamo ora la derivata prima. Risulta:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2},$$

che si annulla nei punti $x = 0$ e $x = -4$. Dallo studio del segno della derivata si deduce che la f é crescente negli intervalli $]-\infty, -4]$ e $[0, +\infty[$ mentre é decrescente negli intervalli $[-4, -2[$ e $]-2, 0]$. Allora $x = 0$ é un punto di minimo relativo, con $f(0) = -3$ e $x = -4$ é un punto di massimo relativo, con $f(-4) = -11$.

Studiamo infine la derivata seconda. Si ha:

$$f''(x) = \frac{8x + 16}{(x+2)^4},$$

da cui si ricava subito che f é convessa per $x > -2$ ed é concava per $x < -2$. Non ci sono punti di flesso.

3. Si ha
$$g(x) = \frac{x^2-3x-6}{x+2} + 3^{x+2} = \frac{x^2-6}{x+2} - \frac{3x}{x+2} + 3^{x+2}.$$
Pertanto decomponendo le frazioni
$$\begin{aligned} \int g(x)dx &= \int (x - 5 + \frac{4}{x+2} + 3^{x+2})dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 5x + 4\log(x+2) + \frac{3^{x+2}}{\log 3} + C. \end{aligned}$$
Infine otteniamo, imponendo la condizione di passaggio per il punto $(0,1)$,
$$1 = 4\log 2 + \frac{9}{\log 3} + C \Leftrightarrow C = 1 - 4\log 2 - \frac{9}{\log 3}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio- Edile Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 16.06.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**__________________

Corso di Laurea __________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare convergenza semplice ed assoluta della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n + \log n + e^n}.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$$

determinando, in particolare, asintoti, derivabilitá, crescenza, decrescenza, massimi, minimi, convessitá e concavitá. Tracciarne poi un grafico approssimativo.

3. Determinare l'area della regione del piano compresa tra i grafici delle funzioni $f(x) = \sin^2 x$ e $g(x) = 1 + \cos x\, e^{\sin x}$, $x \in [0, \pi/2]$.

Svolgimento

1. La serie é assolutamente convergente. Infatti si ha per esempio

$$\frac{1}{n+\log n+e^n} \leq \frac{1}{e^n},$$

e la serie di termine generale $1/e^n$ é convergente (serie geometrica di ragione $1/e<1$). Pertanto la serie data é anche convergente.

2. La funzione é definita in tutto $I\!R$ ed inoltre é sempre non negativa. Essendo poi $f(\pm 1)=0$, vediamo subito che i punti $x=\pm 1$ sono di minimo assoluto (il minimo assoluto vale 0). Si noti poi che la funzione é simmetrica rispetto all'asse delle y.

Non ci sono asintoti verticali ed essendo chiaramente

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty,$$

non esistono nemmeno asintoti orizzontali. Controlliamo l'esistenza di asintoti obliqui. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^3}}=+\infty$$

e pertanto non esiste l'asintoto obliquo per $x\to+\infty$. Per simmetria, non esiste nemmeno l'asintoto obliquo per $x\to-\infty$. Per la derivata prima, osserviamo intanto che essa esiste ad eccezione dei punti $x=\pm 1$. Infatti, per $x\neq\pm 1$ si ha:

$$f'(x)=\frac{4x}{3(x^2-1)^{1/3}},$$

mentre si vede subito che

$$\lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\pm\infty.$$

Per simmetria, risulta anche

$$\lim_{x\to -1^{\pm}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\mp\infty.$$

La derivata si annulla solo nel punto $x = 0$, é positiva se $x > 1$ e $-1 < x < 0$, mentre é negativa se $0 < x < 1$ e $x < -1$. Il punto $x = 0$ é quindi un punto di massimo relativo e $f(0) = 1$, mentre f cresce sugli intervalli $[-1, 0]$ e $[1, +\infty[$ e decresce negli altri.

Per la derivata seconda si ha:

$$f''(x) = \frac{4(x^2 - 3)}{9(x^2 - 1)^{4/3}}.$$

Essa si annulla nei punti $x = \pm\sqrt{3}$, che risultano dei flessi e si ha $f(\pm\sqrt{3}) = \sqrt[3]{4}$. Infatti la f é convessa negli intervalli $]-\infty, -\sqrt{3}]$ e $[\sqrt{3}, +\infty[$ mentre é concava sugli intervalli $[-\sqrt{3}, -1]$, $[-1, 1]$ e $[1, \sqrt{3}]$.

3. Essendo ovviamente $f(x) \leq g(x)$, per ogni $x \in [0, \pi/2]$, indicando con A l'area richiesta, si ha

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} (1 + \cos x \; e^{\sin x} - \sin^2 x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \cos x e^{\sin x} dx - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \left[e^{\sin x} \right]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + e - 1. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 09.09.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+x}$$
determinando in particolare dominio, asintoti, eventuali punti di massimo o di minimo e flessi.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, dire se essa ammette primitive nel suo dominio e in caso affermativo determinarle.

3. Detta f la funzione dell'esercizio 1, determinare i valori di $x > 0$ per i quali la serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} f(1/n)$$
risulti convergente.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é l'insieme degli $x \in I\!R$ per i quali $|x| + x \neq 0$, cioé per $x > 0$. la funzione puo' allora essere scritta piú semplicemente

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x}, \quad x > 0.$$

Inoltre la funzione é sempre positiva sul suo insieme di definizione e non si annulla. Determiniamo ora gli eventuali asintoti. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{2x} = +\infty,$$

pertanto la retta $x = 0$ é un asintoto verticale. Inoltre:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Vediamo se c'é asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{2x^2} = 1/2,$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - x/2] = 0,$$

pertanto la retta $y = x/2$ é un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Calcoliamo ora la derivata prima. Si ha, per $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2-1}{x^2}$$

La derivata risulta positiva se $x > 1$, quindi la funzione risulterá allora crescente per $x \in [1, +\infty[$. La derivata é invece negativa se $x \in]0, 1[$, pertanto la funzione é decrescente in tale intervallo. nel punto $x = 1$ la derivata si annulla. Il punto $x = 1$ é allora un punto di minimo assoluto e risulta $f(1) = 1$.

Determiniamo infine la derivata seconda. Si ha, per $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{1}{x^3},$$

che nel dominio D é sempre positiva. Dunque la funzione f é convessa e non ci sono punti di flesso.

2. Per determinare la famiglia delle primitive per $x > 0$, calcoliamo l'integrale indefinito di f, Si ha:

$$\int \frac{x^2+1}{2x}dx = \int \frac{x}{2}dx + \int \frac{1}{2x}dx = \frac{x^2}{4} + \frac{\log x}{2} + c.$$

3. Si tratta di studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\frac{n^2+1}{2n}$$

La serie é a termini positivi, per ogni valore di x. Pertanto essa non é mai indeterminata. Per determinare i valori di x richiesti, é sufficiente applicare il criterio degli infinitesimi. Si vede immediatamente che basta assumere $x > 2$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 17.09.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin \sqrt{|x| + x}$$

determinando in particolare dominio, eventuali punti di massimo o di minimo e flessi, eventuali asintoti.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, calcolare l'integrale definito:

$$\int_{1/4}^{1/2} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

3. Detta f la funzione dell'esercizio 1, studiare il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n^4}).$$

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é l'insieme degli $x \in I\!R$ per i quali $0 \leq |x|+x \leq 1$, cioé per $x \leq 1/2$:

$$D = \{x \in I\!R : x \leq 1/2\}.$$

Inoltre la funzione é continua a sinistra nel punto $x = 1/2$ e $f(1/2) = \pi/2$.

La funzione puó essere scritta nella forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \arcsin\sqrt{2x}, & 0 < x \geq 1/2. \end{cases}$$

Quindi per $x < 0$, ogni punto risulta di massimo e minimo relativi, perché qui la f risulta costante. É sufficiente allora studiare la funzione per $0 \leq x \leq 1/2$. Non ci sono asintoti. Calcoliamo la derivata per $x \in]0, 1/2[$. Si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 4x^2}},$$

che nel suddetto intervallo aperto non é mai nulla, mentre agli estremi non esiste. Dunque non ci saranno massimi e minimi relativi per $x > 0$. Siccome la derivata prima é sempre positiva, la funzione é crescente nell'intervallo e quindi $x = 0$ é un punto di minimo assoluto (cosí come lo sono tutti i punti del semiasse reale negativo), mentre $x = 1/2$ é il punto di massimo assoluto. Calcoliamo ora la derivata seconda (per $0 < x < 1/2$). Si ha

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{1 - 4x}{x - 2x^2}\frac{1}{\sqrt{2x - 4x^2}}.$$

Essa si annulla per $x = 1/4$ ed é positiva per $x > 1/4$ e negativa per $0 < x < 1/4$. La f risulta quindi convessa se $1/4 \leq x \leq 1/2$, mentre é concava se $0 < x < 1/4$. Il punto $x = 1/4$ é allora un punto di flesso.

2. Risulta:

$$I = \int_{1/4}^{1/2} \frac{\arcsin\sqrt{2x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{2}\int_{1/4}^{1/2} \arcsin\sqrt{2x} d(\sqrt{2x})$$

ed integrando per parti si ottiene

$$I = \sqrt{2}\left[\sqrt{2x}\arcsin\sqrt{2x} + \sqrt{1-2x}\right]_{1/4}^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} - 1.$$

3. Si tratta di studiare la serie (a termini positivi)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{\sqrt{2}}{n^2}.$$

Tenendo conto del limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1,$$

la serie risulta convergente per il crtiterio degli infinitesimi, essendo:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{n^2} = \sqrt{2}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 19.01.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare per $x \geq -1$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \log^2(1 + \frac{x}{n}).$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^5 - 2x^3 + x}}.$$

Tracciare poi un grafico.

3. Dopo aver provato che per ogni $x \in [0, 1]$ risulta

$$\sqrt{x} \geq x^2 \log(x + 1),$$

determinare l'area della regione del piano delimitata dai grafici delle funzioni

$$g(x) = \sqrt{x}$$

e

$$f(x) = x^2 \log(x + 1)$$

con $x \in [0, 1]$.

Svolgimento

1. La serie é a termini positivi, pertanto possiamo applicare il criterio degli infinitesimi. Tenendo conto del limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(t+1)}{t} = 1,$$

si ha, per ogni $x \geq 1$,

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{\log(1+x/n)}{x/n} = 1,$$

e pertanto, scegliendo $p = 3/2$ si ottiene subito, per $x \geq 1$,

$$\lim_{n\to +\infty} n^{3/2}\sqrt{n}\log^2(1+x/n) = x^2.$$

La serie é pertanto convergente.

2. Anzitutto la funzione non é definita per $x = 0$. Se poi $x \neq 0$ essa puó essere scritta nella forma piú semplice

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{|x^2-1|}.$$

Il dominio é quindi l'insieme $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, cioé l'insieme dei numeri reali positivi escluso il punto $x = 1$. La funzione é inoltre sempre positiva e si annulla soltanto per $x = 0$. Il punto $(0,0)$ é quindi l'unico punto di intersezione con gli assi. Determiniamo allora gli eventuali asintoti. Essendo

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,$$

la retta $x = 1$ é il solo asintoto verticale. Inoltre si ha

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0,$$

e quindi la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale. Non vi sono pertanto asintoti obliqui. Passiamo ora allo studio qualitativo del grafico. La funzione va riscritta nella forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{1-x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ \\ \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}, & x > 1. \end{cases}$$

la funzione é quindi derivabile in ogni punto del suo dominio, ad eccezione del punto $x = 0$. Si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1+3x^2}{2\sqrt{x}(1-x^2)^2}, & 0 \le x < 1 \\ \\ -\frac{1+3x^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}, & x > 1. \end{cases}$$

Risulta infine

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty.$$

La funzione non possiede quindi massimi o mininmi relativi interni a D. Tuttavia il punto $x = 0$, ove manca la derivata destra, é un punto di minimo assoluto. Valutiamo ora la derivata seconda. Risulta:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)(15x^4+18x^2-1)}{4x\sqrt{x}(1-x^2)^4}, & 0 \le x < 1 \\ \\ \frac{(x^2-1)(15x^4+18x^2-1)}{4x\sqrt{x}(x^2-1)^4}, & x > 1. \end{cases}$$

La derivata seconda si annulla nel punto $\overline{x} = \sqrt{\frac{4\sqrt{6}-9}{15}}$, che é compreso tra 0 ed 1. La funzione allora é concava se $0 < x < \overline{x}$, mentre é convessa negli intervalli $\overline{x} < x < 1$ e $x > 1$.

Lo studio é completo.

3. La disuguaglianza é immediata. Basta osservare che in $[0, 1]$ risulta $\sqrt{x} \ge x^2$ e che $\log(x + 1) < 1$. Per l'area occorre calcolare l'integrale

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2 \log(x + 1))dx.$$

Si ha:

$$A = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 \log(x + 1))dx = \frac{2}{3} - \int_0^1 x^2 \log(x + 1))dx$$

e integrando per parti

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3} - \left[\frac{1}{3}x^3 \log(x + 1)\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{x + 1}dx \\ &= \frac{2}{3} - \frac{\log 2}{3} + \frac{1}{3}\Big[\int_0^1 \frac{x^3 + 1}{x + 1}dx - \int_0^1 \frac{1}{x + 1}dx\Big] \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2\log 2}{3} + \frac{1}{3}\int_0^1 (x^2 - x + 1)dx = \frac{17}{18} - \frac{2\log 2}{3}. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 11.02.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea___________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = (x - \frac{1}{2})e^{2/x}$$

determinando in particolare eventuali punti di massimo e minimo relativi e eventuali punti di flesso. Tracciarne poi il grafico.

3. Calcolare la famiglia delle primitive della funzione

$$g(x) = \frac{2(e^x + 1)}{e^{2x} - e^x + 2\cosh x}$$

e determinare quella primitiva che assume valore 1 nel punto $x = 1$.

Svolgimento

1. La serie converge assolutamente. Infatti la serie dei valori assoluti é data da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$$

e applicando il limite notevole:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1,$$

si vede facilmente che

$$\lim_{t\to 0} n^{3/2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) = 1$$

e quindi per il criterio degli infinitesimi con $p = 3/2 > 1$, la serie assoluta converge e quindi converge anche quella di partenza.

2. Il dominio della funzione é l'insieme $D = I\!R \setminus \{0\}$. Inoltre $f(x) > 0$ se $x > 1/2$, $f(x) < 0$ se $x < 1/2$, $x \neq 0$, mentre $f(x) = 0$ se $x = 1/2$.

Determiniamo ora gli eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Quindi la retta $x = 0$ é un asintoto verticale per f. Inoltre:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Non ci sono asintoti orizzontali. Valutiamo allora l'eventuale esistenza di asintoti obliqui $y = px + q$. Si ha:

$$p = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 1/2}{x} e^{2/x} = 1,$$

mentre

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} [x(e^{2/x} - 1) - e^{2/x}/2] = 3/2.$$

Dunque la retta $y = x + 3/2$ é un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Ora passiamo allo studio della derivata prima. Si ha, per $x \in D$

$$f'(x) = \frac{e^{2/x}}{x^2}(x-1)^2.$$

La derivata prima é pertanto sempre positiva, ad eccezione del punto $x = 1$, nella quale si annulla. Quindi applicando il test di stretta monotonia, la funzione é strettamente crescente negli intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Non ci sono pertanto punti di massimo o minimo relativo in D. Determiniamo ora gli eventuali punti di flesso. Come é facile prevedere troveremo un flesso nel punto $x = 1$. Infatti si ha in D :

$$f''(x) = \frac{e^{2/x}}{x^4}(x-1)$$

che si annulla per $x = 1$. Inoltre $f''(x) > 0$ per $x > 1$, mentre $f''(x) < 0$ per $x < 1,\ x \neq 0$. Pertanto la f é convessa in $[1, +\infty[$ e concava in $]-\infty, 0[$ e $]0, 1]$. Nel tracciare il grafico si tenga infine conto del fatto che $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$. Pertanto il grafico "esce" a sinistra del punto $x = 0$ in modo tangente all'asse delle x.

