Universitá degli Studi di Perugia - Facoltá di Ingegneria

Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa (Ambiente e Territorio)

Appello del **29.06.2001**

Svolgere almeno due tra gli esercizi seguenti:

1. Dopo averne giustificata l'esistenza, calcolare il massimo ed il minimo assoluti ed i punti ove sono assunti, della funzione:

$$f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + 2x$$

sull'insieme $D = \{(x, y) : 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$.

2. Trovere l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$x^2y'' - xy' = x^2 \log x, \quad x > 0$$

e determinare quella soluzione che verifica i dati iniziali:

$$y(1) = y'(1) = 0.$$

3. Calcolare l'integrale doppio:

$$\int\int_D \frac{x^2e^{xy}}{y} dxdy,$$

dove $D = \{(x, y) : (1/2x) \leq y \leq (1/x),\ (x^2/3) \leq y \leq (x^2/2)\}$.
(*Sugg: conviene porre:* $(x^2/y) = u,\ xy = v$*).*

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
appello del 29.06.2001

1. L'insieme D è compatto, pertanto la f, essendo continua, ammette in D massimo e minimo assoluti. Per determinarli, consideriamo prima i punti interni a D. La f é sempre derivabile. Allora risolviamo il sistema:

$$\nabla f(x,y) = O, \quad (x,y) \in D^\circ.$$

L'unico punto critico interno a D è il punto $P = (-1/2, 0)$. Essendo $\det H(P) = -24 < 0$ per ogni (x,y), il punto P è un punto sella. Ora studiamo cosa avviene sulla frontiera. Qui possiamo utilizzare la teoria dei massimi e minimi vincolati alla curva di equazione $2x^2 + 3y^2 - 1 = 0$. Utilizzando ad esempio il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, studiamo la lagrangiana:

$$H(x,y,\lambda) = 2x^2 - 3y^2 + 2x + \lambda(2x^2 + 3y^2 - 1).$$

Il sistema $\nabla H(x,y,\lambda) = O$ fornisce facilmente i punti soluzione

$$P_1 = (-\sqrt{2}/2, 0), \; P_2 = (\sqrt{2}/2, 0),$$

in corrispondenza dei valori di $\lambda = (1-\sqrt{2})/\sqrt{2}$ e $\lambda = -(1+\sqrt{2})/\sqrt{2}$ rispettivamente e i punti

$$P_3 = (-1/4, -\sqrt{7/24}), \; P_4 = (-1/4, \sqrt{7/24})$$

in corrispondenza di $\lambda = 1$. Calcoliamo allora i valori che la f assume su questi punti. Si ha:

$$f(P_1) = 1 - \sqrt{2}, \; f(P_2) = 1 + \sqrt{2}, \; f(P_3) = f(P_4) = -5/4.$$

Allora dal confronto tra questi valori risulta che il massimo della funzione é assunto nel punto P_2 e vale $1 + \sqrt{2}$ mentre il minimo assoluto é assunto nei punti P_3, P_4 e vale $-5/4$.

2. L'equazione differenziale è del tipo di Eulero. Facendo la sostituzione $x = e^z$ si ottiene l'equazione a coefficienti costanti:

$$\eta'' - 2\eta' = 0$$

la cui equazione caratteristica ammette le soluzioni $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata all'equazione a coefficienti costanti è allora $\eta(z) = c_1 + c_2 e^{2z}$ da cui si ricava l'integrale generale dell'equazione omogenea associata all'equazione di Eulero:

$$y(x) = c_1 + c_2 x^2.$$

Troviamo ora un integrale particolare dell'equazione completa, usando il metodo della variazione delle costanti. Indicate con $u_1(x) = 1,\ u_2(x) = x^2$ le soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea, ll loro wronskiano dell'equazione è dato dalla matrice:

$$W(x) = \begin{bmatrix} 1, & x^2 \\ 0, & 2x \end{bmatrix}$$

il cui determinante è $\det W(x) = 2x$. La matrice inversa è allora data da

$$[W(x)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & -x/2 \\ 0, & 1/(2x) \end{bmatrix}$$

Calcoliamo allora l'integrale vettoriale:

$$v(x) = \int \log x \begin{bmatrix} -x/2 \\ 1/(2x) \end{bmatrix} dx,$$

cioè gli integrali:

$$v_1(x) = -\frac{1}{2}\int x \log x dx = -\frac{1}{4}x^2 \log x + \frac{1}{8}x^2$$
$$v_2(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{4}\log^2 x,$$

da cui la soluzione particolare è:

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) \\ &= -\frac{x^2}{4}\log x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^2}{4}\log^2 x \end{aligned}$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = c_1 + c_2 x^2 - \frac{x^2}{4} \log x + \frac{1}{8} x^2 + \frac{x^2}{4} \log^2 x.$$

Per determinare ora la soluzione che rispetta i dati iniziali $y(1) = 0, \;\; y'(1) = 0$ è sufficiente derivare l'integrale generale ed ottenere un sistema di due equazioni nelle incognite c_1, c_2.
L'equazione differenziale poteva anche essere risolta ponendo $z = y'$ ottenendo così un'equazione del primo ordine in z. Risolta questa, si procede per integrazione per ottenere y.

3. Operando la sostituzione suggerita, occorre ricavare x, y in funzione di u, v. Si ottiene:

$$\begin{cases} x = u^{1/3} v^{1/3} \\ y = u^{-1/3} v^{2/3} \end{cases}$$

La trasformazione è ammissibile e il suo determinante jacobiano è dato da $\det J(u,v) = (3u)^{-1}$. L'insieme D si trasforma, come si vede facilmente, nel rettangolo del piano (u,v) dato dalle limitazioni $2 \leq u \leq 3$, $(1/2) \leq v \leq 1$. Pertanto:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2 e^{xy}}{y} dxdy &= \int_{1/2}^{1} \left\{ \int_2^3 \frac{e^v}{3} du \right\} dv \\ &= \frac{1}{6}(e^3 - e^2). \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 23.07.2001

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = x^2y^2(\frac{1}{2} - x + y).$$

2. Calcolare

$$\int_\gamma (x2^{-x} - y)dx - (x - 2y)dy$$

dove γ é la semicirconferenza giacente nel semipiano $y > 0$, congiungente i punti $(0,0)$ e $(2,0)$ e orientata da $(0,0)$ a $(2,0)$.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2y + 2(e^x + x)\sqrt{y} \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

(Suggerimento: l'equazione differenziale é di Bernoulli.)

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 23. 07. 2001

Soluzione del primo esercizio.
Troviamo i punti critici di f ponendo $\nabla f(x,y) = 0$. Risulta

$$f_x'(x,y) = xy^2(1-3x+2y),$$

e

$$f_y'(x,y) = x^2y(1+3y-2x).$$

Le soluzioni del sistema $\nabla f(x,y) = 0$ sono $(x,0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $(0,y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e $(1/5,-1/5)$. Determiniamo ora le derivate parziali seconde. Si ha

$$f_{xx}''(x,y) = y^2(1-6x+2y),$$
$$f_{xy}''(x,y) = 2xy(1-3x+3y),$$
$$f_{yy}''(x,y) = x^2(1+6y-2x).$$

Il determinante della matrice hessiana nei punti $(x,0)$, $(0,y)$ é zero, pertanto non possiamo ancora concludere nulla sulla natura di tali punti, mentre il determinante della matrice hessiana nel punto $(1/5,-1/5)$ é maggiore di zero e $f_{xx}''(1/5,-1/5) < 0$, quindi $(1/5,-1/5)$ é un punto di massimo relativo. Per stabilire la natura degli altri punti critici, osserviamo che $f(x,y)$ é positiva nei punti del piano (x,y) con $x \neq 0$, $y \neq 0$, e $y > x - 1/2$, mentre é negativa nei punti del piano (x,y) con $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $y < x - 1/2$ ed infine é nulla nei punti $(x,0)$, $(0,y)$ e $(x,x-1/2)$. Pertanto i punti $(x,0)$ con $x > 1/2$ sono di massimo relativo, i punti $(x,0)$ con $x < 1/2$ sono di minimo relativo, i punti $(0,y)$ con $y > -1/2$ sono di minimo relativo, i punti $(0,y)$ con $y < -1/2$ sono di massimo relativo, i punti $(1/2,0)$ e $(0,-1/2)$ sono di sella.

Soluzione del secondo esercizio
Posto $\omega = Xdx + Ydy$ con $X = x2^{-x} - y$ e $Y = 2y - x$ si ha che ω é chiusa in $\mathbb{R}^2$, essendo $X_y' = -1 = Y_x'$, e pertanto é esatta. Pertanto per calcolare l'integrale richiesto é sufficiente trovare una primitiva F di ω. Risulta

$$F(x,y) = \int(-x+2y)dy = -xy + y^2 + \varphi(x).$$

Determiniamo $\varphi(x)$ imponendo la condizione $F_x^{'}(x,y) = Y_x^{'}(x,y)$. Si ottiene $\varphi^{'}(x) = x2^{-x}$ da cui, integrando,

$$\varphi(x) = \int x2^{-x} dx.$$

Risolvendo per parti l'integrale si ha

$$\varphi(x) = -\frac{2^{-x}}{\log 2} \cdot (1/\log 2 + x).$$

Quindi

$$F(x,y) = -xy + y^2 - \frac{2^{-x}}{\log 2} \cdot (1/\log 2 + x).$$

Infine

$$\int_\gamma \omega = F(2,0) - F(0,0) = \frac{1}{4\log^2 2}(3 - 2\log 2).$$

Soluzione del terzo esercizio

La funzione $f(x,y) = 2y + 2(e^x + x)\sqrt{y}$ é definita e continua nei punti (x,y) con $y \geq 0$. Inoltre f in un intorno del punto $(0,4)$ é di classe C^1. Quindi esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy. Risolviamo l'equazione differenziale. Posto $z = \sqrt{y}$ si perviene all'equazione differenziale lineare

$$z^{'} = z + e^x + x,$$

le cui soluzioni sono

$$z(x) = xe^x - x - 1 + ce^x,$$

e quindi

$$y(x) = (xe^x - x - 1 + ce^x)^2.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 4$ si ottiene $c = 3$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova dell' 8.09.2001

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{xy},$$

sull'insieme

$$E = \{(x,y) \in R / x^2 + y^2 = 1\}.$$

2. Calcolare il seguente integrale superficiale

$$\int_{\Sigma} \frac{x}{\sqrt{1+\sin^2 y}} ds$$

dove Σ é la porzione di superficie di equazione

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ \\ y = v \\ \\ z = \cos v \end{cases}$$

con $v \in [0,u]$ e $u \in [0,\pi/2]$.

3. Data l'equazione differenziale

$$x^2y'' - 4y = x\log x$$

determinare le soluzioni $y(x)$ per le quali esiste finito il $\lim_{x\to 0^+} y(x)$.

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello dell' 8. 09. 2001

Soluzione del primo esercizio.

Poiché E é compatto e f é continua, per il teorema di Weierstrass la funzione ammette il massimo e il minimo assoluti in E.
Consideriamo la funzione f ristretta alla circonferenza e passiamo a coordinate polari. Si ottiene

$$f(\theta) = e^{\sin\theta\cos\theta}$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$f'(\theta) = e^{\sin\theta\cos\theta}(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta).$$

Studiamo il segno di f'.

$$\cos\theta - \sin\theta \geq 0 \Longleftrightarrow$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/4, \quad \pi/2 < \theta \leq \frac{5}{4}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi < \theta \leq 2\pi.$$

$$\cos\theta + \sin\theta \geq 0 \Longleftrightarrow$$

$$0 \leq \theta < \pi/2, \quad \frac{3}{4}\pi \leq \theta < \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{7}{4}\pi \leq \theta \leq 2\pi.$$

Pertanto f cresce in $(0, \pi/4)$, in $(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi)$ e in $(\frac{7}{4}\pi, 2\pi)$, mentre decresce in $(\pi/4, \frac{3}{4}\pi)$ e in $(\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$. Quindi i candidati ad eseere punti di massimo e minimo assoluti si trovano tra i punti $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $P_3 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $P_4 = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, $P_5 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. Si ha

$$f(P_1) = 1,$$

$$f(P_2) = f(P_4) = \sqrt{e},$$

$$f(P_3) = f(P_5) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Perció P_1, P_4 sono punti di massimo assoluto, mentre P_3, P_5 sono punti di minimo assoluto.

Soluzione del secondo esercizio

$$\varphi_u = (\cos\theta, 0, 0), \quad \varphi_v = (-u\sin\theta, 1, -\sin v).$$

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = |\cos v|\sqrt{\sin^2 v + 1}.$$
$$E = \{(u,v)/0 \le u \le \pi/2, \quad 0 \le v \le u\}.$$

Pertanto

$$\int_\Sigma \frac{x}{\sqrt{1+\sin^2 y}} ds = \int_E u\cos^2 v du dv = \int_0^{\pi/2} u du \int_0^u \cos^2 v dv =$$
$$= \int_0^{\pi/2} u \left[\frac{\sin v \cos v}{2}\right]_0^u du = 1/4 \int_0^{\pi/2} u \sin 2u du + \frac{1}{48}\pi^3 =$$
$$= 1/4 \left[\frac{\sin 2u}{2} - \frac{u\cos 2u}{2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{48}\pi^3 = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{48}\pi^3.$$

Soluzione del terzo esercizio

É un'equazione di Eulero. Risolviamo prima l'omogenea associata. Posto $x = e^z$ e $\eta(z) = y(e^z)$ si ottiene

$$\eta'' - 4\eta = 0$$

la cui equazione caratteristica é

$$\lambda^2 - 4 = 0.$$

Quindi il sistema fondamentale per l'omogenea é

$$\{x^2, \frac{1}{x^2}\}.$$

Determiniamo ora un integrale particolare.

$$\det(\mathrm{W(x)}) = -\frac{4}{\mathrm{x}},$$

$$[W(x)]^{-1} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4x} \\ -\frac{1}{4}x^3 \end{pmatrix},$$

pertanto

$$v(x) = \int \frac{\log x}{x} \begin{pmatrix} \frac{1}{4x} \\ -\frac{1}{4}x^3 \end{pmatrix} dx.$$

$$v_1(x) = \int \frac{\log x}{4x^2} dx = -\frac{1}{4x} \log x - \frac{1}{4x},$$

$$v_2(x) = -1/4 \int x^2 \log x dx = -\frac{1}{12} x^3 \log x + \frac{1}{36} x^3.$$

Quindi

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{4} \log x - \frac{1}{4} x - \frac{1}{12} x \log x + \frac{1}{36} x,$$

e perció l'integrale generale dell'equazione differenziale é

$$y(x) = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2} - \frac{1}{4} \log x - \frac{1}{4} x - \frac{1}{12} x \log x + \frac{1}{36} x.$$

Affinché esista finito il $\lim_{x \to 0^+} y(x)$ deve essere $c_2 = 0$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 29.09.2001

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 - 2$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in R^2 / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 8\}.$$

2. Stabilire se la seguente forma differenziale lineare é esatta nel suo insieme di definizione:

$$\omega(x, y) = x^3 \left[\frac{x^2}{x^2+y^2} + \log(x^2+y^2)\right] dx + y^3 \left[\frac{y^2}{x^2+y^2} + \log(x^2+y^2)\right] dy.$$

3. Dopo aver verificato che $y(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$ é soluzione dell'equazione differenziale

$$(x^3 + x)y'' + 2y' - 2xy = 0,$$

determinare l'integrale generale.

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 29. 09. 2001

Soluzione del primo esercizio.
Troviamo i punti critici di f ponendo $\nabla f(x, y) = 0$. Risulta

$$f'_x(x, y) = 2(x - 2),$$

e

$$f'_y(x, y) = 2(y - 2).$$

La soluzione del sistema $\nabla f(x, y) = 0$ é $(2, 2)$ e tale punto appartiene alla frontiera di E. Pertanto non ci sono punti critici interni ad E. Studiamo quindi la frontiera. Consideriamo la restrizione di f alla retta $y = 0$, con $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$. Si ha

$$g(x) = (x - 2)^2 + 2.$$

Imponendo $g'(x) \geq 0$ si ottengono i punti $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(2\sqrt{2}, 0)$. Esaminiamo ora la restrizione di f alla retta $x = 0$, con $0 \leq y \leq 2\sqrt{2}$. Si ha

$$h(y) = (y - 2)^2 + 2.$$

Analogamente al caso precedente si ottengono i punti $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, 2\sqrt{2})$. Studiamo infine la restrizione di f al quarto di circonferenza, passando a coordinate polari

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos\theta \\ y = 2\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$$

con $\theta \in [0, \pi/2]$. Si ottiene

$$f(\theta) = 14 - 8\sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta).$$

$$f'(\theta) = -8\sqrt{2}(\cos\theta - \sin\theta).$$

Studiando il segno di f' si ha che $f(\theta)$ cresce in $(0, \pi/4)$ e decresce in $(\pi/4, \pi/2)$. Pertanto gli altri punti critici sono $(2, 2)$, $(2\sqrt{2}, 0)$ e $(0, 2\sqrt{2})$.

$$f(0, 0) = 6,$$

$$f(2, 0) = f(0, 2) = 2,$$

$$f(2\sqrt{2}, 0) = f(0, 2\sqrt{2}) = 10 - 8\sqrt{2},$$

$$f(2,2) = -2.$$

Pertanto $(2,2)$ é punto di minimo assoluto, mentre $(0,0)$ é punto di massimo assoluto.

Soluzione del secondo esercizio

Il dominio di ω é $I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$. Verifichiamo la chiusura

$$X'_y = \frac{2x^3y^3}{(x^2+y^2)^2} = Y'_x.$$

Poiché il dominio di ω non é in insieme convesso e nemmeno stellato, la chiusura non implica l'esattezza. Per verificare l'esattezza di ω, é sufficiente provare che l'integrale curvilineo di ω lungo la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio unitario é nullo. Passando a coordinate polari si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} [-\sin\theta\cos^5\theta + \sin^5\theta\cos\theta] d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} -\sin\theta\cos^5\theta d\theta + \int_0^{2\pi} \sin^5\theta\cos\theta d\theta = \\
&1/6 \left[\cos^6\theta + \sin^6\theta\right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Quindi ω é esatta in $I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soluzione del terzo esercizio

facilmente si verifica che $y_1(x) = \dfrac{1}{3}x^2 + 1$ é soluzione dell'equazione differenziale. Normalizzando l'equazione si ottiene

$$y'' + \frac{2}{x^3+x}y' - \frac{2}{x^2+1}y = 0.$$

Un'altra soluzione linearmente indipendente é data da

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2(x)} dx,$$

dove $a(x) = \dfrac{2}{x^3+x}$. Usando la formula di Hermite si ha

$$-\int \frac{2}{x(x^2+1)} dx = -\int \frac{2}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= -2\log x + \log(x^2+1) = \log\frac{x^2+1}{x^2}$$

Pertanto

$$y_2(x) = (\frac{1}{3}x^2+1)\int \frac{x^2+1}{[x(1/3x^2+1)]^2}dx = -\frac{1}{x}.$$

Quindi l'integrale generale é

$$y(x) = c_1(\frac{1}{3}x^2+1) - \frac{c_2}{x}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 6.12.2001

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare gli eventueli massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = (1 + x^2 + y)e^{x-y}.$$

Determinare inoltre il massimi e il minimo assoluti della $f(x, y)$ sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in I\!R^2 / |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$

2. Calcolare il seguente integrale

$$\int\int_D \left(2x - \frac{1}{y+1}\right) dxdy,$$

dove D é la regione di piano, contenuta nel primo quadrante, interna alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e appartenente al semipiano $y - x \geq 0$.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (1 - x^4)\dfrac{y}{x} \\ y(1) = e^{3/4} \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 6. 12. 2001

Soluzione del primo esercizio.