3. Occorre determinare l'integrale indefinito della funzione f in un intervallo in cui essa é ben definita e continua. Tenendo conto che

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

la funzione puó essere scritta nella forma:

$$f(x) = 2\frac{e^x + 1}{e^{2x} + e^{-x}}.$$

Operando la sostituzione $x = \log t$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\int 2\frac{e^x+1}{e^{2x}+e^{-x}}dx = 2\int \frac{t+1}{t^3+1}dt = 2\int \frac{1}{t^2-t+1}dt \\
= \quad & 2\int \frac{1}{(t-1/2)^2+3/4}dt = \frac{8}{3}\int \frac{1}{[(2/\sqrt{3})(t-1/2)]^2+1}dt \\
= \quad & \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan[(2/\sqrt{3})(t-1/2)] + c = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan[(2/\sqrt{3})(e^x-1/2)] + c.
\end{aligned}$$

Pertanto le primitive hanno la forma

$$P(x) = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan[(2/\sqrt{3})(e^x - 1/2)] + c.$$

Per trovare infine la primitiva che passa per il punto $(1, 1)$ basta imporre la condizione $P(1) = 1$. Si ottiene

$$c = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan[(2/\sqrt{3})(e - 1/2)].$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 15.04.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea___________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(2\cosh x)^{An}}$$

e determinarne la somma $S(x)$ nei punti dove converge.

(A = numero delle lettere del nome)

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{1-x^2}\right),$$

determinando in particolare eventuali punti di massimo e minimo relativi e eventuali punti di flesso. Tracciarne poi il grafico.

3. Utilizzando il Calcolo Integrale, determinare l'area dell'ellisse di equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{4\pi^2} + \frac{y^2}{\pi^2} = 1.$$

Svolgimento

1. Se $x = 0$ la serie é ovviamente convergente, con somma 0. Se $x \neq 0$, la serie é equivalente alla

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\cosh x)^{An}}$$

che é una serie geometrica di ragione $1/(2\cosh x)^A$. Per la convergenza, x dovrá quindi verificare la disuguaglianza

$$(e^x + e^{-x})^A > 1$$

cioé $e^x + e^{-x} > 1$, che é banalmente verificata per ogni $x \in I\!R$. La serie pertanto converge in ogni punto. Per calcolare la somma é sufficiente utilizzare la formula per le serie geometriche. Si ha:

$$S(x) = x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{(2\cosh x)^A}}.$$

2. Il dominio della funzione é l'insieme

$$D = \{x \in I\!R : x \neq \pm 1\}.$$

Inoltre la f é positiva per $x \in]-1, 1[$, mentre é negativa se $|x| > 1$. Tenendo conto della paritá della funzione otteniamo facilmente

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\pi/2,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \pi/2.$$

Pertanto non ci sono asintoti verticali, mentre la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale. Non ci sono ovviamente asintoti obliqui. Calcoliamo ora la derivata prima in D. Si ha:

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + (1 - x^2)^2},$$

che si annulla soltanto per $x = 0$, é positiva se $x > 0$ e negativa se $x > 0$. Dunque il punto $x = 0$ é un punto di minimo relativo e risulta $f(0) = \pi/4$. Non vi sono altri punti critici. La f é poi crescente sugli intervalli $[0,1[$ e $]1,+\infty[$, mentre, per simmetria, é decrescente negli intervalli $]-\infty,-1[$ e $]-1,0]$. Determiniamo ora la derivata seconda. Risulta, per $x \in D$:

$$f''(x) = 2\frac{2+2x^2-3x^4}{(1+(1-x^2)^2)^2}.$$

Risolvendo, si ottengono due punti di flesso di ascissa rispettivamente $x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$ $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$. La funzione é convessa negli intervalli $]-1,1[$, $[-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}},-1[$ e $]1,\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}]$, mentre é concava in $]-\infty,-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}]$ e $[\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}},+\infty[$.

3. Per calcolare l'area dell'ellisse data, sfruttando le simmetrie, possiamo determinare l'area della parte contenuta nel primo quadrante e moltiplicare per 4. La parte di ellisse del primo quadrante é l'area sottesa dal grafico della funzione

$$f(x) = \pi\sqrt{1-\frac{x^2}{4\pi^2}}, \quad x \in [0,2\pi].$$

Si ha:

$$\begin{aligned} A &= 4\pi\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\frac{x^2}{4\pi^2}}dx = 8\pi^2\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt \\ &= 8\pi^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 v dv = 2\pi^3. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 08.06.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea___________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \log\left(1+\frac{1}{n^3}\right).$$

2. Studiare la funzione

$$f(x)=\sqrt{1-\log\frac{x^2}{x^2+1}}$$

determinando in particolare eventuali punti di massimo e minimo relativi (lo studio della derivata seconda é fcoltativo). Tracciarne poi il grafico.

3. Calcolare l'area della regione del piano definita da:

$$A=\{x\in I\!R : -1\le x\le 1, 0\le y\le \arcsin^2 x\}.$$

Svolgimento

1. La serie é a termini positivi. Utilizzando il limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(t+1)}{t} = 1,$$

si vede immediatemante che

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to+\infty} n^3 \log\left(1+\frac{1}{n^3}\right) = 1$$

e pertanto la serie é convergente per il criterio degli infinitesimi.

2. Il dominio della funzione é l'insieme $D = I\!R \setminus \{0\}$. Inoltre $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$, e non ci sono intersezioni con gli assi. La funzione é simmetrica rispetto all'asse y pertanto puó essere studiata soltanto per $x > 0$. Faremo comunque una trattazione generale.

Determiniamo ora gli eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty,$$

Quindi la retta $x = 0$ é un asintoto verticale per f. Inoltre:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1,$$

pertanto la retta $y = 1$ é un asintoto orizzontale. Non esistono pertanto asintoti obliqui.

Ora passiamo allo studio della derivata prima. Si ha, per $x \in D$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\log(x^2/(x^2+1))}} \frac{1}{x^3+x}.$$

La derivata prima é pertanto negativa se $x > 0$, mentre é positiva se $x < 0$. Quindi f é crescente se $x > 0$ ed é decrescente se $x > 0$. Non ci sono pertanto punti di massimo o minimo relativo. Determiniamo ora gli eventuali punti di flesso. Si ha in D :

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\log(x^2/(x^2+1))}} \frac{1}{(x^3+x)^2} \left[\frac{1}{1-\log(x^2/(x^2+1))} + 3x^2 + 1\right]$$

da cui si vede subito che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in D$. La funzione é quindi convessa negli intervalli

3. Occorre determinare l'integrale definito

$$I = \int_{-1}^{1} \arcsin^2 x dx.$$

Conviene anzitutto porre $t = \arcsin x$. Con tale sostituzione, si ha, integrando due volte per parti:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^2 \cos t dt = \left[t^2 \sin t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin t dt$$
$$= \frac{\pi^2}{2} - 4.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 24.06.2010

Cognome ____________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea__________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x},$$

determinando eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativi ed eventuali punti di flesso. Tracciarne poi il grafico.
(Suggerimento: per studiare il segno della derivata prima eseguire un semplice confronto grafico).

3. Calcolare l' area della regione del piano definita da

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \arctan\sqrt{x}\}.$$

Svolgimento

1. La serie é a segni alterni, dal momento che la funzione $\arcsin x$ é positiva per $0 < x \leq 1$. Tenendo conto del limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\arcsin t}{t} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

si vede immediatamente che la serie converge assolutamente. Infatti, utilizzando il criterio degli infinitesimi con $p = 3/2$ si ha:

$$\lim_{n\to +\infty} n^{3/2}|a_n| = \lim_{n\to +\infty} n^{3/2}\frac{1}{n} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} = 1.$$

La serie é pertanto anche convergente (semplicemente).

2. Il dominio della funzione é $D = I\!\!R$. Questo ci dice subito che non esistono asintoti verticali. Inoltre si vede immediatamente che $f(x) > 0$ se $x > 0$, mentre $f(x) > 0$ se $x < 0$. Inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Essendo

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0,$$

la retta $y = 0$ é asintoto orizzontale per f. Inoltre:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Determiniamo l'eventuale asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Si ha:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to +\infty} [f(x) - x] = 0,$$

pertanto la retta $y = x$ é asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Passiamo ora allo studio della derivata prima. Si ha:

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{2x} + xe^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}(e^x + x + 1).$$

Il segno della derivata é pertanto determinato da quello di e^x+x+1. Eseguendo un facile confronto grafico tra le funzioni $y = e^x$ e $y = -x-1$, si vede subito che esiste un solo punto $x_0 < 0$ per cui $f'(x_0) = 0$ ed inoltre che $f'(x) > 0$ se $x > x_0$ e $f'(x) < 0$ se $x < x_0$. Usando il teorema degli zeri si vede subito che yale punto x_0 appartiene all'intervallo aperto $]-2,-1[$. Infatti $f'(-2) < 0$, mentre $f'(-1) > 0$. La funzione é allora decrescente sull'intervallo $]-\infty, x_0[$ ed é crescente se $x > x_0$. Il punto x_0 é allora un punto di minimo relativo (anzi assoluto) e $f(x_0) < 0$. Non vi sono altri punti di estremo relativo.

Valutiamo ora la derivata seconda. Si ha:

$$f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^4}(2e^{2x} + 2 + 4e^x + x - xe^{3x}).$$

Facendo uno studio analogo a quello per la derivata prima, si deduce l'esistenza di due punti di flesso: un punto $x_1 < x_0$ e un altro $x_2 > 2$. Infatti, per esempio, nel caso di x_2, si ha $f''(2) > 0$, mentre $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = -\infty$, pertanto per il teorema degli zeri deve esistere un punto in $]2, +\infty[$ tale che $f''(x_2) = 0$. Infine, per completare lo studio, la f é concava per $x < x_1$ e per $x > x_2$, mentre é convessa in $[x_1, x_2]$.

3. Si tratta di calcolare il valore dell'integrale

$$A = \int_0^1 \arctan \sqrt{x} dx.$$

Eseguiamo subito la sostituzione $\sqrt{x} = t$. Si ha dunque, integrando poi per parti:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 2t \arctan t dt = \left[\frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt\right] \\ &= \left[\frac{\pi}{4} - \left(\int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt\right)\right] = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 8.07.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**_____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare, al variare di $x \in I\!R$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{n+1} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{3x}{1+x^2}\right)$$

determinando in particolare eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativi e eventuali punti di flesso. Tracciarne poi il grafico.

3. Calcolare la famiglia delle primitive della funzione

$$f(x) = \cos x \log(1 + 2\sin x)$$

nell'intervallo $[0, \pi]$. Determinare poi quella primitiva che si annulla per $x = \pi/2$.

Svolgimento

1. La serie é a termini di segno qualsiasi, quindi la studieremo inizialmente in valore assoluto. Intanto per $x = 0$ é immediato verificare che la serie converge (a 0), essendo tutti nulli i suoi termini. Se invece $x \neq 0$, applicando il criterio del rapporto alla serie assoluta, si ha:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{e(n+1)}{n(n+2)}|x|,$$

che tende a 0 per ogni $x \in I\!R$. Pertanto la serie converge assolutamente per ogni valore di x. Quindi essa é anche convergente per ogni $x \in I\!R$.

2. La funzione é definita su tutto l'asse reale, é positiva se $x > 0$, negativa se $x < 0$ e si annulla soltanto nel punto $x = 0$. Si puó inoltre osservare che essa é dispari. Non esitono ovviamente asintoti verticali, essendo la f limitata, mentre si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

quindi la retta $y = 0$ é l'unico asintoto orizzontale per la funzione. Non esistono asintoti oblliqui.

Esaminiamo la derivata prima. Si ha, per ogni $x \in I\!R$:

$$f'(x) = \frac{3 - 3x^2}{(1 + x^2)^2 + 9x^2},$$

che si annulla per $x = \pm 1$. Essendo $f'(x) > 0$ per $-1 < x < 1$ e $f'(x) < 0$ per $|x| > 1$, risulta che f é crescente sull'intervallo $[-1, 1]$, mentre decresce in $]-\infty, -1]$ e $[1, +\infty[$. I punti $x = -1$ e $x = 1$ sono quindi di minimo e massimo relativo (in tal caso anche assoluto). Risulta inoltre $f(-1) = \arctan(-3/2) = -\arctan(3/2)$ e $f(1) = \arctan(3/2)$. Calcoliamo ora la derivata seconda. Risulta, per ogni x :

$$f''(x) = \frac{6x(x^4 - 2x^2 - 12)}{((1 + x^2)^2 + 9x^2)^2}.$$

Essa si annulla per $x = 0, \quad \pm\sqrt{1 + \sqrt{13}}$. Utilizzando la disparitá della f si vede subito che f é concava sugli intervalli $]-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{13}}]$, $[0, \sqrt{1+\sqrt{13}}]$ e convessa nei rimanenti intervalli. I punti detti sono allora punti di flesso. Lo studio é completo.

3. Occorre determinare l'integrale indefinito di f, nell'intervallo indicato. Si ha, con la sostituzione $t = \sin x$ e successivamente integrando per parti:

$$\begin{aligned} & \int \cos x \log(1+2\sin x)dx = \int \log(1+2t)dt = t\log(1+2t) - 2\int \frac{t}{1+2t}dt \\ = \; & t\log(1+2t) - t + \frac{1}{2}\log(1+2t) + c \\ = \; & \sin x \log(1+2\sin x) + \frac{1}{2}\log(1+2\sin x) - \sin x + c. \end{aligned}$$

Per ottenere la primitiva che si annulla per $x = \pi/2$, basta sostituire per ottenere $c = 1 - \frac{3}{2}\log 3$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 14.09.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea___________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n^3+n}\right).$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{|x|}{x^2+x+1}\right),$$

determinando in particolare eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativi e eventuali punti di flesso. Tracciarne poi il grafico.

3. Determinare l'espressione della funzione integrale della funzione $g : [0,2] \to I\!R$, definita dalla:

$$g(x) = \begin{cases} \log(x+1), & x \in [0,1[\\ \dfrac{x^2}{x^2+1}, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

Svolgimento

1. La serie é a termini positivi. Pertanto possiamo applicare il criterio degli infinitesimi. Utilizzando il limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(t+1)}{t} = 1,$$

si ha facilmente, con $p = 5/2$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{5/2} \log\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n^3+n}\right) = 1$$

pertanto la serie risulta convergente essendo $5/2 > 1$.

2. Il dominio della funzione é l'insieme $D = I\!R^2 \setminus \{0\}$, poiché il denominatore della frazione nel logaritmo é sempre positivo. Scomponendo la funzione si ha:

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right), & x > 0 \\ \\ \log\left(\frac{-x}{x^2+x+1}\right), & x < 0. \end{cases}$$

Osserviamo subito che

$$\frac{|x|}{x^2+x+1} \leq 1,$$

per ogni $x \in D$ e vale l'uguaglianza solo se $x = -1$. Pertanto si ha $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in D$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = -1$. Il punto $x = -1$ é allora un punto di massimo assoluto per la f e tale massimo vale 0. Studiamo ora l'esistenza di eventuali asintoti. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty,$$

pertanto la retta $x = 0$ é un asintoto verticale, mentre non ci sono asintoti orizzontali. Non esistono nemmeno asintoti obliqui, in quanto risulta

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Passiamo ora allo studio delle derivate. Distinguiamo i casi $x > 0$ e $x < 0$. Per $x > 0$ risulta:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{x(x^2+x+1)},$$

che si annulla solo nel punto $x = 1$. Essendo $f'(x) < 0$ per $x > 1$ e $f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$, il punto $x = 1$ risulta un punto di massimo relativo e $f(1) = -\log 3$. Per $x < 0$, lo studio é analogo tenendo conto che l'espressione della derivata é la stessa. In tal caso $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -1$ e $f'(x) < 0$ per $-1 < x < 0$, mentre $f'(x) > 0$ per $x < -1$. Il punto $x = -1$ é un punto di massimo relativo e, come abbiamo giá visto, assoluto.