Troviamo i punti critici di f ponendo $\nabla f(x,y) = 0$. Risulta

$$f_x^{'}(x,y) = e^{x-y}(x^2 + y + 2x + 1),$$

e

$$f_y^{'}(x,y) = -e^{x-y}(x^2 + y).$$

La soluzione del sistema $\nabla f(x,y) = 0$ é $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$. Determiniamo ora le derivate parziali seconde. Si ha

$$f_{xx}^{''}(x,y) = e^{x-y}(x^2 + 4x + 3 + y),$$

$$f_{xy}^{''}(x,y) = -e^{x-y}(x^2 + 2x + y),$$

$$f_{yy}^{''}(x,y) = e^{x-y}(x^2 + y - 1).$$

Il determinante della matrice hessiana nel punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ é $-2e^{-\frac{1}{2}}$ e dunque tale punto é un punto sella.

Determiniamo ora il massimo e il minimo assoluto di f in E, che esistono essendo E compatto e f continua. Studiamo f ristretta alla frontiera di E. Sulla retta

$$r_1 = \begin{cases} x = 1 \\ y = y \end{cases}$$

con $-1 \leq y \leq 1$, f decresce. Sulla retta

$$r_2 = \begin{cases} x = x \\ y = 1 \end{cases}$$

con $-1 \leq x \leq 1$, f cresce. Sulla retta

$$r_3 = \begin{cases} x = -1 \\ y = y \end{cases}$$

con $-1 \leq y \leq 1$, f decresce. Sulla retta

$$r_4 = \begin{cases} x = x \\ y = -1 \end{cases}$$

con $-1 \le x \le 1$, $\quad f$ ha un punto di massimo relativo in $x = 0$. Pertanto i punti candidati ad essere di massimo e minimo assoluto vanno ricercati tra i punti $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(0,-1)$. Si ha

$$f(1,1) = 3,$$

$$f(-1,1) = 3e^{-2},$$

$$f(-1,-1) = 1,$$

$$f(1,-1) = e^2,$$

$$f(0,-1) = 0.$$

Quindi il massimo assoluto é e^2 ed é assunto in $(1,-1)$, mentre il minimo assoluto é 0 ed é assunto in $(0,-1)$.

Soluzione del secondo esercizio

Usando le formule di Green, si ottiene

$$\int\int_D \left(2x - \frac{1}{y+1}\right) dxdy = -\int_{+Fr(D)} \frac{x}{y+1} dy - \int_{+Fr(D)} 2xydx =$$
$$= -\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{t+1} dt - 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta} d\theta + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin^2\theta d\theta =$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \log(\frac{\sqrt{2}}{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{6} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta} d\theta + \frac{2}{3}[\sin^3\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \log(\frac{\sqrt{2}}{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} =$$
$$= \log(\frac{\sqrt{2}}{2}+1) - \frac{\pi}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{3}.$$

Soluzione del terzo esercizio

La funzione $f(x,y) = \dfrac{1-x^4}{x} y$ é definita in $D = \{(x,y) \in I\!R^2 : x \neq 0\}$. Considerato un intorno del punto $(1, e^{3/4}) \in D$ contenuto nel primo quadrante, si ha che f é continua, parzialmente serivabile rispetto ad y con f'_y continua. Quindi, per il Teorema di Picard-Peano, il problema di Cauchy

ammette un'unica soluzione.
L'equazione differenziale é a variabili separabili. Integrando si ottiene

$$\int y^{-1} dy = \int \frac{1 - x^4}{x} dx,$$

da cui

$$\log y = \log x - \frac{1}{4} x^4 + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Quindi

$$y(x) = x e^{c - \frac{x^4}{4}}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = e^{\frac{3}{4}}$ si trova $c = 1$. Dunque l'unica soluzione del problema di Cauchy é

$$y(x) = x e^{1 - \frac{x^4}{4}}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 10.01.2002

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_\Sigma z dS$$

dove Σ é la parte di superficie $z = xy$ che si proietta sull'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x\sqrt{3}\}.$$

3. Tra tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y'' + y' - 2y = e^x$$

determinare quella per la quale $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$.

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 10. 01. 2002

Soluzione del primo esercizio.

La funzione è continua sull'insieme E e quindi ammette massimo e minimo assoluti. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Risulta

$$F(x, y, z, \lambda) = (x + y)z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Pertanto il sistema è il seguente:

$$\begin{cases} z + 2\lambda x = 0 \\ z + 2\lambda y = 0 \\ x + y + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$P_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$P_4 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$P_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$P_6 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Calcoliamo ora il valore assunto da f nei sei punti trovati:

$$f(P_1) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f(P_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f(P_3) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f(P_4) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$f(P_5) = f(P_6) = 0.$$

Pertanto il massimo assoluto è $\frac{1}{\sqrt{2}}$, assunto nei punti P_1 e P_4, mentre il minimo assoluto è $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, assunto nei punti P_2 e P_3.

Soluzione del secondo esercizio

Risulta
$$\int_\Sigma z dS = \int \int_D xy\sqrt{1+x^2+y^2} dx dy.$$
Passando a coordinate polari, si ottiene
$$\int_\Sigma z dS = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1+\rho^2} d\rho.$$
Per quanto riguarda il secondo integrale, operando la sostituzione $1+\rho^2 = t^2$ si ha
$$\int_0^1 \rho^3 \sqrt{1+\rho^2} d\rho = \int_1^{\sqrt{2}} t^2(t^2-1) dt = \frac{2+2\sqrt{2}}{15},$$
mentre per il primo integrale si ha
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2\vartheta d\vartheta = \frac{3}{8}.$$
Pertanto
$$\int_\Sigma z dS = \frac{1+\sqrt{2}}{20}.$$

Soluzione del terzo esercizio

L'equazione differenziale è a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è
$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$
che fornisce le soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$. Pertanto l'integrale generale dell' omogenea è
$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Ora, poichè $\alpha = 1$ è soluzione dell'equazione caratteristica e $2\alpha + a = 3$, un integrale particolare dell'equazione è

$$\gamma(x) = \frac{1}{3} x e^x.$$

Quindi, le soluzioni dell'equazione sono

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{3} x e^x.$$

Le soluzioni che verificano la condizione

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$$

sono quelle con $c_2 = 0$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 05.04.2002

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi della funzione
$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

2. Stabilire se la forma differenziale lineare definita dalla
$$\omega = \frac{y}{y^2 + (x-2)^2} dx + \frac{2-x}{y^2 + (x-2)^2} dy,$$
è esatta nel suo dominio di definizione.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{x^2+1} y + \dfrac{1}{(x^2+1)^2} \\ \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 5.04.2002

Soluzione del primo esercizio

Imponendo la condizione $\nabla f = 0$ si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$$

che fornisce le soluzioni

$$P_1 = (0,0),\ P_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ P_3 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Studiamo la natura di tali punti utilizzando la matrice Hessiana. Risulta

$$f''_{xx} = 4(3x^2 - 1),$$

$$f''_{xy} = 4,$$

$$f''_{yy} = 4(3y^2 - 1).$$

Calcolando il determinate dell'Hessiana nei tre punti si ottiene

$$|H(P_2)| > 0,$$

cioè P_2 è un punto di minimo relativo,

$$|H(P_3)| > 0,$$

cioè P_3 è un altro punto di minimo relativo, mentre

$$|H(p_1)| = 0.$$

Per stabilire la natura del punto P_1 consideriamo la restrizione di f alla retta $r : y = 0$ e poi alla retta $r' : y = x$. Nel primo caso si ottiene che il punto $x = 0$ è di massimo relativo per $f_{|r}$, mentre nel secondo caso si ottiene che $x = 0$ è un punto di minimo relativo per $f_{|r'}$, pertanto il punto P_1 è un punto sella.

Soluzione del secondo esercizio

La funzione $f(x,y) = -\dfrac{x}{x^2+1}y + \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ è continua in $I\!R^2$. Inoltre f'_y è continua. Pertanto, per il Teorema di Picard-Peano, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione. Risolviamo dunque l'equazione differenziale. Risulta

$$y(x) = e^{\int \alpha(x)dx} \left\{ c + \int \beta(x) e^{-\int \alpha(x)dx} dx \right\},$$

dove $\alpha(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$ e $\beta(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$. Si ha

$$\int \alpha(x)dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1),$$

mentre

$$\int \beta(x) e^{-\int \alpha(x)dx} dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Pertanto

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left\{ c + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right\}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 2$ si ottiene $c = 2$.

Soluzione del terzo esercizio

Facilmente si verifica che ω è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$. Valutiamo ora

$$\int_C \omega,$$

dove C è la circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio 1, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Si ottiene quindi

$$\int_C \omega = -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -2\pi \neq 0,$$

e pertanto ω non è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 29.06.2002

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 2x - 2y,$$

soggetta al vincolo

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

2. Sia γ la curva in $\mathbb{R}^2$ di equazioni paramentriche

$$\begin{cases} x(t) = (t+1)e^t \\ \\ y(t) = 2t - t^2 \end{cases}$$

con $t \in [0, 1]$.
Calcolare l'area della regione di piano D delimitata dalla curva γ e dalle rette di equazioni $y = 0,\ x = 2e$.

3. Data l'equazione differenziale

$$x^2 y'' + 3xy' - 3y = x^2 e^x$$

determinare le soluzioni $y(x)$ per le quali $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$.

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 29. 06. 2002

Soluzione del primo esercizio.
Poichè la funzione è continua in $\mathbb{R}^3$ e il vincolo è un insieme compatto, per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto. Esplicitiamo il vincolo rispetto a z^2. Pertanto dobbiamo ricercare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione di due variabili $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 4$ sull'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Troviamo i punti critici interni a D di g ponendo $\nabla g(x, y) = 0$. Risulta

$$g_x^{'}(x, y) = 2x - 2,$$

e

$$g_y^{'}(x, y) = 4y - 2.$$

La soluzione del sistema $\nabla g(x, y) = 0$ é $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, che è un punto interno a D. Studiamo ora g ristretta alla frontiera di D. Parametrizzando la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$, si ottiene la funzione

$$h(t) = 4\cos^2 t + 8\sin^2 t - 4\cos t - 4\sin t + 4,$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Determiniamo ora gli zeri di h'. Si ha

$$h'(t) = \sin 2t + \sin t - \cos t.$$

Risolvendo l'equazione $\sin 2t = \cos t - \sin t$ graficamente, si ottiene $h'(t) = 0$ per $t = t_1$ e $t = t_2$, dove $0 < t_1 < \dfrac{\pi}{4}$ e $\pi < t_2 < \dfrac{3\pi}{2}$.
Abbiamo così trovato i seguenti punti critici:

$$P_1 = \left(1, \frac{1}{2}\right),$$

$$P_2 = (2\cos t_1, 2\sin t_1),$$

$$P_3 = (2\cos t_2, 2\sin t_2).$$

Ponendo $x_i = 2\cos t_i$, $y_i = 2\sin t_i$, con $i = 1, 2$, si ottiene

$$f(P_1) = \frac{5}{2},$$

$$f(P_2) = x_1^2 + 2y_1^2 - 2x_1 - 2y_1 + 4,$$
$$f(P_3) = x_1^2 + 2y_1^2 - 2x_1 + 2y_1 + 4.$$

Quindi $f(P_2) < f(P_3)$. Inoltre $f(P_3) > 4$ e quindi possiamo concludere che P_2 è punto di minimo assoluto, mentre P_3 è punto di massimo assoluto.

Soluzione del secondo esercizio

Usando le formule di Green, si ottiene

$$\begin{aligned} m(D) &= \int_{+Fr(D)} x dy = \\ &= \int_0^1 2e dy - \int_0^1 (t+1)e^t(2-2t)dt = \\ &= 2 + 2\int_0^1 t^2 e^t dt. \end{aligned}$$

Utilizzando la formula di integrazione per parti, si ottiene infine

$$m(D) = 2e - 2.$$

Soluzione del terzo esercizio

L'equazione omogenea associata è un'equazione di Eulero. Posto $e^z = x$ si ottiene la seguente equazione a coefficienti costanti:

$$\eta'' + 2\eta' - 3\eta = 0,$$

che ammette il sistema fondamentale di soluzioni $\{e^z, e^{-3z}\}$. Pertanto, l'integrale generale della omogenea è

$$y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x^3},$$

con $c_1, c_2 \in I\!R$.

Determiniamo ora un integrale particolare, utilizzando il metodo della variazione delle costanti.

$$v(x) = \int f(x)[W(x)]^{-1} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx,$$

dove $f(x) = e^x$ e

$$[W(x)]^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4x} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{x^3}{4} & -\dfrac{x^4}{4} \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$v_1(x) = \frac{1}{4}\int e^x dx = \frac{1}{4}e^x,$$

$$\begin{aligned} v_2 &= -\frac{1}{4}\int x^4 e^x dx = \\ &= e^x\left(-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right). \end{aligned}$$

Quindi la soluzione dell'equazione data è

$$y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x^3} + e^x\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right).$$

La soluzione che verifica la condizione richiesta si ottiene ponendo $c_1 = 0$.

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio
appello del 07.09.2002

1. Essendo
$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=1,$$
si ha subito $f'_x(0,0)=1$. Analogamente risulta $f'_y(0,0)=2$. Se f fosse differenziabile si avrebbe
$$f(h,k)-f(0,0)=hf'_x(0,0)+kf'_y(0,0)+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$
cioè
$$\frac{h^2-2k^2}{h-k}=h+2k+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$
da cui ricavando $\varepsilon(h,k)$,
$$\varepsilon(h,k)=-\frac{hk}{(h-k)\sqrt{h^2+k^2}},$$
che non è infinitesimo, come facilmente si verifica passando in cordinate polari, per $(h,k)\to(0,0)$. Quindi la f non è differenziabile nell'origine.

Un metodo alternativo consiste nel far vedere che la f non è continua nell'origine. Tuttavia la prova che il limite per $(x,y)\to(0,0)$ non è uniforme rispetto all'argomento ϑ non è in tal caso agevole.

2. Indicato con D il solido in questione, occorre calcolare l'integrale doppio:
$$volD=\iint_C y\,dxdy,$$
dove $C=\{(x,y)\in I\!R^2 : x^2+y^2\le a^2,\ \ x\ge 0,\ y\ge 0\}$. Si ha facilmente passando a coordinate polari:
$$\begin{aligned} volD &= \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^a \rho^2\sin\vartheta d\rho \\ &= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta d\vartheta=\frac{a^3}{3}. \end{aligned}$$

3. L'equazione è del tipo di Eulero. Due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata sono date da

$$u_1(x) = x^{-1/2}, \quad u_2(x) = x^2,$$

definite per $x > 0$. Per ottenere una soluzione particolare dell'equazione completa, una tale soluzione può essere facilmente ricercata tra le funzioni lineari del tipo $ax+b$. Tuttavia si può seguire il metodo della variazione delle costanti. La matrice wronskiana delle soluzioni $\{u_1, u_2\}$ ha determinante uguale a $(5/2)x^{1/2}$, e la matrice inversa è data da:

$$[W(x)]^{-1} = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 2x^{1/2}, & -\,x^{3/2} \\ x^{-2}/2, & x^{-1} \end{bmatrix}.$$

Pertanto un integrale particolare avrà la forma

$$u(x) = u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x),$$

dove la funzione vettoriale $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$, è data dalla formula:

$$v(x) = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x} \begin{bmatrix} 2x^{1/2}, & -\,x^{3/2} \\ x^{-2}/2, & x^{-1} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dx.$$

Risulta

$$v_1(x) = -(2/15)x^{3/2}, \quad v_2(x) = -(1/5)x^{-1},$$

da cui segue facilmente $u(x) = -x/3$. L'integrale generale dell'equazione è allora dato da:

$$\eta(x) = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^2 - x/3,$$

per ogni $x > 0$. Per determinare ora la soluzione del problema di Cauchy basterà utilizzare i dati iniziali per ottenere $c_1 = 62/15$, $c_2 = 6/5$ e quindi la soluzione:

$$y(x) = \frac{62}{15}x^{-1/2} + \frac{6}{5}x^2 - \frac{x}{3}.$$

Universitá degli Studi di Perugia - Facoltá di Ingegneria

Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa (c.l. Ambiente-Territorio)- Appello del **07.09.2002**

Risolvere gli esercizi seguenti:

1. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x - y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Calcolare, se esistono, le derivate parziali prime nell'origine e dire inoltre se in tale punto la f é anche differenziabile.

2. Determinare il volume del solido che si trova nel primo ottante, dentro il cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ e sotto il piano $z = y$.

3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2x^2y'' - xy' - 2y = x, \\ y(1) = 5, \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio
appello del 28.09.2002

1. Considerata l'equazione

$$f(x,y) \equiv x^3y + (x-1)e^y - xy + 5 = 0,$$

in corrispondenza di $x = 0$ otteniamo l'unica soluzione $y = \log 5$. Dunque l'unico punto soluzione sull'asse y è il punto $(0, \log 5)$. Calcoliamo ora il gradiente f. Risulta:

$$f'_x(x,y) = 3x^2y + e^y - y, \quad f'_y(x,y) = x^3 + xe^y - e^y - x,$$

e $f'_y(0, \log 5) = -5 \neq 0$, per il teorema di Dini sulle funzioni implicite, l'equazione è localmente esplicitabile rispetto ad y e la funzione $y = y(x)$ è di classe C^1. Essendo

$$y'(0) = -\frac{f'_x(0, \log 5)}{f'_y(0, \log 5)} > 0,$$

per il teorema della permanenza del segno esiste un intervallo contenente 0 ove risulta $y'(x) > 0$, pertanto ivi la y è crescente.

2. La curva $\mathcal{C}$ ha equazioni parametriche $\varphi(t) = (t, t^2)$, per $t \in [0, 1]$. Occorre allora calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} X dx + Y dy &= \int_0^1 \left(\frac{t^3}{t^2+1}\right) dt + \int_0^1 2t^4 dt \\
&= \int_0^1 \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right) dt + \frac{2}{5} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{2}{5} = \frac{9}{10} - 2\log 2.
\end{aligned}$$

3. L'equazione è del tipo di Bernoulli. Ponendo $z = \sqrt{y}$ ci riduciamo alla equazione lineare

$$z' = -\frac{1}{x+1} z + \frac{1}{2(x^2-1)},$$

il cui integrale generale, per $x > 1$, è dato da

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\int \frac{1}{x+1}dx} \left\{ \int \frac{1}{2(x^2-1)} \, e^{\int \frac{1}{x+1}dx} dx \right\} \\ &= \frac{c}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{\log(x-1)}{x+1}. \end{aligned}$$

L'integrale generale dell'equazione originale è dato allora da

$$y(x) = \left(\frac{c}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{\log(x-1)}{x+1} \right)^2.$$

Per selezionare la soluzione che soddisfa al dato iniziale, è sufficiente ricavare c dalla relazione

$$(c + 1/2)^2 = (e + 2)^2.$$

La relazione suddetta fornisce due valori di c, uno positivo e l'altro negativo. Tenendo conto che deve essere $y \geq 0$, sceglieremo la radice positiva:

$$c = \sqrt{\frac{1}{4} + (e+2)^2} - \frac{1}{2}.$$

Universitá degli Studi di Perugia - Facoltá di Ingegneria

Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa (c.l. Ambiente-Territorio)- Appello del **28.09.2002**

Risolvere gli esercizi seguenti:

1. Data l'equazione

$$x^3 y + (x-1)e^y - xy + 5 = 0,$$

mostrare che essa possiede un unico punto soluzione sull'asse y. Inoltre provare che in un intorno di tale punto essa definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ che è crescente in un intorno dell'origine.

2. Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+1},\ xy \right),$$

per spostare un punto P dall'origine $(0,0)$ al punto $(1,1)$ lungo la parabola $y = x^2$.

3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2}{x+1} y = \dfrac{\sqrt{y}}{x^2-1}, \\ \\ y(e+1) = 1. \end{cases}$$

Universitá degli Studi di Perugia - Facoltá di Ingegneria

Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa (c.l. Ambiente-Territorio)- Appello del **9.12.2002**

Risolvere gli esercizi seguenti:

1. Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione:

$$f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)},$$

nell'insieme $A = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 4\}$, e i punti del dominio ove vengono assunti.

2. Si consideri la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = (x - y + \log(y+1))dx + (2y - x + \frac{x}{y+1})dy.$$

Dire se ω è esatta nel sempiano $y > -1$ e in caso affermativo calcolare le primitive. Determinare infine quella primitiva $P(x,y)$ tale che $P(0,0) = 1$.

3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{y'^2}{x^3} = 0, \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio
appello del 09.12.2002

1. Considerata la funzione $f(x, y) = x^2ye^{-(x+y)}$, si osservi anzitutto che esistono il massimo ed il minimo assoluti, essendo f continua e l'insieme A chiuso e limitato, grazie al teorema di Weierstrass. Dall'esame del segno (positivo) della funzione in A, è ovvio che il minimo assoluto vale 0 ed è assunto dalla funzione nei punti del tipo $(x, 0)$, $0 \leq x \leq 4$ e nei punti $(0, y)$, $0 \leq y \leq 4$, che appartengono alla frontiera. Non ci sono altri punti in A ove la f si annulla. Per la ricerca del punto ove il massimno viene assunto, consideriamo intanto i punti interni ad A. Si ha

$$\nabla f(x, y) = (xye^{-(x+y)}(2 - x),\ x^2e^{-(x+y)}(1 - y)) = (0, 0) \text{ in } A^\circ$$

se e solo se $(x, y) = (2, 1)$. Tale punto, esaminando la matrice hessiana, è un massimo relativo (tuttavia lo studio della matrice hessiana non è necessario, perchè stiamo cercando i punti di minimo e massimo assoluti). Il valore che f assume in $(2, 1)$ è $4e^{-3}$. Esaminiamo ora la frontiera di A. Sui segmenti $(x, 0)$, $0 \leq x \leq 4$ e $(0, y)$, $0 \leq y \leq 4$, abbiamo già detto che f assume il minimo, essendo qui identicamente nulla. Rimane da esaminare il comportamento di f sul segmento di retta $x + y = 4$, $x \in [0, 4]$. La restrizione di f su tale segmento è determinata dalla funzione di una variabile

$$g(x) = x^2(4 - x)e^{-4},\ x \in [0, 4].$$

La derivata di g si annulla in $x = 8/3$ e in tale punto si ha un massimo per la g. In corrispondenza, il valore che f assume nel punto $(x, y) = (8/3, 4/3)$ è $e^{-4}256/27$, che è più piccolo di $4e^{-3}$. Pertanto il massimo assoluto è $4e^{-3}$, assunto nel punto (interno) $(2, 1)$.

2. La forma differenziale ω è di classe C^1, è definita sul convesso $\{(x, y) : y > -1\}$ e pertanto per provare che è esatta è sufficiente provare che è chiusa. Questo si verifica facilmente. Calcoliamo allora le primitive. Possiamo procedere in questo modo: se $P(x, y)$ è una primitiva allora deve risultare

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \int [x - y + \log(y+1)]dx + \varphi(y) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - xy + x\log(y+1) + \varphi(y), \end{aligned}$$

dove qui φ è un'arbitraria funzione di classe C^1, definita almeno per $y > -1$. Derivando ora rispetto ad y deve risultare

$$P'_y(x,y) = 2y - x + \frac{x}{y+1}, \quad \text{per ogni } (x,y),\ y > -1.$$

Da questa segue subito che deve essere $\varphi'(y) = 2y$, e quindi $\varphi(y) = y^2 + c$, con c costante arbitraria. Infine la primitiva che assume il valore 1 nell'origine si ottiene con $c = 1$, cioé

$$P(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - xy + x\log(y+1) + y^2 + 1.$$

3. L'equazione puó essere facilmente ricondotta ad una equazione del primo ordine ponendo $z = y'$. In tal modo ci riduciamo alla equazione

$$z' - \frac{z^2}{x^3} = 0,$$

che è a variabili separabili:

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^3},$$

il cui integrale generale è dato da

$$z(x) = \frac{2x^2}{1 - 2cx^2}.$$

Dovendo essere $y'(1) = 1$, si ha $z(1) = 1$, da cui si ricava $c = -1/2$. Si ha quindi:

$$z(x) = \frac{2x^2}{x^2+1},$$

Per ottenere ora la soluzione del nostro problema, è sufficiente risolvere l'equazione $y' = z$, che ha soluzioni

$$y(x) = \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx + k, \quad k \in I\!R.$$

Si ottiene $y(x) = 2(x - \arctan x) + k$. Dovendo essere $y(1) = 2$ ricaviamo facilmente $k = \pi/2$, cioè

$$y(x) = 2(x - \arctan x) + \pi/2.$$

Universitá degli Studi di Perugia - Facoltá di Ingegneria

Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa (c.l. Ambiente-Territorio)-
Appello del **10.01.2003**

Risolvere gli esercizi seguenti:

1. Determinare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^2, -2xy, 10z),$$

uscente dalla frontiera della regione A del primo ottante delimitata dai piani coordinati e dal piano di equazione $2x + 2y + z = 2$.

2. Determinare i punti più vicini all'origine degli assi, sulla curva di intersezione delle due superfici

$$x^2 - xy + y^2 - z = 1, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

(Suggerimento: trovare una rappresentazione parametrica della curva).

3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y'' - 6y = x\sqrt{x}, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio
appello del 10.01.2003

1. Utilizziamo il teorema della divergenza. Risulta div$F$ $= 2x - 2x + 10 = 10$, e quindi si ha:

$$\text{flusso } F = \iiint_D 10 dxdydz,$$

dove D è la regione del primo ottante delimitata dai piani coordinati e dal piano di equazione $2x + 2y + z = 2$. Si ha:

$$\text{flusso } F = 10 \int_0^2 dz \iint_{D(z)} dxdy = \frac{10}{8} \int_0^2 (2 - z)^2 dz = \frac{10}{3}.$$

2. Troviamo innanzi tutto l'equazione parametrica della curva determinata dalle equazioni:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione poniamo $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, con $t \in [0, 2\pi]$. Infine dalla prima ricaviamo subito $z(t) = -\cos t \sin t = -(1/2) \sin 2t$. Pertanto la curva ha rappresentazione parametrica:

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, \frac{1}{2} \sin 2t), \ \ t \in [0, 2\pi].$$

Determiniamo ora i punti di coordinate $\varphi(t)$ che hanno minima distanza dall'origine. Possiamo considerare per semplicità i punti che minimizzano il quadrato della distanza, cioè determiniamo i punti di minimo assoluto della funzione:

$$F(t) = |\varphi(t) - O|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + \frac{1}{4} \sin^2 2t = 1 + \frac{1}{4} \sin^2 2t,$$

sull'intervallo $[0, 2\pi]$. Essendo $F(t) \geq 1$, per ogni $t \in [0, 2\pi]$, questi saranno quei punti per i quali $\sin^2 2t = 0$. Questa è vera per $t = 0, \ \pi/2, \ \pi, (3/2)\pi, \ 2\pi$, che danno i punti $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0)$, che distano 1 dall'origine.

3. L'equazione è del tipo di Eulero. L'equazione omogenea associata ha soluzioni $u_1(x) = x^{-2}$, $u_2(x) = x^3$, per $x > 0$. L'equazione omogenea associata ha allora l'integrale generale:

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x),$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie. La matrice Wronskiana di u_1, u_2, è allora:

$$W(x) = \begin{bmatrix} u_1(x), & u_2(x) \\ u_1'(x), & u_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/x^2, & x^3 \\ -2/x^3, & 3x^2 \end{bmatrix},$$

e la sua inversa è data quindi da:

$$W^{-1}(x) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3x^2, & -\,x^3 \\ 2/x^3, & 1/x^2 \end{bmatrix}.$$

La soluzione particolare è del tipo $v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x)$, dove $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$ si determina con l'integrale:

$$v(x) = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\sqrt{x}} \begin{bmatrix} 3x^2, & -\,x^3 \\ 2/x^3, & 1/x^2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dx.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= -\frac{1}{5} \int x^{5/2} dx = -\frac{2}{35} x^{7/2} \\ v_2(x) &= \frac{1}{5} \int x^{-5/2} dx = -\frac{2}{15} x^{-3/2}. \end{aligned}$$

Una soluzione particolare è allora data da

$$y(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) = -\frac{4}{21} x^{3/2}.$$

L'integrale generale dell'equazione è quindi

$$\eta(x) = \frac{c_1}{x^2} + c_2 x^3 - \frac{4}{21} x^{3/2}.$$

La soluzione particolare che risolve il problema di Cauchy si ottiene per $c_1 = 1/7$, $c_2 = 1/3$, cioè si ha:

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{7x^2} + \frac{x^3}{3} - \frac{4}{21} x^{3/2}.$$

Universitá degli Studi di Perugia - Facoltá di Ingegneria

Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa (c.l. Ambiente-Territorio)- Appello del **28.03.2003**

Risolvere gli esercizi seguenti:

1. Calcolare l'integrale doppio:

$$\int\int_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}dxdy,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

2. Sia $\omega(x,y) = xydx + ydy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Verificare che se γ è la circonferenza di equazione

$$x^2 + (y-a)^2 = r^2, \quad a \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}^+,$$

risulta:

$$\int_\gamma \omega = 0,$$

per ogni valore di a ed r. Si puó concludere che il campo vettoriale $\Omega(x,y) = (xy, y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, è conservativo?