Determiniamo ora la derivata seconda. Per ogni $x \in D$ si ha:

$$f''(x) = \frac{x^4 - 4x^2 - 2x - 1}{(x^3+x^2+x)^2}.$$

Esiste una costante $M > 0$ tale che $f''(x) > 0$, per ogni $|x| > M$. Infatti il numeratore della frazione é positivo per $|x|$ sufficientemente grande. Questo ci dice che la funzione é convessa "vicino" a $\pm\infty$. Utilizzando il teorema degli zeri, si vede che esistono punti nei quali la derivata seconda é nulla. Per esempio nell'intervallo $[2, 3]$ e nell'intervallo $[-2, -1]$. Tali punti risultano di flesso. Non resta quindi che tracciare il grafico.

3. Utilizzando la definizione della funzione integrale della g :

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt,$$

si ha:

$$G(x) = \begin{cases} \int_0^x \log(t+1)dt, & x \in [0,1] \\ \\ \int_0^1 \log(t+1)dt + \int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt, & x \in [1,2] \end{cases}$$

da cui, eseguendo i facili integrali. Si ottiene

$$G(x) = \begin{cases} (x+1)\log(x+1) - x & x \in [0,1] \\ \\ x - \arctan x + 2\log 2 - 2 - \pi/4, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 10.12.2010

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea___________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Posto
$$f(x) = \frac{x^e}{e^x}$$
studiare il comportamento di f, determinando in particolare eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativi e eventuali punti di flesso. Tracciarne poi il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio precedente, determinare il comportamento della serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n).$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare la famiglia delle primitive della funzione
$$g(x) = \frac{1}{f(x)}\left(1 - \frac{e}{x}\right)$$
sull'intervallo $[e, +\infty[$.

Svolgimento

1. La funzione é definita nell'insieme $D = I\!R^+$ ed é non negativa. Per continuitá puo' essere estesa anche ad $x = 0$, ove si annulla. L'unica intersezione con gli assi é dunque l'origine. Non ci sono asintoti verticali. Determiniamo gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui. Si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

e quindi la f possiede un unico asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ che é l'asse delle x. Calcoliamo ora la derivata prima. Risulta facilmente:

$$f'(x) = \frac{e^x x^{e-1}(e-x)}{e^{2x}} = \frac{x^{e-1}(e-x)}{e^x}.$$

La derivata si annulla quindi per $x = e$, $f'(x) > 0$ se $0 < x < e$ e $f'(x) < 0$ se $x > e$. Quindi $x = e$ é un punto si massimo relativo e risulta $f(e) = 1$. Tale valore é anche il massimo assoluto della funzione. Studiamo ora l'esistenza della derivata destra nel punto $x = 0$. Eseguendo il limite del rapporto incrementale, si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \frac{x^e}{e^x} = 0,$$

pertanto la funzione é derivabile a destra in $x = 0$ con derivata nulla. Il punto $x = 0$ é evidentemente il punto di minimo assoluto.

Determiniamo ora la derivata seconda. Si ha:

$$f''(x) = \frac{x^{e-2}[x^2 - 2ex + e(e-1)]}{e^x}.$$

La derivata seconda si annulla allora nei punti $x = e \pm \sqrt{e}$, che risultano punti di flesso: infatti $f''(x) > 0$ per $0 < x < e - \sqrt{e}$ e $x > e + \sqrt{e}$, mentre é negativa per $e - \sqrt{e} < x < e + \sqrt{e}$. Lo studio é completo.

2. La serie é a segni alterni. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti. Posto $a_n = (-1)^n f(n)$, Risulta:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left(\frac{n+1}{n} \right)^e e^{-1},$$

e quindi $\lim_{n \to +\infty} |a_{n+1}/a_n| = e^{-1} < 1$. La serie é allora assolutamente convergente, quindi convergente.

3. Occorre determinare l'integrale indefinito della funzione g sull'intervallo $[e, +\infty[$. Si ha facilmente:

$$\int g(x)dx = \int e^{x-e\log x} d(x - e\log x) = \frac{1}{f(x)} + c.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 21.01.2011

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea___________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(1 + \frac{x^2 - x + 2}{4x}\right),$$

determinando eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativi ed eventuali punti di flesso. Tracciarne poi il grafico.
(Suggerimento: per studiare il segno della derivata seconda eseguire un semplice ragionamento basato sul teorema degli zeri).

2. Detta f la funzione dell'esercizio precedente e D il suo dominio, studiare il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nf(x)},$$

per $x \in D$. Determinare infine la somma nei punti di D ove essa comverge.

3. Determinare la famiglia delle primitive della funzione $g(x) = e^{f(x)}$ sull'intervallo $]0, +\infty[$.

Svolgimento

1. La funzione f puó essere scritta nella forma

$$f(x) = \log\left(1 + \frac{x^2 - x + 2}{4x}\right) = \log\frac{x^2 + 3x + 2}{4x}.$$

Il dominio della funzione é $D = I\!R^+ \cup]-2,-1[$. Inoltre si vede immediatamente che $f(x) > 0$ se $x > 0$ ed é negativa in $]-2,-1[$. Inoltre $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$.

Per quanto riguarda gli asintoti, si ha facilmente

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty.$$

Pertanto le rette $x = -2, x = -1, x = 0$ sono asintoti verticali per f. Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Determiniamo l'eventuale asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

pertanto non esitono asintoti obliqui.

Passiamo ora allo studio della derivata prima. Si ha, per $x \in D$:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x(x^2 + 3x + 2)}.$$

Ora se $x > 0$, $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \sqrt{2}$ e $f'(x) > 0$ se $x > \sqrt{2}$, e $f'(x) < 0$ se $0 < x < \sqrt{2}$. Quindi il punto $x = \sqrt{2}$ é un punto di minimo relativo, la f é crescente se $x > \sqrt{2}$, mentre decresce se $0 < x < \sqrt{2}$. Inoltre $f(\sqrt{2}) > 0$. Se invece $-2 < x < -1$, allora la funzione f é crescente se $-2 < x < -\sqrt{2}$ e decrescente se $-\sqrt{2} < x < -1$, mentre $f'(-\sqrt{2}) = 0$. Il punto $x = -\sqrt{2}$ é un punto di massimo relativo e $f(-\sqrt{2}) < 0$.

Determiniamo ora la derivata seconda. Si ha, per $x \in D$,

$$f''(x) = \frac{-x^4 + 8x^2 + 12x + 4}{(x^3 + 3x^2 + 2x)^2}.$$

Dallo studio precedente e dall'espressione di f'' si capisce subito che la f é concava in $]-2,-1[$. Inoltre, utilizzando il teorema degli zeri, se $x > 0$, si vede che esiste uno zero $\overline{x}$ di f'' nell'intervallo $]3,4[$. Tale punto é di flesso e f é convessa per $x \in]0,\overline{x}[$, mentre é concava per $x > \overline{x}$.

2. Si faccia attenzione al fatto che lo studio é richiesto solo per i punti di D, dominio della funzione dell'esercizio 1. La serie si scrive nella forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nf(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2+3x+2}{4x} \right)^n,$$

per $x \in D$. Pertanto la serie é di tipo geometrico, di ragione

$$R = \frac{x^2+3x+2}{4x}.$$

Osserviamo anzitutto che in D la ragione é sempre positiva, quindi la serie é convergente se e solo se

$$0 < \frac{x^2+3x+2}{4x} < 1,$$

cioé se e solo se $-2 < x < -1$, mentre diverge se $x > 0$. Per $x \in]-2,-1[$ la somma si calcola con la nota formula per le serie geometriche. Risulta

$$S = R\frac{1}{1-R} = \frac{x^2+3x+2}{x-x^2-2}.$$

3. Si tratta di calcolare l'integrale indefinito (per $x > 0$)

$$I = \int \frac{x^2+3x+2}{4x} dx.$$

Si ha immediatamente

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2+3x+2}{4x} dx = \int \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2x} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{8} + \frac{3x}{4} + \frac{\log x}{2} + c. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 11.02.2011

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea___________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-\frac{|x^2-1|}{x}},$$

determinando eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativi ed eventuali punti di flesso. Tracciarne poi il grafico.

2. Assegnata la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n + 2) \sin(1/n^\alpha),$$

determinare i valori del parametro $\alpha > 0$ per i quali essa converge.

3. Detta f la funzione dell'esercizio 1, determinare l'integrale definito

$$\int_1^2 f(x)(1 + \frac{1}{x^2})dx.$$

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é $D = I\!R \setminus \{0\}$ ed inoltre $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$. Non ci sono intersezioni con gli assi. Determiniamo gli eventuali asintoti. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty.$$

La retta $x = 0$ é un asintoto verticale e $y = 0$ é un asintoto orizzontale (per $x \to +\infty$). Valutiamo l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to -\infty$. Si ha:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x} e^{1/x}}{x} = -\infty,$$

pertanto non esitono asintoti obliqui.

Passiamo ora allo studio della derivata prima. Conviene scrivere la funzione nella forma:

$$f(x) = \begin{cases} e^{(1-x^2)/x}, & x \geq 1, \ x \leq -1 \\ e^{(x^2-1)/x}, & -1 \leq x \leq 1, \ x \neq 0. \end{cases}$$

La derivata prima di f é data allora da:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{(1-x^2)/x} \, \dfrac{1+x^2}{x^2}, & x > 1, \ x < -1 \\ \\ e^{(x^2-1)/x} \, \dfrac{1+x^2}{x^2}, & -1 < x < 1, \ x \neq 0. \end{cases}$$

Da ció si vede subito che $f'(x) < 0$ se $x > 1$ e $x < -1$, quindi in tali intervalli la funzione é decrescente, mentre negli intervalli $[-1, 0[$ e $]0, 1]$ é crescente. Valutiamo ora l'esistenza della derivata nei punti ± 1. Si ha:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1}(e^{(x^2-1)/x} - 1) = 2,$$

mentre

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = -2.$$

Pertanto nel punto $x = -1$ non esiste la derivata. Analogamente per $x = 1$, si ha che $f'_+(1) = -2$, mentre $f'_-(1) = 2$. Il punto $x = -1$ é un minimo relativo con $f(-1) = 1$, mentre $x = 1$ é un massimo relativo (con $f(1) = 1$). É utile anche studiare il comportamento della derivata prima, in prossimitá dell' origine. Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0,$$

pertanto il grafico "esce" dall'origine in modo tangenziale rispetto all'asse x. Studiamo ora la derivata seconda. Si ha:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^{(1-x^2)/x}}{x^4}((1+x^2)^2 + 2x), & x > 1,\ x < -1 \\ \\ \frac{e^{(x^2-1)/x}}{x^4}((1+x^2)^2 - 2x), & -1 < x < 1,\ x \neq 0. \end{cases}$$

Da ció si vede che il segno della derivata seconda é determinato dai termini $(x^2+1)^2 + 2x$ e $(x^2+1)^2 - 2x$. Da un facile confronto grafico si vede subito che $f''(x) > 0$ per ogni $x \neq 0, 1, -1$. Quindi la f é convessa in $x < 0$, $x \in]0, 1]$ e $x \geq 1$. Non ci sono pertanto flessi. Lo studio é completo.

2. La serie é a termini positivi, pertanto converge o diverge. Applicando il criterio degli infinitesimi, risulta che

$$\lim_{n \to +\infty} n^p (n^2 + n + 2) \sin(1/n^\alpha) = \ell \geq 0$$

solo se $p = \alpha - 2$. Perció la serie converge se $\alpha > 3$.

3. Si tratta di calcolare l'integrale definito

$$I = \int_1^2 e^{(1-x^2)/x} (1 + 1/x^2) dx.$$

Si ha immediatamente

$$I = -\int_1^2 e^{(1-x^2)/x} d(\frac{1-x^2}{x}) dx = -\left[e^{(1-x^2)/x}\right]_1^2 = 1 - e^{-3/2}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 29.04.2011

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea____________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x}),$$

determinando dominio, segno, asintoti, crescenza, decrescenza ed eventuali punti di massimo o minimo. Tracciarne poi il grafico.

2. Assegnata la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n} + 1},$$

studiarne la convergenza semplice ed assoluta.

3. Calcolare la famiglia delle primitive della funzione $f(x) = \log\sqrt{x^4 - 1}$, per $x \geq 2$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione si ricava dalle disuguaglianze $x \geq 0$, $x \geq \sqrt{2}$ e $\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x} > 0$, da cui si deduce facilmente $D =]2, +\infty[$. Inoltre $f(x) = 0$ per ogni $x \in D$ tale che $\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x} = 1$. Tale equazione non é facilmente risolvibile, tuttavia si vede facilmente, usando il teorema degli zeri, che esiste uno zero della funzione, x_0 nell'intervallo $]3, 4[$. Lo studio successivo della derivata, confermerá che questo é l'unico zero della funzione. Si ha inoltre $f(x) > 0$ se $x > x_0$ e $f(x) < 0$ se $x \in]2, x_0[$. Determiniamo gli eventuali asintoti. Si ha:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

La retta $x = 2$ é un asintoto verticale e non esistono asintoti orizzontali. Valutiamo l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Essendo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

non esitono asintoti obliqui.

Passiamo ora allo studio della derivata prima. Si ha:

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x^2-2}}{2\sqrt{x}\sqrt{x^2-2}(\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x})}$$

Da ció si vede subito che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 2$ quindi la funzione é sempre crescente in D.

2. La serie é a segni alterni. La serie assoluta é data dalla:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}+1}$$

e siccome risulta facilmente

$$\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}+1} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}+1} \leq \frac{1}{n^{3/2}},$$

la serie é convergente assolutamente, perché converge la serie di termine generale $n^{-3/2}$. Pertanto la serie data converge anche semplicemente.

3. Si tratta di calcolare l'integrale indefinito, con $x \geq 2$,

$$I = \int \log \sqrt{x^4 - 1} dx.$$

Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned} I &= x \log \sqrt{x^4 - 1} - 2 \int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx = x \log \sqrt{x^4 - 1} - 2x - 2 \int \frac{1}{x^4 - 1} dx \\ &= x \log \sqrt{x^4 - 1} - 2x - \left[\int \frac{1}{x^2 - 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \right] \\ &= x \log \sqrt{x^4 - 1} - 2x - \left[\log \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} - \arctan x \right] + c \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 10.06.2011

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea___________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = e^{-x}(x^3 + 2),$$
determinando eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativi ed eventuali punti di flesso. Tracciarne poi il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio precedente, studiare il comportamento della serie numerica:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f(n).$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio [1], determinare l'integrale improprio:
$$\int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é $D = I\!\!R$. La funzione si annulla nel punto $x_0 = -\sqrt[3]{2}$ ed é positiva per $x > x_0$ e negativa per $x < x_0$. Inoltre $f(0) = 2$. Non ci sono ovviamente asintoti verticali. Studiamo allora eventuali asintoti orizzontali od obliqui. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

pertanto $y = 0$ é un asintoto orizzontale. Essendo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

non esistono asintoti obliqui.

Passiamo ora allo studio della derivata prima. Si ha facilmente

$$f'(x) = e^{-x}(-x^3 + 3x^2 - 2) = -e^{-x}(x-1)(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3})$$

e pertanto f' si annulla nei punti $x = 1$ e $1 \pm \sqrt{3}$. Da un facile studio del segno, si deduce che i punti $x = 1 \pm \sqrt{3}$ sono punti di massimo relativo, mentre il punto $x = 1$ é un minimo relativo. Per quanto riguarda la derivata seconda si ha:

$$f''(x) = e^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x + 2)$$

e dallo studio precedente si ricava l'esistenza di un punto di flesso tra $1 - \sqrt{3}$ e 1, tra 1 e $1 + \sqrt{3}$ e per $x > 1 + \sqrt{3}$.

2. La serie é a segni alterni ed é data da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3 + 2}{e^n}.$$

Si vede immediatamente che

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} \frac{n^3 + 2}{e^n} = 0,$$

per ogni $\alpha > 0$, pertanto la serie converge assolutamente per il criterio degli infinitesimi: basta scegliere per esempio $\alpha = 2$. Pertanto la serie di partenza converge.

3. Si tratta di calcolare il limite:

$$I = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t}(t^3 + 2)dt.$$

Si ha, integrando per parti tre volte,

$$\int_0^x e^{-t}(t^3 + 2)dt = 8 - e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 8),$$

pertanto $I = 8$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio e Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 24.06.2011

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di Laurea___________________________ **Matricola**_____________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \log \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$
determinando eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativi ed eventuali punti di flesso. Tracciarne poi il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio precedente, studiare il comportamento della serie numerica:
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{n}.$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio [1], determinare la primitiva di f che si annulla nel punto $x = 2$.

Svolgimento

1. Il dominio D é l'insieme dei punti tali che $(x+1)/(x-1) > 0$, cioé

$$D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

E' inoltre facile vedere che f non si annulla mai in D e $f(x) > 0$ se $x > 1$, mentre $f(x) < 0$ se $x < -1$.

Detrminiamo gli eventuali asintoti. Si ha:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty,$$

pertanto le rette $x = \pm 1$ sono asintoti verticali per f. Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

e quindi la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale. Non ci sono asintoti obliqui.

Calcoliamo ora la derivata prima. Scrivendo la funzione nella forma

$$f(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1},$$

si vede immediatamente che per ogni $x \in D$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2-1}.$$

La derivata quindi non si annulla mai in D, pertanto non esistono punti di massimo e minimo né relativo né assoluto. La f é inoltre decrescente in $]-\infty, -1[$ e in $]1, +\infty[$.

Infine, per la derivata seconda si ha

$$f''(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2},$$

e quindi non esistono punti di flesso e la funzione f é convessa per $x > 1$ e concava per $x < -1$.

Il grafico é ora facilmente deducibile.

2. La serie é a termini positivi perché $(n+1)/(n-1) > 1$, per ogni $n \geq 2$. Essa si puó scrivere:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(n)}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{2}{n-1}\right).$$

Applicando il criterio degli infinitesimi con $p = 2$, utilizzando il limite notevole

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1,$$

ed indicato con a_n il termine generale della serie, risulta

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 a_n = \frac{1}{2} \lim_{n \to +\infty} n \log\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) = 1.$$

La serie é quindi convergente.

3. Determiniamo anzitutto l'integrale indefinito di f per $x > 1$. Si ha, integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \frac{1}{2}\left[(x-1)\log\frac{x+1}{x-1} + \int \frac{2x}{x^2-1}dx\right] \\ &= \frac{1}{2}(x-1)\log\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{2}\log(x^2-1) + c. \end{aligned}$$

Per cercare la primitiva richiesta basta imporre $P(2) = 0$, per ottenere $c = -\log 3$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 09.09.2011

Cognome ____________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea__________________________ **Matricola**_________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il comportamento della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{3^n} \sin n^2.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = x \log x$$

specificando esattamente dominio, segno, intersezioni con assi, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

3. Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} x \sin^2 x dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\cos x| dx.$$

Quale integrale rappresenta l'area e perché?

Svolgimento

1. La serie converge assolutamente. Infatti, eseguendo un facile confronto, si ha

$$|\frac{n^6}{3^n}\sin n^2| \le \frac{n^6}{3^n}$$

e per il criterio del rapporto applicato alla serie maggiorante,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^6}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n^6} = \frac{1}{3}.$$

Pertanto segue facilmente la convergenza assoluta e quindi anche quella semplice.

2. Calcoliamo il dominio della funzione. Si ha $x > 0$. Poiché il fattore x risulta sempre strettamente positivo il segno é dato dalla funzione logaritmo e quindi $f(x) > 0 \leftrightarrow x > 1$. Inoltre $f(x) = 0 \leftrightarrow x = 1$. Valutiamo la funzione agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

inoltre

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Quindi non ci sono asintoti verticali o orizzontali. La funzione non ha asintoti obliqui perché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Per quanto riguarda la derivata prima si ha

$$f'(x) = 1 + \log x,$$

quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1/e$ e la f risulta crescente in $[1/e, +\infty[$ e decrescente in $]0, 1/e]$. Dunque $x = 1/e$ é un punto di minimo relativo (anzi, assoluto) e si ha $f(1/e) = -1/e$. Infine essendo $f''(x) = 1/x$, la f risulta sempre convessa nel suo dominio. Lo studio é completo.

3. Per il primo integrale, calcoliamo anzitutto la famiglia delle primitive Si ha, integrando per parti,

$$
\begin{aligned}
& \int x \sin^2 x dx = \int x \sin x \sin x dx = \int x \sin x (-\cos x)' dx \\
= \quad & -x \sin x \cos x + \int \cos x (\sin x + x \cos x) dx \\
= \quad & -x \sin x \cos x + \int \cos x \sin x + \int x \cos^2 x dx \\
= \quad & -x \sin x \cos x + \frac{1}{2} \int \sin 2x dx + \int x(1 - \sin^2 x) dx \\
= \quad & -x \sin x \cos x + \frac{1}{2}(-\frac{\cos 2x}{2}) + \int x dx - \int x \sin^2 x dx \\
= \quad & -x \sin x \cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{x^2}{2} - \int x \sin^2 x dx,
\end{aligned}
$$

da cui

$$\int x \sin^2 x dx = -\frac{x}{2} \sin x \cos x - \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{x^2}{4}.$$

Quindi

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} x \sin^2 x dx = \left[-\frac{x}{2} \sin x \cos x - \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{x^2}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi} = \frac{3}{16}\pi^2 - \frac{1}{4}.$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, tenendo conto del segno della funzione $\cos x$ si ha facilmente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos x| dx = 4 \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 4.$$

Il primo integrale non rappresenta un' area, perché la funzione integranda é di segno variabile (l'area individuata dal grafico e dall'asse x, si determina calcolando l'integrale del modulo della funzione). Il secondo invece rappresenta l'area della regione del piano sottesa dal grafico del modulo di $|\cos x|$ che é non negativa.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 12.01.2012

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il comportamento della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(n\pi) \tan \frac{\cos^{2n}(n\pi)}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

2. Assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2|x|+1}},$$

studiarne il comportamento, determinando in particolare, dominio, segno, asintoti, dominio della derivata, eventuali massimi, minimi e punti di flesso. Tracciarne infine il grafico.

3. Calcolare l'area della regione delimitata dal grafico della f sull'intervallo $[0, 1]$.

Svolgimento

1. Si ha $(-1)^{n+1}\cos(n\pi)\tan\frac{\cos^{2n}(n\pi)}{\sqrt[3]{n^2}} = -\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\tan\frac{(-1)^{2n}}{\sqrt[3]{n^2}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

Possiamo allora studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ che é a termini positivi, infatti $0 < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < \pi/2$ per ogni $n \in I\!N$. Possiamo allora applicare il criterio degli infinitesimi

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

e quindi la serie diverge e la serie iniziale diverge a $-\infty$.

2. Calcoliamo il dominio della funzione. Poiché il denominatore risulta sempre strettamente positivo il dominio é tutto $I\!R$. Inoltre il segno della funzione risulta essere sempre positivo e la funzione é pari, quindi possiamo studiarla solo per le $x > 0$. In questo caso la funzione vale

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{(x+1)^2}} = \frac{x^2+1}{x+1}.$$

Non ci sono asintoti verticali. Per quanto riguarda gli asintoti orizzontali si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_(x)}{x} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x+1} - x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{x+1} = -1.$$

Si ha quindi un asintoto obliquo $y = x - 1$. Per quanto riguarda la derivata prima si ha, per $x > 0$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}.$$

La derivata si annulla per $x_1 = \sqrt{2} - 1$ ed é positiva per $x > \sqrt{2} - 1$, mentre é negativa se $0 < x < \sqrt{2}-1$. Pertanto $x_1 = \sqrt{2}-1$ é un punto di minimo (assoluto), la f é crescente per $x > \sqrt{2}-1$, mentre é decrescente in $]0, \sqrt{2} - 1[$. Per simmetria, la f é crescente anche in $]1 - \sqrt{2}, 0[$ e decrescente per $x < 1 - \sqrt{2}$. Allora anche il punto $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ é un minimo assoluto per la funzione e risulta $f(x_1) = f(x_2) = 2(\sqrt{2} - 1)$. Esaminiamo ora il punto zero. Essendo $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1$, per simetria si dovrá avere anche $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$, e pertanto la funzione non é derivabile nel punto $x = 0$. Ma tale punto é un massimo relativo e si ha $f(0) = 1$. In conclusione, la f possiede un massimo relativo in $x = 0$ e due minimi assoluti nei punti x_1, x_2. Esaminiamo ora la derivata seconda. Per $x > 0$ si ha:

$$f''(x) = \frac{4x + 4}{(x + 1)^4} = 4\frac{1}{(x + 1)^3},$$

che é sempre positiva per $x > 0$. La f é allora convessa per $x > 0$ e pertanto per simmetria lo é anche per $x < 0$. Non esistono punti di flesso. Lo studio é allora completo.

3. Si tratta di calcolare l'integrale definito $A = \int_0^1 f(x)dx$. Si ha:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2|x| + 1}}dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x + 1}dx = \int_0^1 (x - 1 + \frac{2}{x + 1})dx \\ &= [\frac{x^2}{2} - x + 2\log(x + 1)]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + 2\log 2 = 2\log 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 09.02.2012

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Assegnata la funzione
$$f(x) = \log \sqrt{\frac{|x|}{1+x}},$$
studiarne il comportamento, determinando in particolare, dominio, segno, asintoti, dominio della derivata, eventuali massimi, minimi e punti di flesso. Tracciarne infine il grafico.

1. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare il comportamento della seguente serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}.$$

3. Calcolare l'integrale definito della funzione f sull'intervallo $[-1/2, -1/4]$.

Svolgimento

1. Per determinare il dominio della funzione dobbiamo porre $x \neq -1$ e $x \neq 0$, inoltre deve risultare $\frac{|x|}{x+1} > 0$. Il dominio allora risulta essere $x > -1$ con $x \neq 0$. Discutendo il valore assoluto, la funzione risulta essere

$$f(x) = \begin{cases} \log \sqrt{\frac{x}{x+1}} & x > 0 \\ \log \sqrt{\frac{-x}{x+1}} & -1 < x < 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il segno, se $x > 0$ poiché $0 < \frac{x}{x+1} < 1$ risulta sempre $f(x) < 0$, se invece $-1 < x < 0$ si ha $f(x) > 0 \leftrightarrow -1 < x < -1/2$. Inoltre $f(-\frac{1}{2}) = 0$. Determiniamo gli asintoti. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to 0^-} \log \sqrt{\frac{-x}{x+1}} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to -1^+} \log \sqrt{\frac{-x}{x+1}} = +\infty.$$

Quindi si ha un asintoto orizzontale $y = 0$ e due asintoti verticali $x = 0$ e $x = -1$. Studiamo la derivata prima. Per $x > 0$ si ha $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x(x+1)}$ quindi la derivata non si annulla mai e risulta sempre positiva, allora per $x > 0$ la funzione é sempre crescente. Se invece $-1 < x < 0$ si ha come prima $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x(x+1)}$ e in questo caso il segno é sempre negativo, quindi la funzione decresce sempre. Non ci sono quindi punti di massimo o minimo relativo. Per quanto riguarda la derivata seconda si ha $f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ Quindi $f''(x) < 0 \to x > -\frac{1}{2}$ e si ha un punto di flesso in $x = -\frac{1}{2}$.

2. Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \sqrt{\frac{n}{1+n}}}{n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(\frac{n}{1+n})}{n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(\frac{n+1}{n})^{-1}}{n} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(\frac{n+1}{n})}{n}$$

$$= \quad -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n}$ é a termini positivi e possiamo studiarla con il criterio degli infinitesimi. Con $p = 2$ si ha

$$n^2 \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{n} = n \log(1 + \frac{1}{n}) = \log(1 + \frac{1}{n})^n$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} \log(1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

quindi la serie é convergente.

3. Si ha

$$\begin{aligned} & \int_{-1/2}^{-1/4} \log \sqrt{\frac{-x}{x+1}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{-1/4} \log(\frac{-x}{x+1}) dx = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{-1/4} (x)' \log(\frac{-x}{x+1}) dx \\ = \; & \frac{1}{2}[x \log(\frac{-x}{x+1})]_{-1/2}^{-1/4} - \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{-1/4} x \frac{1}{x(x+1)} dx \\ = \; & \frac{1}{2}[-\frac{1}{4} \log(\frac{1}{3})] - \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{-1/4} \frac{1}{x+1} dx = -\frac{1}{8} \log(\frac{1}{3}) - \frac{1}{2}[\log(x+1)]_{-1/2}^{-1/4} \\ = \; & \frac{1}{8} \log 3 - \frac{1}{2}(\log \frac{3}{4} - \log \frac{1}{2}) = -\frac{3}{8} \log 3 + \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 07.06.2012

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = x - 3\arctan x$$
specificando in particolare dominio, asintoti, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare il comportamento della seguente serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n^2}).$$

3. Calcolare l'area della regione sottesa dal grafico della funzione f dell'esercizio 1 sull'intervallo $[6, 10]$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é ovviamente tutto l'asse reale $D = I\!R$. Il grafico della funzione interseca l'asse delle ascisse nel punto zero $f(0) = 0$ e in altri due punti simmetrici rispetto all'origine, $x_1 > 0$ e $-x_1 < 0$ (si osservi che la funzione é dispari, essendo combinazione di funzioni dispari). Non esistono asintoti verticali e neppure orizzontali poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Verifichiamo l'esistenza di asintoti obliqui. Essendo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = \mp 3\pi/2,$$

otteniamo due asintoti obliqui, $y = x - 3\pi/2$ per $x \to +\infty$ e $y = x + 3\pi/2$ per $x \to -\infty$. Passiamo ora allo studio delle derivate. Si ha:

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2+1} = \frac{x^2-2}{x^2+1}.$$

Tale derivata si annulla nei punti $x = \pm\sqrt{2}$, é positiva se $x < -\sqrt{2}$ e $x > \sqrt{2}$, mentre é negativa se $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Pertanto $x = -\sqrt{2}$ é un massimo relativo e $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + 3\arctan\sqrt{2} > 0$, mentre $x = \sqrt{2}$ é un minimo relativo e $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 3\arctan\sqrt{2} < 0$. Calcoliamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{6x}{(x^2+1)^2}.$$

Tale derivata si annulla se $x = 0$ é positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Allora $x = 0$ é un punto di flesso, la f é concava per $x < 0$ e convessa per $x > 0$.

2. Utilizziamo il teorema sulla somma di serie. Scriviamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} 3\arctan\frac{1}{n^2}.$$

La prima é ovviamente convergente, essendo una serie armonica generalizzata con esponente 2, mentre per la seconda (a termini positivi), sapendo che

$$\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1,$$

risulta:
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 3 \arctan\frac{1}{n^2} = 3,$$
e quindi risulta anch'essa convergente per il criterio degli infinitesimi, con $p = 2$.

3. Siccome per $x > 6$ la funzione é sempre positiva (come é facile verificare), l'area si calcola con l'integrale definito di f sull'intervallo $[6, 10]$. Si ha:
$$\begin{aligned} A &= \int_6^{10} (x - 3\arctan x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\arctan x + \frac{3}{2}\log(x^2+1)\right]_6^{10} \\ &= 32 - 30\arctan 10 + 18\arctan 6 + \frac{3}{2}\log\frac{101}{37}. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 21.06.2012

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \log(x + \sqrt{1 - x^2})$$
specificando in particolare dominio, segno, intersezioni con gli assi, asintoti, massimi e minimi e disegnandone infine il grafico (si puó trascurare lo studio della derivata seconda).