3. Dopo aver riconosciuto che esso ammette soluzione unica, risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio
appello del 28.03.2003

1. Passando in coordinate polari si ha subito:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}dxdy &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos\theta(\sin\theta)^2 d\theta \int_1^2 \rho^2 d\rho \\ &= \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 = -\frac{7\sqrt{2}}{18}.\end{aligned}$$

2. La circonferenza γ ha equazioni parametriche:

$$r(t) = (x(t), y(t)) = (r\cos t,\ r(a+\sin t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Il vettore derivato è dato da $r'(t) = (-r\sin t,\ r\cos t)$, e quindi usando la definizione di integrale curvilineo si ha:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} [-r^3 \cos t(a+\sin t)\sin t + r^2(a+\sin t)\cos t]dt \\ &= r^2 \left[ar\frac{\cos^2 t}{2} - r\frac{\sin^3 t}{3} + a\sin t - \frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} = 0,\end{aligned}$$

qualunque siano $a \in I\!R$ e $r \in I\!R^+$. Si osservi che questo non implica che il campo vettoriale $\Omega(x,y) = (xy, y)$ sia conservativo. Infatti in tal caso la forma non è chiusa, perchè posto $X(x,y) = xy,\ Y(x,y) = y$, si ha:

$$\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = x \neq \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Ciò non è ovviamente in contraddizione con le classiche condizioni necessarie e sufficienti per l'esattezza perchè le curve γ considerate, costituiscono particolari curve chiuse.

3. L'equazione è lineare e a coefficienti costanti e quindi dalla teoria segue che il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione che soddisfa i

dati iniziali.
Determiniamo prima l'integrale dell'equazione omogenea associata:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

L'equazione caratteristica è $(\lambda - 1)^2 = 0$, che possiede la radice $\lambda = 1$, doppia. Le soluzioni corrispondenti sono allora date da:

$$u_1(x) = e^x,\ u_2(x) = xe^x, \quad x \in I\!R.$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea è pertanto dato da:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x, \quad c_1, c_2 \in I\!R.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, tenendo conto che i coefficienti sono costanti, possiamo utilizzare i metodi particolari. Il secondo membro è $f(x) = e^x$, quindi è del tipo $Ae^{\alpha x}$, con $A = 1$ e $\alpha = 1$. Ora $\alpha = 1$ è soluzione dell'equazione caratteristica ed inoltre, indicato con a il coefficiente di y' cioè $a = -2$, risulta $2\alpha + a = 0$. Pertanto una soluzione particolare è data da $\overline{y}(x) = (x^2/2)e^x$. L'integrale dell'equazione completa è quindi:

$$\eta(x) = y(x) + \overline{y}(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{x^2}{2} e^x,$$

per $x \in I\!R$. Determiniamo infine l'integrale particolare che soddisfa i dati iniziali. Derivando $\eta(x)$ ed imponendo le condizioni iniziali, si ottengono le relazioni:

$$c_1 = 1,\ c_2 + c_1 = 0,$$

da cui si ricava subito $c_1 = 1,\ c_2 = -1$. La soluzione cercata è:

$$u(x) = e^x - xe^x + \frac{x^2}{2} e^x,\ x \in I\!R.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 30.06.2003

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 + 2x,$$

sull'insieme

$$D = \{(x, y) \in I\!R : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

2. Si determini $f : I\!R \to I\!R$, $f \in C^1(I\!R)$, in modo che la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = (\sqrt{y} - 2xy)dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + f(x)\right) dy$$

sia esatta nel suo insieme di definizione. Calcolare poi un potenziale di ω.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^x} \\ \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 30. 06. 2003

Soluzione del primo esercizio.

Poichè la funzione è continua e D è un insieme compatto, per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto. Troviamo i punti critici interni a D ponendo $\nabla f(x,y) = 0$. Risulta

$$f_x'(x,y) = 6x + 2,$$

e

$$f_y'(x,y) = -4y.$$

La soluzione del sistema $\nabla g(x,y) = 0$ é $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, che è un punto interno a D.

Studiamo ora f ristretta alla frontiera di D. Esplicitiamo il vincolo rispetto a y^2: $y^2 = 1 - x^2$. Si tratta quindi di determinare i punti critici della funzione $g(x) = 5x^2 + 2x - 2$ sull'intervallo $[-1, 1]$. Ponendo $g'(x) = 0$ si trova il punto $x = -\frac{1}{5}$. Pertanto i punti critici di f sono:

$$P_1 = \left(-\frac{1}{3}, 0\right),$$

$$P_2 = (1, 0),$$

$$P_3 = (-1, 0),$$

$$P_4 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2\sqrt{6}}{5}\right),$$

$$P_5 = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right).$$

Si ottiene pertanto

$$f(P_1) = -\frac{1}{3},$$

$$f(P_2) = 5,$$

$$f(P_3) = 1,$$

$$f(P_4) = f(P_5) = -\frac{11}{5}.$$

Possiamo quindi concludere che il massimo assoluto è 5 ed è assunto in P_2, mentre il minimo assoluto è $-\dfrac{11}{5}$ ed è assunto nei punti P_4 e P_5.

Soluzione del secondo esercizio

L'insieme di definizione di ω è

$$A = \{(x,y) \in I\!R : y > 0\},$$

che è un insieme convesso. Pertanto la chiusura è equivalente all'esattezza. Posto $X(x,y) = \sqrt{y} - 2xy$ e $Y(x,y) = \dfrac{x}{2\sqrt{y}} + f(x)$, risulta

$$X'_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - 2x$$

$$Y'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} + f'(x).$$

Pertanto $f'(x) = -2x$ da cui $f(x) = -x^2$. Quindi la forma differenziale lineare é

$$\omega(x,y) = (\sqrt{y} - 2xy)dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2\right) dy.$$

Calcoliamo ora un potenziale di ω.

$$F(x,y) = \int (\sqrt{y} - 2xy)dx + \varphi(y) = x\sqrt{y} - x^2 y + \varphi(y).$$

Imponendo infine la condizione

$$F'_y(x,y) = Y(x,y)$$

si trova $\varphi'(y) = 0$ da cui $\varphi(y) = k$ con $k \in I\!R$. Un potenziale di ω é

$$F(x,y) = x\sqrt{y} - x^2 y.$$

Soluzione del terzo esercizio

L'equazione omogenea associata è un'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti, che ammette il sistema fondamentale di soluzioni $\{1, e^x\}$. Pertanto, l'integrale generale della omogenea è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x,$$

con $c_1, c_2 \in I\!R$.
Determiniamo ora un integrale particolare, utilizzando il metodo della variazione delle costanti.

$$v(x) = \int f(x)[W(x)]^{-1} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx,$$

dove $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ e

$$[W(x)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \dfrac{1}{e^x} \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$v_1(x) = -\int \frac{1}{1+e^x} dx.$$

Utilizzando la sostituzione $e^x = t$, si ottiene

$$v_1(x) = -x + \log(e^x + 1).$$

Risulta poi

$$v_2(x) = \int \frac{1}{e^x(e^x+1)} dx$$

e utilizzando di nuovo la sostituzione $e^x = t$, si ottiene

$$v_2(x) = -x - e^{-x} + \log(e^x + 1).$$

Un integrale particolare dell'equazione è quindi

$$\overline{y}(x) = \log(e^x + 1) - x + e^x(\log(e^x + 1) - e^{-x} - x).$$

Quindi la soluzione dell'equazione data è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x - x + \log(e^x + 1) + xe^x - e^x \log(e^x + 1).$$

La soluzione che verifica le condizioni richieste si ottiene dal sistema $c_1 = 1 - 2\log 2 - c_2$ e $c_2 = 1 - \log 2$, che fornisce i risultati $c_1 = -\log 2$, $c_2 = 1 - \log 2$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 16.07.2003

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuitá, calcolare le derivate direzionali uscenti da $(0,0)$ e stabilire se é differenziabile in $(0,0)$.

2. Determinare il flusso del campo $\Omega(x,y) = \left(xy^2 - y^3 \arctan \dfrac{x}{y}, x^2 + 3 \right)$ uscente da $Fr(D)$, dove D é il cerchio centrato nell'origine e di raggio unitario.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{3(2e^{-x} - 1)} y - \dfrac{1}{3}(e^{-x} + 1) y^4 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 16. 07. 2003

Soluzione del primo esercizio.
Studiamo la continuitá nel punto $(0,0)$. Passiamo a coordinate polari:

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\cos 2\theta = 0$$

e

$$\rho \mid \cos\theta\cos 2\theta \mid \leq \rho \to 0.$$

Quindi f é continua in $I\!R^2$.
Calcoliamo ora, se esistono, le derivate direzionali uscenti da $(0,0)$. Posto $\nu = (tv_1, tv_2)$ risulta:

$$\lim_{t\to 0}\frac{tv_1(t^2v_1^2 - t^2v_2^2)}{t^3v_1^2 + t^3v_2^2} = \frac{v_1(v_1^2 - v_2^2)}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Pertanto esistono tutte le derivate direzionali uscenti da $(0,0)$. In particolare, si ha $f'_x(0,0) = 1$ e $f'_y(0,0) = 0$.
Studiamo ora la differenziabilitá in $(0,0)$. Se f fosse differenziabile in $(0,0)$, allora si avrebbe:

$$f(x,y) = x + \sqrt{x^2+y^2}\varepsilon(x,y)$$

con $\varepsilon(x,y)$ infinitesimo per $(x,y)\to(0,0)$. Ricaviamo $\varepsilon(x,y)$:

$$\varepsilon(x,y) = \frac{-2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}.$$

Passando a coordinate polari si ha:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{-2\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^3} = -2\cos\theta\sin^2\theta.$$

Quindi f non é differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione del secondo esercizio
Utilizziamo il Teorema della divergenza:

$$Flusso = \int\int_D div\Omega(x,y)dxdy.$$

Risulta:

$$div\Omega(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2},$$

quindi dobbiamo calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}dxdy.$$

Passiamo a coordinate polari:

$$\int\int_D \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta\right) d\rho =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta\right) d\rho$$

Utilizzando la formula di integrazione per parti si ottiene:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

In conclusione

$$\int\int_D \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}dxdy = \frac{\pi}{16}.$$

Soluzione del terzo esercizio

L'equazione differenziale é di Bernoulli. Ponendo $y^{-3} = z$ l'equazione diventa:

$$z' = \frac{1}{2e^{-x}-1}z + e^{-x} + 1,$$

che é lineare in z. Risulta:

$$\int \frac{1}{2e^{-x}-1}dx = -x - \log(2e^{-x}-1),$$

avendo effettuato la sostituzione $e^{-x} = t$. Chiaramente

$$e^{-x-\log(2e^{-x}-1)} = \frac{e^{-x}}{2e^{-x}-1},$$

e

$$e^{x+\log(2e^{-x}-1)} = e^x(2e^{-x}-1) = 2 - e^x.$$

Risolviamo ora il seguente integrale:

$$\int (1+e^{-x})(2-e^x)dx = \int (1-e^x+2e^{-x})dx = x-e^x-2e^{-x}.$$

Quindi

$$z(x) = \frac{1}{2-e^x}(c+x-e^x-2e^{-x}),$$

da cui

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{2-e^x}{c+x-e^x-2e^{-x}}}.$$

Imponendo la condizione iniziale si trova $c=4$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 6.09.2003

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare i punti di massimo e minimo relativi della funzione

$$f(x,y) = xye^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}}.$$

Determinare poi, dopo averne giustificato l'esistenza, il massimo e il minimo assoluti della funzione sull'insieme

$$E = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}.$$

2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_D y^2 e^{xy} dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2,\ 2 \leq xy \leq 3\}.$$

3. Dopo aver verificato che $y(x) = x^2$ é soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - \frac{2x-2}{x^2-2x}y' + \frac{2}{x^2-2x}y = 0,$$

definita in $I =]2, +\infty)$, determinare l'integrale generale. Determinare poi la soluzione che verifica le condizioni $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 6. 09. 2003

Soluzione del primo esercizio.

La funzione é definita in $I\!R^2$. Il gradiente di f é

$$\nabla f(x,y) = \left(y(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ x(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \right).$$

Le soluzioni del sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ sono:

$$P_1 = (0,0);$$

$$P_2 = (1,1);$$

$$P_3 = (1,-1);$$

$$P_4 = (-1,1);$$

$$P_5 = (-1,-1).$$

Determiniamo ora le derivate parziali seconde:

$$f_{xx}(x,y) = xy(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}};$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}};$$

$$f_{yy}(x,y) = xy(y^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Risulta:

$\mid H(P_1) \mid = -1 < 0$ e quindi P_1 é un punto sella;

$\mid H(P_2) \mid = \mid H(P_5) \mid = 4e^{-2} > 0$ e $f''_{xx}(P_2) = f''_{xx}(P_5) < 0$; pertanto P_2 e P_5 sono punti di masssimo relativo;

$\mid H(P_3) \mid = \mid H(P_4) \mid = 4e^{-2} > 0$ e $f''_{xx}(P_3) = f''_{xx}(P_4) > 0$; pertanto P_3 e P_4 sono punti di minimo relativo.

Essendo f continua su E, che é un insieme compatto, per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti in E. Non essendoci punti di massimo e di minimo in E^0, studiamo f ristretta alla frontiera di E. Passiamo a coordinate polari:

$$f(1/2\cos\theta, 1/2\sin\theta) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{8}}\cos\theta\sin\theta := g(\theta).$$

La derivata prima di g é data da

$$g'(\theta) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{8}}\cos 2\theta.$$

Le soluzioni di $g'(\theta) = 0$ sono $\theta = \frac{\pi}{4}$, che fornisce il punto $Q_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$, che fornisce il punto $Q_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\theta = \frac{5}{4}\pi$, che fornisce il punto $Q_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ e $\theta = \frac{7}{4}\pi$, che fornisce il punto $Q_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Si ha

$$f(Q_1) = f(Q_3) = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}},$$

$$f(Q_2) = f(Q_4) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}.$$

Quindi il massimo assoluto é $\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$, mentre il minimo assoluto é $-\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}}$.

Soluzione del secondo esercizio

Effettuando la sostituzione $u = x$, $v = xy$, l'insieme D diventa

$$T = \{(u, v) \in I\!R^2 / 1 \leq u \leq 2,\ 2 \leq v \leq 3\}.$$

Il determinante della matrice Jacobiana é u^{-1}. L'integrale perció si trasforma nel seguente modo:

$$\int_1^2 u^{-3}du \int_2^3 v^2 e^v dv.$$

Risolvendo il secondo integrale due volte per parti si ottiene:

$$\int_2^3 v^2 e^v dv = e^2(5e - 2).$$

Pertanto il risultato finale é:

$$\int\int_D y^2 e^{xy} dxdy = \frac{3}{8} e^2 (5e - 2).$$

Soluzione del terzo esercizio

Facilmente si verifica che $y_1(x) = x^2$ é soluzione. Un'altra soluzione dell'equazione differenziale é data da:

$$y_2(x) = x^2 \int \frac{e^{\int \frac{2x-2}{x^2-2x} dx}}{x^4} dx.$$

Essendo

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x} dx = \log(x^2 - 2x),$$

si ottiene

$$y_2(x) = x^2 \int \frac{x^2 - 2x}{x^4} dx = 1 - x.$$

L'integrale generale é quindi dato da

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 (1 - x).$$

La soluzione che verifica le condizioni richieste si ottiene per $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 27.09.2003

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = y^2(x^2 + y^2 - 4).$$

2. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_C \tan^2 x dx,$$

dove C é il tratto di curva del grafico della funzione $y = \sin x$ che congiunge i punti $(0,0)$ e $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - 2x - 2xy^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 27. 09. 2003

Soluzione del primo esercizio.
La funzione é definita in $I\!R^2$. Il gradiente di f é

$$\nabla f(x, y) = (2xy^2, 2y(2y^2 + x^2 - 4)).$$

Le soluzioni del sistema $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ sono:

$$P_1 = (x, 0), \ \forall x \in I\!R;$$

$$P_2 = (0, \sqrt{2});$$

$$P_3 = (0, -\sqrt{2}).$$

Determiniamo ora le derivate parziali seconde:

$$f_{xx}(x, y) = 2y^2;$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 4xy;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2(6y^2 + x^2 - 4).$$

Risulta:

$| H(P_1) |= 0;$

$| H(P_2) |=| H(P_3) |= 64$ e $f''_{xx}(P_2) = f''_{xx}(P_3) > 0$; pertanto P_2 e P_3 sono punti di minimo relativo.

Essendo $f(x, 0) = 0$, studiando il segno della funzione, si ha che i punti $(x, 0)$ con $x < -2$ oppure $x > 2$ sono di minimo relativo, i punti $(x, 0)$ con $-2 < x < 2$ sono di massimo relativo, mentre i punti $(\pm 2, 0)$ sono punti sella.

Soluzione del secondo esercizio
Una rappresentazione parametrica della curva C é data da:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sin t \end{cases}$$

con $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
Inoltre, osservando che

$$\tan^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} - 1,$$

si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = [\tan t - t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Soluzione del terzo esercizio

Riscrivendo l'equazione differenziale come $y' = 2x(1+y^2)$, si vede che é a variabili separabili. Si ottiene allora

$$\frac{dy}{1+y^2} = 2xdx,$$

da cui, integrando,

$$\arctan y = x^2 + c,$$

cioé

$$y(x) = \tan(x^2 + c).$$

Imponendo $y(0) = 1$ si ottiene $c = \frac{\pi}{4}$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 9.12.2003

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare i punti di massimo e minimo relativi della funzione

$$f(x,y) = xy\ln(xy^2) + x^2y.$$

2. Calcolare il seguente integrale superficiale

$$\int_\Sigma (z - \frac{1}{2}y^2)dS$$

dove Σ é la parte di superficie che si proietta sull'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 \leq 16$.

3. Dopo avere determinato tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 13y = 26x^2 + 2x + 5,$$

calcolare quella che verifica le condizioni $y(0) = 2$, $y(\pi/4) = \pi^2/8+\pi/4$.

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 9.12.2003

Soluzione del primo esercizio.

Il dominio di f é l'insieme $D = \{(x, y) \in I\!R^2 : y \neq 0,\ x > 0\}$. Troviamo i punti critici di f ponendo $\nabla f(x, y) = 0$. Risulta

$$f_x^{'}(x, y) = y \ln(xy^2) + y + 2xy,$$

e

$$f_y^{'}(x, y) = x \ln(xy^2) + x^2 + 2x.$$

Le soluzioni del sistema $\nabla f(x, y) = 0$ sono $(1, e^{-3/2}) \in D^0$ e $(1, -e^{-3/2}) \in D^0$. Determiniamo ora le derivate parziali seconde. Si ha

$$f_{xx}^{''}(x, y) = \frac{y}{x} + 2y,$$

$$f_{xy}^{''}(x, y) = \ln(xy^2) + 3 + 2x,$$

$$f_{yy}^{''}(x, y) = \frac{2x}{y}.$$

Calcoliamo ora il determinante della matrice hessiana nei punti trovati. Risulta $| H(1, e^{-3/2}) | = 2 > 0$ e $f_{xx}^{''}(1, e^{-3/2}) > 0$. Quindi $(1, e^{-3/2})$ é un punto di minimo relativo. Infine $| H(1, -e^{-3/2}) | = 2 > 0$ e $f_{xx}^{''}(1, -e^{-3/2}) < 0$, pertanto $(1, -e^{-3/2})$ é un punto di massimo relativo.