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, dopo aver calcolato il limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x},$$
studiare il comportamento della seguente serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n}).$$

3. Calcolare l'integrale definito
$$\int_0^{1/2} \log \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Svolgimento

1. Il dominio di f si ottiene risolvendo le disequazioni $1 - x^2 \geq 0$ e $x + \sqrt{1-x^2} > 0$, ottenendo cosí l'insieme soluzione $]-1/\sqrt{2}, 1]$. La funzione non puó avere quindi asintoti orizzontali od obliqui. Inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ ed $x = 1$, punti che costituiscono quindi le intersezioni con gli assi. La funzione é inoltre positiva se $x > 0$, negativa se $x < 0$, nei punti del suo dominio, come é facile verificare risolvendo la disequazione $x + \sqrt{1-x^2} > 1$. Inoltre essendo

$$\lim_{x \to -(1/\sqrt{2})^+} f(x) = -\infty,$$

la funzione ha l'asintoto verticale $x = -1/\sqrt{2}$.

Passiamo ora allo studio della derivata prima. Risulta:

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}} \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Questa derivata é positiva sull'intervallo $]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$ ed é negativa in $]1/\sqrt{2}, 1[$. Il punto $x = 1/\sqrt{2}$ é dunque un massimo relativo (anzi, assoluto) e $f(1/\sqrt{2}) = (\log 2)/2$. Per completare lo studio della derivata prima, osserviamo anche che

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty,$$

il che implica che il grafico della funzione "esce" dal punto $x = 1$ con tangente verticale. Si osservi che il punto $x = 1$ é un punto di minimo relativo (non interno).

2. E' immediato verificare (per esempio con il teorema dell' Hospital) che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Pertanto risulta anche

$$\lim_{n \to +\infty} n \log\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) = 1.$$

Inoltre siccome $1/n$ appartiene all'intervallo $]0, 1]$, la serie é a termini positivi e quindi applicando il criterio degli infinitesimi si ottiene che la serie é divergente.

3. Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}\int \log\sqrt{1-x^2}dx &= \frac{1}{2}\int \log(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\Big[x\log(1-x^2) + \int \frac{2x^2}{1-x^2}\Big] \\ &= \frac{1}{2}(x\log(1-x^2) - 2x - \log|1-x| + \log|1+x| + c\end{aligned}$$

che costituisce la famiglia delle primitive. L'integrale definito richiesto I vale

$$I = \frac{1}{4}\log\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} = \frac{3}{4}\log 3 - \frac{1}{4}\log 4 - \frac{1}{2}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 06.07.2012

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = x - \log(1 - \frac{1}{x})$$

specificando in particolare dominio, asintoti, massimi, minimi, segno della funzione, flessi e disegnandone infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, si consideri la seguente serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(\sqrt{n})}{n^2}.$$

Dire se essa é a termini positivi ed infine studiarne il comportamento.

3. Determinare la primitiva $P(x)$ della funzione f dell'esercizio 1, tale che

$$\lim_{x \to 1^+} P(x) = 2.$$

Svolgimento

1. Il dominio di f si ottiene risolvendo la disequazione $1 - 1/x > 0$ ottenendo cosí l'insieme $D =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Per il segno della funzione, conviene prima studiare i limiti e derivate. Si ha:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty,$$

Pertanto la funzione ha gli asintoti verticali $x = 0,\ x = 1$ e non ha asintoti orizzontali. Verifichiamo ora l'esistenza di asintoti obliqui. Risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\log(1 - \frac{1}{x}) = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = -\lim_{x\to\pm\infty} \log(1 - \frac{1}{x}) = 0.$$

Pertanto la funzione ha l'asintoto obliquo $y = x$ per $x \to \pm\infty$.

Passiamo ora allo studio della derivata prima. Risulta:

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x(x-1)},$$

che in D risulta positiva se $x > (1 + \sqrt{5})/2$ e $x < (1 - \sqrt{5})/2$ ed é negativa altrove. Il punto $x_0 = (1-\sqrt{5})/2$ é quindi un massimo relativo e risulta facilmente $f(x_0) < 0$, mentre $x_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ é un minimo relativo con $f(x_0) > 0$.. Questo implica che la funzione é positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 0$. Studiamo ora la derivata seconda. Si ha:

$$f''(x) = \frac{2x - 1}{x^2(x-1)^2},$$

che é positiva se $x > 1$ ed é negativa se $x < 0$. La funzione f é quindi convessa in $]1, +\infty[$ ed é concava in $]-\infty, 0[$. Non ci sono punti di flesso.

2. Dallo studio della funzione, segue subito che la serie é ben definita e a termini positivi, essendo $\sqrt{n} > 1$ se $n \geq 2$. Tenendo conto che la successione $\log(1 - 1/\sqrt{n})$ é limitata inferiormente da $\log(1 - 1/\sqrt{2})$, per $n \geq 2$, utilizzando l'ovvio confronto

$$\frac{f(\sqrt{n})}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n} - \log(1 - 1/\sqrt{2})}{n^2} \leq \frac{C}{n^{3/2}},$$

con $C > 0$ costante opportuna, la convergenza della serie data segue subito dalla convergenza della serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

3. La famiglia delle primitive si calcola con l'integrale indefinito di f,$(x > 1)$. Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \frac{x^2}{2} - \int \log(1 - \frac{1}{x})dx \\
&= \frac{x^2}{2} - x\log(1 - \frac{1}{x}) + \int \frac{1}{x-1}dx \\
&= \frac{x^2}{2} - x\log(1 - \frac{1}{x}) + \log(x-1) + c \\
&= \frac{x^2}{2} - (x-1)\log(x-1) + x\log x + c.
\end{aligned}$$

Per trovare la primitiva richiesta, é sufficiente passare al limite per $x \to 1^+$ ed ottenere $c = 3/2$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 13.09.2012

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+\log n}.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x)=\sqrt{x^2-x^3}+x-1$$

specificando esattamente dominio, segno, intersezioni con assi, asintoti, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

3. Calcolare

$$\int_0^2 \frac{e^x \log(1+e^x)}{1+e^x}dx.$$

Svolgimento

1. La serie é a segni alterni e non converge assolutamente. Infatti si ha

$$\left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+\log n}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}+\log n} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che é una serie divergente. Per quanto riguarda la convergenza semplice utilizziamo il criterio di Leibnitz. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\log n} = 0.$$

Inoltre poiché per ogni $n \in I\!N$ $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ e $\log(n+1) > \log n$ si ha

$$\sqrt{n+1}+\log(n+1) > \sqrt{n}+\log n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\log(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n}+\log n}.$$

Pertanto la serie converge semplicemente.

2. Calcoliamo il dominio della funzione. Deve essere

$$x^2 - x^3 \geq 0 \to x^2(1-x) \geq 0 \to 1 \geq x.$$

Quindi il dominio D é dato da $D =]-\infty, 1]$. Per quanto riguarda le intersezioni con gli assi si ha $f(0) = -1$ e

$$f(x) = 0 \leftrightarrow \sqrt{x^2 - x^3} = 1 - x$$

e quindi, poiché $1 - x \geq 0$

$$x^2 - x^3 = (1-x)^2 \leftrightarrow x^2(1-x) - (1-x)^2 = 0 \leftrightarrow (1-x)(x^2 - 1 + x) = 0$$

le cui soluzioni sono $x = 1, x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Il segno é dato da

$$f(x) > 0 \leftrightarrow \sqrt{x^2 - x^3} > 1 - x$$

e quindi poiché $1 - x \geq 0$

$$x^2 - x^3 \geq (1-x)^2 \leftrightarrow x^2(1-x) - (1-x)^2 \geq 0 \leftrightarrow (1-x)(x^2 - 1 + x) \geq 0$$

da cui

$$x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x \leq 1.$$

Non ci sono asintoti verticali, inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x^3}}{x} + 1 - \frac{1}{x} = -\infty.$$

Quindi non ci sono asintoti di nessun tipo. Per quanto riguarda la derivata prima si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x^3)^{-1/2}(2x - 3x^2) + 1 = \frac{1}{2}\frac{x}{|x|}\frac{2-3x}{\sqrt{1-x}} + 1,$$

quindi la derivata prima esiste senz'altro per $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Inoltre si ha

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty$$

quindi in $x = 1$ si ha un punto a tangente verticale, inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

e quindi in $x = 0$ si ha un punto angoloso. Per quanto riguarda lo studio della derivata prima si ha

$$f'(x) = 0 \to \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}} + 1 = 0 \to 2x - 3x^2 = -2\sqrt{x^2 - x^3}.$$

Se $2x - 3x^2 > 0$ non ci sono soluzioni quindi deve essere contemporaneamente

$$2x - 3x^2 < 0, \quad (2x - 3x^2)^2 = 4(x^2 - x^3)$$

da cui $x^2(2 - 3x)^2 = 4x^2(1 - x)$ e poiché $x \neq 0$ si ha come soluzione $x = \frac{8}{9}$. Inoltre abbiamo

$$f'(x) \geq 0 \to 2x - 3x^2 \geq -2\sqrt{x^2 - x^3}.$$

In questo caso se $2x - 3x^2 \geq 0 \to 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ é sempre vero, se invece $2x - 3x^2 < 0$ possiamo elevare al quadrato e ottenere

$$(2x-3x^2)^2 \leq 4(x^2-x^3) \to (2-3x)^2 \leq 4(1-x) \to 9x^2-8x \leq 0 \to \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{8}{9}.$$

Complessivamente si ha

$$f'(x) \geq 0 \to 0 \leq x \leq \frac{8}{9}$$

dove la funzione risulta crescente e quindi $x = 0$ é un punto di minimo mentre $x = \frac{8}{9}$ é un punto di massimo. Infine per la derivata seconda si ha

$$f''(x) = \frac{x}{|x|} \frac{3x - 4}{4(1 - x)^{3/2}}$$

e quindi la funzione risulta convessa se $x < 0$.

3. Poniamo $t = 1 + e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. Si ha $x = 0 \to t = 2$ and $x = 2 \to t = 1 + e^2$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{e^x \log(1 + e^x)}{1 + e^x} dx &= \int_2^{1+e^2} \frac{\log t}{t} dt \\ &= [\frac{\log^2 t}{2}]_2^{1+e^2} = \frac{1}{2}(\log^2(1 + e^2) - \log^2 2). \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 10.01.2013

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = e^{-|x|}\sqrt{|x|-1}$$
specificando in particolare dominio, asintoti, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare il comportamento della seguente serie numerica
$$\sum_{n=2}^{\infty} f(2\log n).$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare la famiglia delle primitive della funzione $g(x) = (f(x))^2$, sull'intervallo $[1, +\infty[$ e determinare poi quelle primitive $P(x)$, se esistono, tali che
$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = 2.$$

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é dato dall'insieme chiuso $D = \{x \in I\!R : |x| \geq 1\}$. Questo implica che non esistono intersezioni del grafico con l'asse y e, siccome la funzione é continua in ogni punto di D, non ci sono asintoti verticali. Essendo poi ovviamente $f(x) \geq 0$, per ogni $x \in D$ e $f(\pm 1) = 0$ i punti $x = \pm 1$ sono minimi assoluti per la funzione f e rappresentano anche le sole intersezioni con l'asse x. Verifichiamo ora l'esistenza di asintoti orizzontali od obliqui. Si ha facilmente:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0,$$

pertanto l'asse delle ascisse é un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. Non esistono quindi asintoti obliqui.

Osserviamo ora che la funzione f é simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (é una funzione pari). Lo studio é allora semplificato se consideriamo soltanto la parte del dominio che é contenuta nel semiasse reale positivo. Quindi studieremo la funzione sulla semiretta $[1, +\infty[$. Per simmetria otterremo il comportamento di f anche per $x \leq -1$.

Per $x \geq 1$ si ha $f(x) = e^{-x}\sqrt{x-1}$ e quindi la derivata prima esiste per ogni $x \in]1, +\infty[$ ed é data da:

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(3 - 2x)}{2\sqrt{x-1}}, \quad x > 1.$$

Nel punto $x = 1$ non esiste la derivata, essendo

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty.$$

Questa derivata risulta positiva se $x \in]1, 3/2[$, negativa se $x > 3/2$ e nulla per $x = 3/2$. La funzione é allora crescente in $[1, 3/2]$ e decrescente in $[3/2, +\infty[$ e il punto $x = 3/2$ é allora un punto di massimo relativo (anzi assoluto). Per simmetria, la funzione sará crescente se $x < -3/2$ e decrescente se $x \in [-3/2, -1]$, e il punto $x = -3/2$ é ancora un punto di massimo (assoluto). Risulta inoltre $f(\pm 3/2) = \frac{e^{-3/2}}{\sqrt{2}}$.

Valutiamo ora la derivata seconda. Si ha, per $x > 1$:

$$f''(x) = \frac{e^{-x}}{4(x-1)^{3/2}}(4x^2 - 12x + 7).$$

Questa derivata é positiva se $x > (3+\sqrt{2})/2$, mentre é negativa se $x \in]1,(3+\sqrt{2})/2[$. Quindi la funzione f é convessa se $x > (3+\sqrt{2})/2$, mentre é concava sull'intervallo $[1,(3+\sqrt{2})/2]$. Il punto $x = (3+\sqrt{2})/2$ é allora un punto di flesso per la f. (Si noti che $(3+\sqrt{2})/2 > 3/2$). Per simmetria, f é convessa se $x < -(3+\sqrt{2})/2$ mentre é concava sull'intervallo $[-(3+\sqrt{2})/2,-1]$ e il punto $x = -(3+\sqrt{2})/2$ é un punto di flesso. Il grafico ora puó essere tracciato facilmente.

2. Siccome per $n \geq 2$, si ha $2\log n \geq \log 4 > 1$, la serie é ben definita ed é a termini positivi. Si ha:

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(2\log n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{2\log n - 1}}{n^2}.$$

Questa serie puó essere facilmente trattata col criterio degli infinitesimi. Scegliendo infatti $p = 3/2$, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{3/2}\frac{\sqrt{2\log n - 1}}{n^2} = \frac{\sqrt{2\log n - 1}}{\sqrt{n}} = 0.$$

La serie é pertanto convergente per il criterio degli infinitesimi.

3. Occorre calcolare l'integrale indefinito della funzione $g(x) = e^{-2x}(x-1)$ sull'intervallo $[1,+\infty[$. Si ha facilmente, integrando per parti:

$$\int e^{-2x}(x-1)dx = \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{xe^{-2x}}{2} + c.$$

L'unica primitiva che soddisfa alla relazione di limite proposta é quella che si ottiene scegliendo $c = 2$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 14.02.2013

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il comportamento della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \log(1 + n^{-3x/2}).$$

2. Assegnata la funzione

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x^2+1}{|x|^3}},$$

studiarne il comportamento, determinando in particolare, dominio, segno, asintoti, dominio delle derivate, eventuali massimi, minimi e punti di flesso. Tracciarne infine il grafico.

3. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int (x+1)\log(x^2+1)dx.$$

Svolgimento

1. La serie é a termini positivi, per ogni $x \in I\!R$, poiché $1+n^{-3x/2} \geq 1$. Inoltre applicando il criterio degli infinitesimi si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha n \log(1+\frac{1}{n^{3x/2}}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n^{3x/2}})}{\frac{1}{n^{\alpha+1}}} = 1 \Leftrightarrow \alpha+1$$
$$= \frac{3x}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3x}{2} - 1.$$

Quindi se $\alpha = \frac{3x}{2} - 1 > 1 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$ la serie converge, mentre per $x \leq \frac{4}{3}$ risulta divergente.

2. Calcoliamo il dominio della funzione. Poiché il denominatore deve essere diverso da zero, il dominio é $I\!R \setminus \{0\}$. Non ci sono intersezioni con gli assi e il segno é positivo se $x > 0$. La funzione é dispari poiché $f(x) = -f(-x)$ e quindi é possibile studiarla solo per $x > 0$. In questo caso si ha

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x^2+1}{|x|^3}} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$$

Per quanto riguarda gli asintoti si ha:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^3}} = 0$$

quindi $x = 0$ é un asintoto verticale e non ci sono altri asintoti. Utilizzando la simmetria rispetto all'origine, si deducono immediatamente i limiti $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Per quanto riguarda la derivata prima, che esiste in ogni punto del dominio, per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}}\frac{x^2-1}{x^2} = \frac{1}{2x^{3/2}}\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ovviamente $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 1$. Pertanto la funzione é crescente in $[1, +\infty[$ e decrescente in $]0, 1[$, da cui $x = 1$ é punto di minimo relativo. Per simmetria, $x = -1$ sará un punto di massimo relativo.

Per quanto riguarda la derivata seconda, che esiste per ogni x nel dominio, dopo alcuni passaggi, si ricava

$$f''(x) = \frac{-x^4 + 6x^2 + 3}{4x^{5/2}(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

Quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $-x^4 + 6x^2 + 3 > 0$, da cui risolvendo la disequazione (biquadratica) si ottiene che f é convessa per $0 < x \leq \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$ e concava per $x \geq \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$. Pertanto $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$ é un punto di flesso. Per simmetria il punto $x = -\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$ é un altro punto di flesso.

3. Si ha:

$$\begin{aligned}
&\int (x + 1) \log(x^2 + 1) dx = \int (\frac{x^2}{2} + x)' \log(x^2 + 1) dx \\
= \;& (\frac{x^2}{2} + x) \log(x^2 + 1) - \int \frac{x^2/2 + x}{x^2 + 1} 2x dx \\
= \;& (\frac{x^2}{2} + x) \log(x^2 + 1) - \int \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} dx \\
= \;& (\frac{x^2}{2} + x) \log(x^2 + 1) - \int x + 2 + \frac{-x - 2}{x^2 + 1} dx \\
= \;& (\frac{x^2}{2} + x) \log(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{x + 2}{x^2 + 1} dx \\
= \;& (\frac{x^2}{2} + x) \log(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + 2 \arctan x + C.
\end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 6.06.2013

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n^5}{n^2}.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \log x}{x}$$

determinando in particolare eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativi e eventuali punti di flesso. Tracciarne poi il grafico.

3. Calcolare l'area della regione del piano individuata dal grafico della funzione

$$f(x) = \sin \sqrt{x}$$

nell'intervallo $[0, \frac{\pi^2}{4}]$.

Svolgimento

1. Si tratta di una serie segni alterni. Prima studiamo la serie dei valori assoluti. Indicato con a_n il termine generale della serie, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n^5}{n^2}.$$

Scrivendo $\log n^5 = 5 \log n$, é facile vedere che

$$\lim_{n\to+\infty} n^{3/2}|a_n| = 0,$$

e quindi posto $p = 3/2 > 1$ la serie dei valori assoluti é convergente per il criterio degli infinitesimi. Pertanto la serie data é assolutamente convergente e quindi anche convergente.

2. Il dominio della f é l'insieme $I\!R^+ =]0, +\infty[$. La funzione é positiva se e solo se $x > 1/e$, mentre é negativa sull'intervallo $]0, 1/e[$. Inoltre $f(1/e) = 0$, e quindi $x = 1/e$ é l'unico zero della funzione. Cerchiamo ora gli eventuali asintoti. Risulta:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

pertanto $x = 0$ é un asintoto verticale, mentre la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale.

Studiamo ora la derivata prima. Se $x > 0$ si ha:

$$f'(x) = -\frac{\log x}{x^2}.$$

Tale derivata si annulla nel punto $x = 1$, risulta positiva se $0 < x < 1$, mentre é negativa se $x > 1$. Quindi la funzione é crescente in $]0, 1[$ ed é decrescente se $x > 1$ e $x = 1$ é un punto di massimo relativo con $f(1) = 1$.

Studiamo la derivata seconda. Si ha:

$$f''(x) = \frac{2\log x - 1}{x^3},$$

e quindi $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \sqrt{e}$, mentre $f''(x) < 0$ se $x \in]0, \sqrt{e}[$, $f''(x) > 0$ se $x > \sqrt{e}$. Dunque f é concava in $]0, \sqrt{e}[$, é convessa in $]\sqrt{e}, +\infty[$ e $x = \sqrt{e}$ é un punto di flesso. Lo studio é completo.

3. Occorre calcolare l'integrale:

$$A = \int_0^{pi^2/4} \sin \sqrt{x} dx.$$

Si ha, con la sostituzione $x = t^2$ e successivamente integrando per parti,

$$A = 2\int_0^{\pi/2} t \sin t dt = 2\Big[-t\cos t\Big]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} \cos t dt = 2.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 20.06.2013

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(e^x - e^{-x})$$

specificando in particolare dominio, asintoti, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

2. Studiare, al variare di $x \in I\!R$, il comportamento della seguente serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{nx+x-1}$$

e determinare la somma nei punti ove essa converge.

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare la famiglia delle primitive della funzione $g(x) = e^x f(x)$, sull'intervallo $[1, +\infty[$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é dato dall'insieme dei punti $x \in I\!R$ tali che $e^x - e^{-x} > 0$, cioé $x > 0$. Questo implica che non esistono intersezioni del grafico con l'asse y. Inoltre $f(x) < 0$ se $0 < x < \log((1+\sqrt{5})/2)$, $f(\log((1+\sqrt{5})/2) = 0$ e $f(x) > 0$ se $x > \log((1+\sqrt{5})/2)$. Determiniamo gli eventuali asintoti. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

La retta $x = 0$ é allora un asintoto verticale, mentre non esistono asintoti orizzontali. Verifichiamo l'esistenza di asintoti obliqui. Usando il teorema di De l'Hospital, si ha:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,\\
&\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (\log(e^{2x} - 1) - 2x)\\
&= \lim_{x\to+\infty} [\log(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}) + \log e^{2x} - 2x] = 0.
\end{aligned}$$

Pertanto la retta $y = x$ é un asintoto obliquo, per $x \to +\infty$.

Passiamo allo studio della derivata prima. Si ha:

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

pertanto nel dominio la derivata é sempre positiva e quindi la f é crescente. Non esistono quindi massimi o minimi relativi e/o assoluti. Per la derivata seconda, si ha:

$$f''(x) = -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2},$$

e pertanto la funzione é concava nel suo dominio. Lo studio é completo ed il grafico puó ora essere facilmente tracciato.

2. La serie puó essere scritta:

$$e^{x-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^x)^n$$

e si tratta quindi di una serie geometrica di ragione $-e^x$. Quindi, se $x < 0$ la serie é assolutamente convergente, quindi anche convergente e ha per somma

$$e^{x-1}\frac{1}{1+e^x}, \quad x < 0.$$

Per ogni altro valore di x la serie é indeterminata.

3. Per la famiglia delle primitive, si ha ponendo $e^x = t$,

$$\begin{aligned} \int e^x \log(e^x - e^{-x})dx &= \int \log(t - \frac{1}{t})dt = \int \log\frac{t^2-1}{t}dt \\ = \int \log(t^2-1)dt - \log t dt &= \int \log(t+1)dt + \int \log(t-1)dt - \int \log t dt \end{aligned}$$

ed integrando per parti i tre integrali si ottiene:

$$\begin{aligned} \int \log(t - \frac{1}{t})dt &= t\log(t+1) + \log(t+1) + t\log(t-1) - \log(t-1) - t - t\log t \\ &= t\log(t^2-1) + \log\frac{t+1}{t-1} - t - t\log t + c \end{aligned}$$

e ponendo $t = e^x$ la famiglia delle primitive richieste é data da

$$e^x \log(e^{2x} - 1) + \log\frac{e^x+1}{e^x-1} - e^x - xe^x + c.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 11.07.2013

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$
specificando dominio, segno, intersezioni con gli assi, asintoti, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

2. Studiare il comportamento della seguente serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,\arctan^2\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, calcolare il limite
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} f(t)dt.$$

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é $D = I\!R \setminus \{0\}$. Inoltre $f(x) > 0$ se $x > 0$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$. Questo implica che non esistono intersezioni del grafico con gli assi. Determiniamo gli eventuali asintoti. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Non esistono pertanto asintoti verticali. Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

e quindi non esistono asintoti orizzontali. Verifichiamo l'esistenza di asintoti obliqui. Si ha:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x}\right) = 1, \quad \lim_{x\to +\infty} (f(x) - x) = 0.$$

Stessi risultati per $x \to -\infty$. Pertanto la retta $y = x$ é asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Passiamo allo studio della derivata prima. Si ha:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2},$$

pertanto nel dominio la derivata é sempre positiva e quindi la f é crescente in $]-\infty, 0[$ e in $]0, +\infty[$. Non esistono quindi massimi o minimi relativi e/o assoluti. Si osservi che

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0,$$

pertanto il grafico "esce" dall'origine con semirette tangenti orizzontali.

Per la derivata seconda, si ha:

$$f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

e pertanto la funzione é concava se $x < 0$ mentre é convessa per $x > 0$. Non esistono punti di flesso. Lo studio é completo ed il grafico puó ora essere facilmente tracciato.

2. La serie é a termini positivi e tenendo conto del limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1,$$

si ha

$$\lim_{n\to +\infty} n^{3/2}\sqrt{n}\arctan^2\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

La serie é quindi convergente applicando il criterio degli infinitesimi con $p = 3/2$.

3. Calcoliamo prima di tutto l'integrale

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 (x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right))dx.$$

Integrando per decomposizione e per parti si ha:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_\varepsilon^1 x dx + \int_\varepsilon^1 \arctan\left(\frac{1}{x}\right))dx \\ &= \frac{1-\varepsilon^2}{2} + \left[x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1-\varepsilon^2}{2} + \frac{\pi}{4} - \varepsilon\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}\left[\log(x^2+1)\right]_\varepsilon^1 \\ &= \frac{1-\varepsilon^2}{2} + \frac{\pi}{4} - \varepsilon\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \log\sqrt{\frac{2}{1+\varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

Passando al limite si ottiene quindi

$$\ell = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \log\sqrt{2}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 12.09.2013

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\sin(\frac{1}{n^2})\cos(\frac{1}{n}).$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \log{(2 + x + \frac{1}{x})}$$

specificando esattamente dominio, segno, intersezioni con assi, asintoti, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

3. Calcolare le primitive della funzione

$$f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Svolgimento

1. Si ha
$$|\sqrt{n}\sin(\frac{1}{n^2})\cos(\frac{1}{n})| \leq \sqrt{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$
e quindi per il criterio del confronto la serie converge.

2. Si ha
$$f(x) = \log(2+x+\frac{1}{x}) = \log(\frac{x^2+2x+1}{x}) = \log(\frac{(x+1)^2}{x}) = \log(x+1)^2 - \log x.$$
Per il dominio della funzione si ha $x > 0$. Poiché si ha $\frac{(x+1)^2}{x} \neq 1$ non ci sono punti in cui il grafico della funzione interseca gli assi. Valutiamo la funzione agli estremi del dominio. Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(\frac{x^2+2x+1}{x}) = +\infty$$
quindi non ci sono asintoti orizzontali inoltre
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$
quindi non ci sono nemmeno asintoti obliqui. Infine
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \log(x+1)^2 - \log x = +\infty$$
e quindi la retta $x = 0$ é un asintoto verticale.

Per quanto riguarda la derivata prima si ha
$$f'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x(x+1)},$$
quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ e la f risulta crescente in $]1,+\infty[$ e decrescente altrove. Dunque $x = 1$ é un punto di minimo relativo e $f(1) = \log 4$. Infine si ha
$$f''(x) = \frac{x^2+x-(x-1)(2x+1)}{x^2(x+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}.$$
Quindi $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{2}$ che risulta essere flesso. Infatti la funzione é convessa in $]0, 1+\sqrt{2}[$. Lo studio é completo.

3. Calcoliamo l'integrale indefinito. Integrando per parti si ha

$$
\begin{aligned}
& \int 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} dx = \int (x^2)' \sin\frac{1}{x} dx - \int \cos\frac{1}{x} dx \\
= \quad & x^2 \sin\frac{1}{x} - \int x^2 \cos\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2}) dx - \int \cos\frac{1}{x} dx \\
= \quad & x^2 \sin\frac{1}{x} + c.
\end{aligned}
$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 06.06.2014

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^4 + 1}$$
specificando in particolare dominio, segno, asintoti, derivabilitá, massimi e minimi, flessi e disegnandone infine il grafico. (Lo studio della derivata seconda é facoltativo. L'andamento della funzione é facilmente rilevabile anche senza di esso)

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare il comportamento della seguente serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$$
specificando se essa converge assolutamente o semplicemente.

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare l'integrale definito
$$\int_0^1 f(\sqrt{x})dx.$$

Svolgimento

1. La funzione é definita e continua in tutto l' asse reale, pertanto non esistono asintoti verticali. Inoltre la funzione é positiva se $|x| > 1$, é negativa se $|x| < 1$ e si annulla nei punti $x = 0, \ \pm 1$. Si puó osservare anche che la funzione é pari, pertanto lo studio puó essere effettuato per $x \geq 0$. Dallo studio del segno si deduce immediatamente che $x = 0$ é un punto di massimo relativo.

Determiniamo ora eventuali asintoti. Risulta facilmente

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1,$$

pertanto la retta $y = 1$ é un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. Non vi sono quindi asintoti obliqui.

Studiamo ora la derivata prima. Si ha:

$$f'(x) = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 1)}{(x^4 + 1)^2}.$$

Tale derivata esiste sempre e si annulla nei punti $x = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Studiando il segno della derivata si vede facilmente che tali punti sono di minimo (assoluto), la f é crescente negli intervalli $[-(\sqrt{2} - 1), 0]$ e $[(\sqrt{2} - 1), +\infty[$ ed é decrescente nei rimanenti intervalli. Dallo studio si ricava, senza calcolare la derivata seconda, che esistono due punti di flesso simmetrici rispetto all'origine. Ora un grafico approssimativo puó esere facilmente tracciato.

2. La serie assegnata si scrive facilmente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 - n^2}{n^4 + 1} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 - 1}{n^4 + 1},$$

che é a segni alterni. Essendo

$$\frac{n^2 - 1}{n^4 + 1} \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2},$$

la serie é assolutamente convergente, per il criterio del confronto, quindi anche convergente.

3. Posto $g(x) = f(\sqrt{x})$, si ha:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (g(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2 - x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx \\ = \; & \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx \\ = \; & \left[x - \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2+1) \right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4} - \log \sqrt{2}. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 11.07.2014

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{(2-x)^2}{x^3}$$
specificando in particolare dominio, segno, asintoti, derivabilitá, massimi e minimi, flessi e disegnandone infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare il comportamento della seguente serie numerica
$$\sum_{n=0}^{\infty} f(e^n).$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare la primitiva di f per $x \geq 1$, che si annulla nel punto $x = 1$.

Svolgimento

1. Il campo di esistenza é $D = I\!R \setminus \{0\}$. Inoltre $f(x) > 0$ se $x > 0$ mentre f é negativa per $x < 0$.La funzione si annulla solo per $x = 2$. Determiniamo ora gli asintoti. Essendo

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty,$$

la retta $x = 0$ é un asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0,$$

e quindi la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale.

Calcoliamo la derivata prima. Risulta

$$f'(x) = -\frac{x^2 - 8x + 12}{x^4}, \quad x \in D.$$

La derivata prima si annulla nei punti $x = 2$ e $x = 6$, é decrescente negli intervalli $]-\infty, 0[$, $]0, 2]$ e $[6, +\infty[$, mentre é crescente nell'intervallo $[2, 6]$. Pertanto il punto $x = 2$ é un minimo relativo e $f(2) = 0$, mentre il punto $x = 6$ é un massimo relativo e $f(6) = 2/27$. Per la derivata seconda abbiamo invece:

$$f''(x) = 2\frac{x^2 - 12x + 24}{x^5}.$$

Quindi f é concava negli intervalli $]-\infty, 0[$ e $]6 - 2\sqrt{3}, 6 + 2\sqrt{3}[$, ed é convessa in $]0, 6 - 2\sqrt{3}[$ e in $[6 + 2\sqrt{3}, \infty[$. Pertanto i punti $x = 6 \pm \sqrt{3}$ sono punti di flesso. Lo studio richiesto é completo e il grafico puó essere facilmente tracciato.

2. La serie in questione é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - e^n)^2}{e^{3n}}.$$

Tale serie é a termini positivi e svolgendo il quadrato puó essere scritta come somma di serie tutte convergenti, cioé:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - e^n)^2}{e^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{e^{3n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{e^{2n}}.$$

Ciascuna delle serie al secondo membro é convergente, basta applicare il criterio degli infinitesimi per esempio con $p = 2$. La serie é pertanto convergente.

3. Determiniamo intanto l'integrale indefinito della f sull'intervallo $[1, +\infty[$. Si ha

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \left(\frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}\right)dx \\ &= -\frac{2}{x^2} + \log x + \frac{4}{x} + C. \end{aligned}$$

La primitiva che si annulla si ottiene scegliendo $C = -2$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 20.02.2014

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \left(1 + e^{-x}\right)^{-1}$$

specificando in particolare dominio, segno, asintoti, derivabilitá, massimi e minimi, flessi e disegnandone infine il grafico. Infine dire se la funzione é limitata superiormente, inferiormente e se ammette massimo e minimo assoluti.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare il comportamento della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(-2 \log n)$$

specificando se essa converge assolutamente o semplicemente.

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare la famiglia delle primitive della funzione $g(x) = (f(x))^2$ per $x \geq 0$. Determinare poi quella primitiva il cui grafico passa per l'origine.

Svolgimento

1. La funzione é definita in tutto $I\!R$, ed inoltre é strettamente positiva. Il grafico incontra l'asse delle y nel punto $(0, 1/2)$, cioé $f(0) = 1/2$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1,$$

e quindi le rette $y = 0$ e $y = 1$ sono asintoti orizzontali.

Calcoliamo la derivata prima. Risulta

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \qquad x \in I\!R,$$

e quindi la funzione é strettamente crescente in $I\!R$. Questo implica che la funzione é limitata sia superiormente che inferiormente da 1 e 0 rispettivamente. Tali valori non sono peró massimo e minimo assoluti, perché non sono assunti. Non vi sono quindi punti di massimo o di minimo relativo. Determiniamo ora la derivata seconda. Si ha

$$f''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}, \qquad x \in I\!R.$$

Si ha $f''(x) > 0$ se $x < 0$, $f''(x) < 0$ se $x > 0$ e $f''(0) = 0$. Quindi la funzione é convessa se $x < 0$, é concava se $x > 0$ e il punto $x = 0$ é un punto di flesso. Lo studio richiesto é completo.

2. La serie in questione é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-2\log n}}{e^{-2\log n}+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}.$$

Tale serie é a segni alterni. La serie assoluta é data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1},$$

ed essendo $1/(n^2+1) \le 1/n^2$, la serie assoluta risulta convergente per il criterio del confronto, essendo maggiorata da una serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1. La serie iniziale converge assolutamente e quindi converge.

3. Determiniamo l'integrale indefinito

$$I = \int g(x)dx = \int \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}dx.$$

Ponendo $e^x = t$, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t}{(t+1)^2}dt = \int \frac{1}{t+1}dt - \int \frac{1}{(t+1)^2}dt \\ &= \log(t+1) + \frac{1}{t+1} + c, \end{aligned}$$

pertanto la famiglia delle primitive é data da

$$F(x) = \log(e^x+1) + \frac{1}{e^x+1} + c.$$

La primitiva richiesta si ottiene facilmente ponendo $c = -\log 2 - 1/2$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 20.06.2014

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - x^4}$$

specificando in particolare dominio, segno, asintoti, derivabilitá, massimi e minimi, flessi e disegnandone infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare il comportamento della seguente serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n f(n)$$

specificando se essa converge assolutamente o semplicemente.

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, calcolare l'area della regione del piano delimitata da grafico della f sull'intervallo $[0, 1/\sqrt[4]{2}]$.

Svolgimento

1. Il campo di esistenza é $D = I\!R \setminus \{\pm 1\}$. Inoltre $f(x) > 0$ se $x < -1$ e $0 < x < 1$, mentre f é negativa per $-1 < x < 0$ e $x > 1$. La funzione si annulla solo per $x = 0$. Determiniamo ora gli asintoti. Essendo

$$\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \mp\infty, \qquad \lim_{x \to (-1)^\pm} f(x) = \mp\infty,$$

e pertanto le rette $x = \pm 1$ sono asintoti verticali. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0,$$

e quindi la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale.

Calcoliamo la derivata prima. Risulta

$$f'(x) = \frac{x^2(3 + x^4)}{(1 - x^4)^2}, \quad x \in I\!R,$$

pertanto la derivata é sempre positiva e quindi la funzione é sempre crescente in ciascuno degli intervalli ove é definita . Non ci sono massimi o minimi relativi. Per la derivata seconda abbiamo invece:

$$f''(x) = \frac{2x(x^8 + 12x^4 + 3)}{(1 - x^4)^3}.$$

Quindi f é concava negli intervalli $]-1, 0]$ e $]1, +\infty[$, convessa negli altri intervalli. Il punto $x = 0$ é un punto di flesso. Lo studio richiesto é completo e il grafico puó essere facilmente tracciato.

2. La serie in questione é:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{1 - n^4} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{n^4 - 1}.$$

Tale serie é a segni alterni. La serie assoluta é data da

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 - 1},$$

che risulta divergente. Pertanto la serie non é assolutamente convergente. Tuttavia siccome $n^3/(n^4-1)$ tende a zero per $n \to +\infty$ e tenendo conto, dallo studio dell'esercizio 1, che tale successione é decrescente, utilizzando il criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente.

3. Occorre determinare l'integrale definito

$$A = \int_0^{2^{-1/4}} f(x)dx.$$

Si ha

$$A = \int_0^{2^{-1/4}} \frac{x^3}{1-x^4}dx = -\frac{1}{4}\left[\log(1-x^4)\right]_0^{2^{-1/4}} = \frac{\log 2}{4}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 11.09.2014

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione ____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare il limite per $n \to +\infty$ della successione

$$a_n = \Big((n-1)^{2/3} - (n+1)^{2/3}\Big).$$

2. Dimostrare che la funzione $h(x) = 2x^6 + 3x^2 - 1$ possiede, per $x > 0$, un unico zero appartenente all'intervallo $]0, 2^{-1/6}[$ ed utilizzare questo risultato per determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^6 + 1}}$$

nel proprio dominio.

3. Calcolare la famiglia delle primitive della funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}},$$

e determinare quella primitiva $P(x)$ tale che $P(0) = 1$.

Esistono primitive che ammettono l'asse delle x come asintoto orizzontale per $x \to +\infty$?

Svolgimento

1. Un modo semplice per determinare il limite della successione (a_n) é quello di utilizzare la formula per la differenza di due cubi:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Posto infatti $a = (n-1)^{2/3}$ e $b = (n+1)^{2/3}$, si ottiene facilmente

$$a_n = -\frac{4n}{(n-1)^{4/3} + (n+1)^{4/3} + (n^2-1)^{2/3}},$$

da cui si ricava subito

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

2. Anzitutto osserviamo che $h(0) = -1 < 0$ e $h(2^{-1/6}) > 0$. Per il teorema degli zeri esiste quindi un punto $x_0 \in]0, 2^{-1/6}[$ tale che $h(x_0) = 0$. Ora dobbiamo far vedere che tale punto é unico. Infatti essendo $h'(x) = 12x^5 + 6x$, la funzione h risulta strettamente crescente per $x > 0$, e quindi h é iniettiva per $x > 0$. Il punto x_0 é quindi unico.

La funzione f é dispari, pertanto possiamo limitarci a studiare l'esistenza di punti di massimo o minimo per $x > 0$. La derivata prima della funzione f é data da

$$f'(x) = \frac{2x^6 + 3x^2 - 1}{(x^6+1)^{3/2}}.$$

Utilizando quindi lo studio precedente per la funzione h, si vede che f é crescente per $x > x_0$ mentre é decrescente per $0 < x < x_0$. Il punto x_0 é allora un punto di minimo relativo. Per simmetria, il punto $-x_0$ sará un massimo relativo ed appartiene all'intervallo $]-2^{-1/6}, 0[$. Non esistono altri punti di estremo relativo.

3. L'integrale indefinito proposto é immediato. Dividendo e moltiplicando per 4 si ha subito

$$P(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{2} + c.$$

Imponendo la condizione $P(0) = 1$ si ottiene subito $c = 1/2$. La primitiva richiesta é allora

$$P(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}+1}{2}.$$

Non esistono evidentemente primitive che hanno limite nullo per $x \to +\infty$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 23.01.2014

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = 2x - \log(x - |x| + 1)$$

specificando in particolare dominio, segno, asintoti, derivabilitá, massimi e minimi, flessi e disegnandone infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare il comportamento della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n^2 2^{-n})$$

specificando se essa converge assolutamente o semplicemente.

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, calcolare l'area della regione del piano determinata dal grafico di f sull'intervallo $[-1/4, 0]$.

Svolgimento

1. Tenuto conto della definizione di modulo, la funzione puó essere scritta nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ 2x - \log(2x+1), & x < 0, \end{cases}$$

Da ció si deduce che il dominio della funzione é la semiretta $]-1/2, +\infty[$. Siccome per ogni $t > -1$ vale la ben nota disuguaglianza $\log(1+t) \leq t$, si deduce subito che la funzione é sempre non negativa e vale 0 soltanto per $x = 0$. Questo implica subito che il punto $x = 0$ é un punto di minimo assoluto per f.

Determiniamo ora gli eventuali asintoti. Risulta:

$$\lim_{x \to -1/2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Pertanto non esistono asintoti orizzontali e la retta $x = -1/2$ é un asintoto verticale. Inoltre siccome la funzione f vale $2x$ per $x > 0$, é evidente che la retta $y = 2x$ é asintoto obliquo per f, quando $x \to +\infty$.

Determiniamo ora la derivata prima. Per $x > 0$, si ha ovvviamente $f'(x) = 2$ mentre per $x \in]-1/2, 0[$ si ha:

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{2x+1} = \frac{4x}{2x+1}.$$

Essendo per tali x, $2x + 1 > 0$ e $x < 0$, si ha che $f'(x) < 0$ e quindi la f é decrescente sull'intervallo $]-1/2, 0]$. Questo conferma che, come detto in precedenza, il punto $x = 0$ é un minimo relativo (assoluto). Si osservi che nel punto $x = 0$ esiste la derivata sinistra e vale 0, ed esiste la derivata destra che vale 2. La funzione non é quindi derivabile in $x = 0$.

Quanto alla derivata seconda, questa é ovviamente nulla per $x > 0$, mentre se $x \in]-1/2, 0[$ si ha

$$f''(x) = \frac{4}{(2x+1)^2},$$

che risulta sempre positiva nell'intervallo in questione. Quindi f é convessa in tale intervallo ed é lineare se $x > 0$, e pertanto non ci sono flessi. Il grafico ora puó essere tracciato facilmente.

2. Siccome $n^2 2^{-n} > 0$, si ha $f(n^2 2^{-n}) = 2n^2 2^{-n}$, e quindi la serie in questione é a segni alterni. Studiamo anzitutto la convergenza assoluta. La serie dei valori assoluti é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}.$$

Tale serie puó essere studiata con il criterio del rapporto. Posto $a_n = n^2 2^{-n+1}$, si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2,$$

da cui $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/2$, e quindi la serie é assolutamente convergente. Questo implica che é anche convergente.

3. Occorre calcolare l'integrale definito

$$A = \int_{-1/4}^{0} f(x)dx.$$

L'integrale indefinito si ottiene integrando per decomposizione e per parti,

$$\int (2x - \log(2x+1))dx = x^2 - \left[x\log(2x+1) - \int \frac{2x}{1+2x}dx\right]$$
$$= \quad x^2 + x - x\log(2x+1) - \frac{1}{2}\log(2x+1) + c.$$

Pertanto applicando la formula fondamentale del calcolo integrale, indicando con $P(x)$ la primitiva con $c = 0$, si ha:

$$A = P(0) - P(-1/4) = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}\log(1/2) = \frac{3}{16} - \frac{\log 2}{4}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 23.01.2015

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il carattere della seguente serie e calcolare la somma

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}(1-\frac{1}{3^n}).$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = |x| - \log(e^x + 2)$$

specificando esattamente dominio, intersezioni con assi, segno, asintoti, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico. (Suggerimento: per le intersezioni con gli assi usare la sostituzione $e^x = t$).

3. Calcolare l'area della regione finita del piano compresa tra i grafici delle funzioni $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ e $f(x) = 2^x$.

Svolgimento

1. Si ha che il termine generale della serie é dato da

$$(-1)^n \frac{1}{2^n}(1-\frac{1}{3^n}) = \frac{(-1)^n}{2^n} - \frac{(-1)^n}{6^n} = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n - \Big(-\frac{1}{6}\Big)^n$$

e quindi la serie risulta essere la differenza di due serie geometriche di ragione $\frac{-1}{2}$ e $\frac{-1}{6}$ rispettivamente e dunque convergenti. Per la somma si ha

$$Somma = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{6}} = \frac{2}{3} - \frac{6}{7} = \frac{14-18}{21} = -\frac{4}{21}.$$

2. Il dominio della funzione é tutto l'asse reale R. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} x - \log(e^x+2), \ x \geq 0 \\ \\ -x - \log(e^x+2), \ x < 0 \end{cases}$$

Per le intersezioni con gli assi si ha $f(0) = -\log 3$ mentre l'equazione $f(x) = 0$ deve essere risolta ponendo $e^x = t$. Quindi se $x \geq 0$ si ha

$$x - \log(e^x+2) = 0 \leftrightarrow \log t = \log(t+2)$$

e allora non ci sono soluzioni. Se invece $x < 0$ si ha

$$-x = \log(e^x+2) \leftrightarrow -\log t = \log(t+2) \leftrightarrow \log(t(t+2)) \leftrightarrow t(t+2) = 1.$$

Da cui $t^2+2t-1 = 0 \leftrightarrow t = -1 \pm \sqrt{2}$ e scartando il valore negativo si ha $t = -1+\sqrt{2} = e^x \leftrightarrow x = \log(\sqrt{2}-1)$. I punti di intersezione sono allora $(0, -\log 3)$ e $(\log(\sqrt{2}-1), 0)$.

Per quanto riguarda il segno si ha, se $x \geq 0$,

$$f(x) \geq 0 \leftrightarrow x \geq \log(e^x+2) \leftrightarrow \log t \geq \log(t+2) \leftrightarrow t \geq t+2$$

che risulta impossibile. Mentre se $x < 0$ si ha

$$-x \geq \log(e^x+2) \leftrightarrow -\log t > \log(t+2) \leftrightarrow \log(t(t+2)) < 0 \leftrightarrow t^2+2t-1 < 0$$

da cui

$$-1-\sqrt{2} < t < -1+\sqrt{2} \leftrightarrow e^x < -1+\sqrt{2} \leftrightarrow x < \log(\sqrt{2}-1)$$

quindi per $x < 0$ la funzione é positiva se $x < \log(\sqrt{2}-1)$ mentre é negativa se $\log(\sqrt{2}-1) < x < 0$. Complessivamente allora il segno della funzione risulta essere positivo se $x < \log(\sqrt{2}-1)$ negativo se $\log(\sqrt{2}-1) < x$.

Valutiamo la funzione agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \log(e^x+2) = \lim_{x\to+\infty} x - \log(e^x(1+\frac{2}{e^x}))$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x - \log e^x - \log(1+\frac{2}{e^x}) = \lim_{x\to+\infty} -\log(1+\frac{2}{e^x}) = 0$$

quindi $y = 0$ é asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x - \log(e^x+2) = +\infty$$

quindi non ci sono asintoti orizzontali, valutiamo se ci sono obliqui

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -1 - \frac{\log(e^x+2)}{x} = -1$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} -x - \log(e^x+2) + x = -\log 2$$

e quindi la retta $y = -x - \log 2$ é un asintoto oliquo per $x \to -\infty$.

Per quanto riguarda la derivata prima si ha per $x > o$

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+2} = \frac{e^x+2-e^x}{e^x+2} = \frac{2}{e^x+2},$$

mentre per $x < 0$

$$f'(x) = -1 - \frac{e^x}{e^x+2} = \frac{-e^x-2-e^x}{e^x+2} = \frac{-2e^x-2}{e^x+2}.$$

Quindi le due leggi avranno la stessa derivata seconda. Studiamo la derivabilitá in zero che é un punto che annulla il valore assoluto. Si ha

$$\lim_{x\to o^+} \frac{2}{e^x+2} = \frac{2}{3}, \quad \lim_{x\to o^-} \frac{-2e^x-2}{e^x+2} = -\frac{4}{3}$$

e allora in zero non é derivabile. Determiniamo ora i massimi e minimi della funzione. Per $x > 0$

$$f^{'}(x) = \frac{2}{e^x + 2}$$

e quindi risulta sempre positiva, la funzione é allora crescente. Se invece $x < 0$

$$f^{'}(x) = \frac{-2e^x - 2}{e^x + 2}$$

e quindi risulta sempre negativa, la funzione é allora decrescente. Quindi $x = 0$ risulta essere il punto di minimo assoluto. Infine per la derivata seconda si ha per $x \neq 0$

$$f^{''} = \frac{-2e^x}{(e^x + 2)^2}$$

e quindi risulta sempre negativa e la funzione é concava. Lo studio é completo.

3. Dobbiamo prima di tutto determinare i punti di intersezione delle due curve. Disegnando le due curve (la prima é una parabole rivolta verso il basso e la seconda un esponenziale) si ha che il punto di intersezione con l'asse delle ordinate per entrambe risulta $(0, 1)$. Inoltre dal grafico si evince che l'altro punto di intersezione si deve trovare nel secondo quadrante e deve avere la prima componente tale che $-\sqrt{2} < x < 0$ essendo $-\sqrt{2}$ il punto di intersezione della parabola con l'asse negativo delle ascisse. Provando a sostituire l'unico intero compreso in questo intervallo ($x = -1$) si trova che é proprio il punto da determinare, quindi i due estremi sono $x = -1$ e $x = 0$. Dal grafico si vede anche che la curva maggiore é data dalla parabola e allora l'integrale da calcolare risulta

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{0} (-\frac{1}{2}x^2 + 1 - 2^x)dx = \Big[-\frac{x^3}{6} + x - \frac{2^x}{\log 2} \Big]_{-1}^{0} \\ = \; & -\frac{1}{\log 2} - (-\frac{1}{6}(-1) - 1 - \frac{2^{-1}}{\log 2}) \\ = \; & -\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{2\log 2} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2\log 2}. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 19.02.2015

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il comportamento della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = |x|^3 e^x$$

specificando esattamente dominio, intersezioni con assi, segno, asintoti, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

3. Calcolare le primitive della funzione $f(x) = \log^2 x$ sull'intervallo $[1, +\infty[$ e poi determinare quella che si annulla in $x = 1$. (Suggerimento: calcolare prima una primitiva di $\log x$).

Svolgimento

1. Applichiamo il criterio della radice al valore assoluto del termine generale, si ha

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n|x|^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)|x|.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)|x| = |x|$ si ha che per $|x| < 1$ la serie converge assolutamente. Se invece $x = 1$ otteniamo $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ che risulta divergente perché é a termini positivi e il termine generale non tende a zero. Se invece $x = -1$ otteniamo $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-(1+\frac{1}{n})\right)^n$ che risulta non convergente perché é a segni alterni e il termine generale non tende a zero. Se invece $x > 1$ la serie diverge perché é a termini positivi e per il criterio della radice il limite risulta maggiore di 1. Infine se $x < -1$ la serie non converge perché é a segni alterni e il termine generale non tende a zero.

2. Il dominio della funzione é tutto l'asse reale R. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} x^3e^x, \ x \geq 0 \\ \\ -x^3e^x, \ x < 0 \end{cases}$$

Per quanto riguarda il segno si ha che $f(x) \geq 0$ sempre e quindi essendo $f(0) = 0$ si ha che $x = 0$ é un punto di minimo assoluto. Inoltre il punto $(0,0)$ é anche l'unico punto di intersezione con gli assi. Valutiamo la funzione agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3e^x = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3e^x = 0$$

quindi $y = 0$ é asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Valutiamo se ci sono obliqui per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to x+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2e^x = +\infty$$

e quindi non ci sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$.

Per quanto riguarda la derivata prima si ha per $x > 0$

$$f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = e^x(3x^2 + x^3) = x^2e^x(3 + x),$$

mentre per $x < 0$

$$f'(x) = -3x^2e^x - x^3e^x = -e^x(3x^2 + x^3) = -e^x x^2(3 + x).$$

Studiamo la derivabilitá in zero che é un punto che annulla il valore assoluto. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^2e^x(3 + x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^-} -x^2e^x(3 + x) = 0$$

e allora in zero la funzione é derivabile. Determiniamo ora i massimi e minimi della funzione. Per $x > 0$

$$f^{'}(x) = x^2e^x(3 + x)$$

e quindi f' risulta sempre positiva, la funzione é allora crescente. Se invece $x < 0$

$$f^{'}(x) = -e^x x^2(3 + x) < 0 \Leftrightarrow -(3 + x) < 0 \Leftrightarrow x > -3$$

e quindi f' risulta positiva per $x < -3$ dove é crescente mentre risulta negativa per $-3 < x < 0$, dove la funzione é decrescente. Quindi $x = 0$ risulta essere il punto di minimo assoluto, come giá avevamo stabilito e $x = -3$ risulta un punto di massimo relativo.

Infine per la derivata seconda si ha per $x \geq 0$

$$f^{''}(x) = 6xe^x+3x^2e^x+3x^2e^x+x^3e^x = 6xe^x+6x^2e^x+x^3e^x = xe^x(6+6x+x^2)$$

e quindi é sempre positiva e la funzione é convessa, mentre per $x < 0$

$$f^{''}(x) = -6xe^x-3x^2e^x-3x^2e^x-x^3e^x = -6xe^x-6x^2e^x-x^3e^x = -xe^x(6+6x+x^2).$$

Studiando il polinomio $6 + 6x + x^2$ si ha che

$$6 + 6x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 6} = -3 \pm \sqrt{3}$$

quindi

$$f^{''}(x) > 0 \Leftrightarrow -xe^x(6+6x+x^2) > 0 \Leftrightarrow x(6+6x+x^2) < 0$$

e quindi la derivata seconda risulta positiva per $x < -3-\sqrt{3}$ e per $-3+\sqrt{3} < x < 0$ (e quindi convessa) e negativa per $-3-\sqrt{3}$ dove é concava. I punti $x = -3-\sqrt{3}$ sono allora punti di flesso. Lo studio é completo.

3. Determiniamo prima di tutto una primitiva della funzione $\log x$. Si ha

$$\int \log x dx = \int (x)' \log x dx = x \log x - \int dx = x \log x - x.$$

Ora utilizziamo ancora il metodo di intergrazione per parti e otteniamo

$$\begin{aligned}
& \int \log^2 x dx = \int \log x \log x dx = \int (x \log x - x)' \log x dx \\
= \;& (x \log x - x) \log x - \int (x \log x - x) \frac{1}{x} dx = (x \log x - x) \log x - \int (\log x - 1) dx \\
= \;& x \log^2 x - x \log x - [(x \log x - x) - x] = x \log^2 x - x \log x - x \log x + 2x + C \\
= \;& x \log^2 x - 2x \log x + 2x + C = P(x).
\end{aligned}$$

Per determinare la costante dobbiamo porre

$$P(1) = 0 = 2 + C \Leftrightarrow C = -2.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 11.06.2015

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = x^2 - \log(x^2 + 1)$$
specificando in particolare dominio, segno, asintoti, derivabilitá, massimi e minimi, flessi e disegnandone infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare il comportamento della seguente serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare l'integrale definito
$$\int_{-1}^{0} f(x)dx.$$

Svolgimento

1. La funzione é definita e continua in tutto l' asse reale, pertanto non esistono asintoti verticali. Inoltre la funzione é sempre positiva, perche' vale la disuguaglianza di Bernoulli

$$\log(t+1) \leq t, \quad t > -1.$$

Siccome $f(0) = 0$, il punto $x = 0$ é un punto di minimo assoluto per la funzione f. Si puó osservare anche che la funzione é pari, pertanto lo studio puó essere effettuato per $x \geq 0$.

Determiniamo ora eventuali asintoti. Risulta facilmente

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^2 - \log(x^2+1)) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2\Big(1 - \frac{\log(1+x^2)}{x^2}\Big) = +\infty.$$

Inoltre é facile vedere che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - \log(x^2+1)}{x} = \pm\infty,$$

e pertanto non esistono asintoti obliqui.

Studiamo ora la derivata prima. Si ha:

$$f'(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}.$$

Risulta $f'(x) > 0$ se $x > 0$, mentre $f'(x) < 0$ se $x < 0$. Quindi la f é crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$. Come giá visto prima, $x = 0$ é un punto di minimo (assoluto).

Determiniamo ora la derivata seconda. Si ha facilmente

$$f''(x) = \frac{2x^2(3+x^2)}{(x^2+1)^2},$$

da cui si ricava che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I\!R$. La funzione é quindi convessa. Il grafico ora puó essere tracciato facilmente.

2. La serie assegnata (a termini positivi) si scrive facilmente

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \log(1 + \frac{1}{n^2})\right),$$

che puó essere vista come la differenza di due serie convergenti. Infatti la prima é la serie armonica generalizzata con $p = 2$ mentre per la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{n^2})$$

si puó applicare il criterio degli infinitesimi con $p = 2$ essendo

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \log(1 + \frac{1}{n^2}) = 1.$$

la serie é quindi convergente.

3. Si tratta di calcolare l'integrale

$$A = \int_{-1}^{0} (x^2 - \log(1 + x^2))dx = \frac{1}{3} - \int_{-1}^{0} \log(1 + x^2)dx.$$

Risulta, integrando per parti l'ultimo integrale:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3} - \left[[x\log(x^2+1)]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{2x^2}{x^2+1} \right] \\ &= \frac{1}{3} - \left[\log 2 - 2 + 2[\arctan x]_{-1}^{0} \right] = \frac{1}{3} - \log 2 + 2 - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{7}{3} - \log 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 25.06.2015

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = 3xe^{-x-2}$$
specificando in particolare dominio, segno, asintoti, derivabilitá, massimi e minimi, flessi e disegnandone infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare il comportamento della seguente serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$$
specificando se essa converge assolutamente o semplicemente.

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare l'area della regione del piano individuata dal grafico di f sull'intervallo $[1, 2]$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é tutto R. Per quanto riguarda il segno si ha $f(x) > 0 \leftrightarrow x > 0$ e $f(x) < 0 \leftrightarrow x < 0$. Determiniamo gli asintoti. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} 3xe^{-x-2} = 0$$

e quindi l'asse x é un asintoto orizzontale, inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} 3xe^{-x-2} = -\infty$$

ma poiché si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

non ci sono altri asintoti. Studiamo la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = 3e^{-x-2} - 3xe^{-x-2} = 3e^{-x-2}(1-x)$$

quindi

$$f'(x) > 0 \leftrightarrow 1 > x, \qquad f'(x) < 0 \leftrightarrow 1 < x$$

allora $x = 1$ risulta un punto di massimo con $f(1) = 3e^{-3}$. Per quanto riguarda la derivata seconda si ha

$$f''(x) = 3e^{-x-2}(x-2)$$

e quindi

$$f''(x) > 0 \leftrightarrow x > 2, \qquad f''(x) < 0 \leftrightarrow x < 2$$

allora $x = 2$ risulta un punto di flesso e la funzione é convessa per $x > 2$ e concava per $x < 2$.

2. Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3}{n} e^{(-1/n)-2} = 3e^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} e^{-1/n}.$$

Poiché si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} e^{-1/n} = 0$$

e inoltre $\frac{1}{n}e^{-1/n}$ risulta decrescente dall'esercizio precedente, applicando il teorema di Leibnitz la serie é convergente. Inoltre siccome il termine generale della serie in valore assoluto é minorato da e^{-1}/n, la serie non converge assolutamente. Quindi la serie risulta semplicemente convergente.

3. Risulta

$$\begin{aligned} & \int_1^2 3xe^{-x-2}dx = 3e^{-2}\int_1^2 xe^{-x}dx = 3e^{-2}\int_1^2 x(-e^{-x})'dx \\ = \; & 3e^{-2}\left([-xe^{-x}]_1^2 - \int_1^2 -e^{-x}dx\right) = 3e^{-2}(-2e^{-2}+e^{-1}) + 3e^{-2}[-e^{-x}]_1^2 \\ = \; & 3(2e^{-3}-3e^{-4}). \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
del 10.09.2015

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x} \log x.$$

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(\frac{1}{n^4}).$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, calcolare le primitive di f^2 e determinare quella che passa per il punto $(1, \frac{1}{4})$.

Svolgimento

1. Il dominio é la semiretta $x > 0$. Per quanto riguarda il segno si ha

$$f(x) > 0 \leftrightarrow \sqrt{x}\log x > 0 \leftrightarrow \log x > 0 \leftrightarrow x > 1.$$

Calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio per determinare gli asintoti, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\log x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$$

e quindi non ci sono asintoti. Studiamo la derivata prima, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}(\frac{\log x}{2} + 1)$$

quindi

$$f'(x) > 0 \leftrightarrow \frac{\log x}{2} + 1 > 0 \leftrightarrow \log x > -2 \leftrightarrow x > e^{-2}.$$

La funzione risulta crescente per $x > e^{-2}$ e decrescente per $x < e^{-2}$ quindi $x = e^{-2}$ é un punto di minimo assoluto. Infine calcoliamo la derivata seconda, si ha

$$f''(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}(\frac{\log x}{2}+1)+\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}(\frac{\log x}{2}+1)+\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{\log x}{4}x^{-3/2}$$

e allora

$$f''(x) > 0 \leftrightarrow -\log x > 0 \leftrightarrow \log x < 0 \leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Il punto $x = 1$ é punto di flesso e la funzione é convessa per i valori $0 < x < 1$ e concava per $x > 1$.

2. Si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(\frac{1}{n^4}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \log \frac{1}{n^4} = -4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \log n$$

che é una serie a termini negativi. Confrontando con $\frac{1}{n^{3/2}}$ si dimostra che la serie converge.

3. L'integrale da calcolare risulta

$$\begin{aligned} & \int f^2(x)dx = \int x \log^2 x dx = \frac{x^2}{2} \log^2 x - \int \frac{x^2}{2} \frac{2 \log x}{x} dx \\ = & \frac{x^2}{2} \log^2 x - \int x \log x dx = \frac{x^2}{2} \log^2 x - \frac{x^2}{2} \log x + \int \frac{x}{2} dx \\ = & \frac{x^2}{2} \log^2 x - \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

Determiniamo la costante, si ha

$$\frac{1}{4} + C = \frac{1}{4} \leftrightarrow C = 0.$$