Soluzione del secondo esercizio

Risulta $dS = \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2 + y^2}\,dxdy$ e quindi l'integrale superficiale si trasforma nell'integrale doppio

$$\int\int_T \frac{1}{4}x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2 + y^2}\,dxdy$$

dove $T = \{(x, y) \in I\!R^2 : x^2 + 4y^2 \leq 16\}$. Passiamo a coordinate polari:

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Il determinante della matrice jacobiana é 2ρ. L'insieme T si trasforma nell'insieme $E = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. L'integrale da calcolare é quindi il seguente:

$$2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^2 \rho^3 \sqrt{1+\rho^2} d\rho.$$

Operando la sostituzione $\sqrt{1+\rho^2} = t$ il secondo integrale diviene:

$$\int_1^{\sqrt{5}} (t^4 - t^2) dt = \frac{50\sqrt{5}+2}{15}.$$

Integrando per parti il primo integrale si ottiene:

$$\int_0^2 \pi \cos^2 \theta d\theta = 1/2[\sin\theta \cos\theta]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Pertanto

$$\int\int_T \frac{1}{4} x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2 + y^2} dxdy = \frac{2}{15}\pi \frac{50\sqrt{5}+2}{15}.$$

Soluzione del terzo esercizio

L'equazione differenziale é lineare e a coefficienti costanti. Determiniamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. La sua equazione caratteristica é $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda = 3 \pm 2i$. L'integrale generale dell'omogenea associata é pertanto

$$c_1 e^{3x} \cos 2x + c_2 e^{3x} \sin 2x,$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Determiniamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa. Essa sará della forma $\overline{y}(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$. Si ha

$$\overline{y}'(x) = 2b_0 + b_1,$$

$$\overline{y}''(x) = 2b_0.$$

Sostituendo nell'equazione e applicando il principio di identitá dei polinomi, si ottiene

$$b_0 = 2,\ b_1 = 2,\ b_2 = 1.$$

L'integrale generale dell'equazione completa é quindi

$$y(x) = c_1 e^{3x} \cos 2x + c_2 e^{3x} \sin 2x + 2x^2 + 2x + 1,$$

con $c_1, c_2 \in I\!R$.
Imponendo le condizioni $y(0) = 2$ e $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2}$, si ottiene $c_1 = 1$ e $c_2 = -e^{-\frac{3}{4}\pi}$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 9.01.2004

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\}.$$

2. Data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = y \log(1 + xy)dx + x \log(1 + xy)dy,$$

stabilire se é esatta nel suo insieme di definizione e, in caso affermativo, calcolare i suoi potenziali.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} \\ \\ y(0) = \dfrac{1}{\log 2} \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 9.1.2004

Soluzione del primo esercizio.
Poiché la funzione f é continua e l'insieme E é compatto, per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti. Determiniamo i punti di massimo e di minimo utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La lagrangiana é:

$$F(x, y, z, \lambda) = (x + y)z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4).$$

Bisogna quindi risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} F'_x = z + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = z + 2\lambda y = 0 \\ F'_z = x + y + z + 2\lambda z = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono: $P_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$, $P_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $P_3 = (1, 1, -\sqrt{2})$, $P_4 = (-1, -1, \sqrt{2})$, $P_5 = (1, 1, \sqrt{2})$, $P_6 = (-1, -1, \sqrt{2})$. Per determinare il massimo e il minimo assoluti é sufficiente calcolare il valore della funzione nei punti trovati. Risulta:

$$f(P_1) = f(P_2) = 0,$$

$$f(P_3) = f(P_4) = -2\sqrt{2},$$

$$f(P_5) = f(P_6) = 2\sqrt{2}.$$

Quindi il massimo assoluto é $2\sqrt{2}$, mentre il minimo assoluto é $-2\sqrt{2}$.

Soluzione del secondo esercizio
Il dominio della forma differenziale lineare é l'insieme $D = \{(x, y) \in I\!R^2 : xy > -1\}$, che é stellato rispetto ad un punto. Quindi la chiusura della f.d.l. implica l'esattezza. Si ha:

$$X'_y(x, y) = \log(1 + xy) + y\frac{x}{1 + xy},$$

$$Y'_x(x, y) = \log(1 + xy) + x\frac{y}{1 + xy},$$

cioé la f.d.l. é chiusa e quindi esatta. Calcoliamo ora i suoi potenziali.

$$P(x,y) = \int y\log(1+xy)dx + \varphi(x) = y\int \log(1+xy)dx + \varphi(x).$$

Integrando per parti si ottiene:

$$P(x,y) = xy\log(1+xy) - y^2\int \frac{x}{1+xy}dx.$$

Eseguendo la divisione tra polinomi si ottiene infine:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= xy\log(1+xy) - y^2\int \frac{1}{y}dx - y\int \frac{1}{xy+1}dx + \varphi(x) = \\ &= xy\log(1+xy) - xy + \log(1+xy) + \varphi(x). \end{aligned}$$

Imponendo la condizione $P'_x(x,y) = Y(x,y)$, si ricava $\varphi'(x) = 0$, da cui $\varphi(x) = c, \ \ c \in I\!R$.

Soluzione del terzo esercizio

Posto, ad esempio, $I =]-\pi/2, \pi/2[$ e $B = I\!R$, la funzione $f(x,y) = y\frac{y\sin x}{1+\cos x}$ é continua e derivabile parzialmente rispetto ad y con derivata continua nell'insieme $I\times B$. Pertanto, in un intervallo contenente $x = 0$ (contenuto in I), esiste un'unica soluzione del problema.
L'equazione differenziale é a variabili separabili. Risulta:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx,$$

da cui si ricava:

$$y(x) = \frac{1}{1+\cos x}e^c,$$

con $c \in I\!R$. Imponendo la condizione iniziale si trova $c = \frac{2}{\log 2}$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 26.03.2004

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dopo aver determinato il dominio D della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{4-(x-1)^2-(y-1)^2},$$

determinare, se esistono, il massimo e il minimo assoluti della funzione f in D.

2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_G xe^y dxdy,$$

dove G é la corona circolare delimitata dalle circonferenze di raggi 1 e 2 centrate nell'origine, contenute nel primo quadrante.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 3-2y \\ \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 26.03.2004

Soluzione del primo esercizio.
Il dominio D della funzione é l'insieme

$$D = \{(x, y) \in I\!R : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\},$$

che rappresenta il cerchio di centro $(1, 1)$ e raggio 2. Chiaramente la funzione f é continua e l'insieme D é compatto, quindi per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti. Determiniamo gli eventualipunti critici in D. Risulta

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{x-1}{\sqrt{4-(x-1)^2-(y-1)^2}}, -\frac{y-1}{\sqrt{4-(x-1)^2-(y-1)^2}} \right).$$

Il gradiente della funzione f non é definito nei punti della frontiera di D. Risolvendo il sistema $\nabla f(x, y) = 0$ si ottiene il punto $(1, 1)$ che é interno a D. Resta da studiare la funzione ristretta alla frontiera di D. Si ha $f_{\partial D}(x, y) = 0$, quindi, essendo $f(1, 1) = 2$, i punti della frontiera di D sono punti di minimo assoluto, mentre il punto $(1, 1)$ é di massimo assoluto. Il minimo assoluto é zero, il massimo assoluto é 2.

Soluzione del secondo esercizio
Passando a coordinate polari si ottiene:

$$\int_1^2 \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta e^{\rho \sin\vartheta} d\vartheta = \int_1^2 \rho [e^{\rho \sin\vartheta}]_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho =$$
$$= \int_1^2 \rho e^{\rho} d\rho - \int_1^2 \rho d\rho = [\rho e^{\rho} - e^{\rho} - 1/2\rho^2]_1^2 = e^2 - 3/2.$$

Soluzione del terzo esercizio
La funzione $f(x, y) = 3 - 2y$ é continua e derivabile parzialmente rispetto ad y con derivata continua in tutto il piano $I\!R^2$. Pertanto, in un intervallo contenente $x = 0$ esiste un'unica soluzione del problema.
L'equazione differenziale é a variabili separabili. Risulta:

$$\int \frac{1}{3-2y} dy = \int dx,$$

da cui si ricava:
$$y(x) = \frac{3}{2} - e^{-2x}\frac{e^c}{4},$$
con $c \in I\!R$. Imponendo la condizione iniziale si trova $e^c = 4$. La soluzione é quindi $y(x) = \frac{3}{2} - e^{-2x}$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 29.06.2004

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare il massimo e il minimo assoluti (e i punti in cui sono assunti) della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ sull'ellisse $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 16$.

2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$I = \int\int_G \frac{y^2}{1 + x^2 + y^2} dxdy,$$

dove G é la corona circolare delimitata dalle circonferenze di raggi 1 e 2 centrate nell'origine.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \sin x + \cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 29. 06. 2004

Soluzione del primo esercizio.
La funzione é continua ed é definita sul un compatto, quindi esistono gli estremi assoluti. Per determinarli utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana é:

$$H(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16).$$

Le soluzioni del sistema $\nabla H(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$ sono:

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}),$$
$$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}),$$
$$(2, -2),$$
$$(-2, 2).$$

Risulta:

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4 = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}),$$
$$f(2, -2) = 8 = f(-2, 2).$$

Pertanto il massimo assoluto é 8 ed é assunto nei punti $(2, -2)$ e $(-2, 2)$, mentre il minimo assoluto é 4 ed é assunto nei punti $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$.

Soluzione del secondo esercizio
Passiamo a coordinate polari:

$$I = \int_1^2 \frac{\rho^3}{1+\rho^2} d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta.$$

Risolviamo il primo integrale, utilizzando la divisione tra polinomi:

$$\int_1^2 \frac{\rho^3}{1+\rho^2} d\rho = \int_0^1 \rho d\rho - \int_1^2 \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho =$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2\rho}{1+\rho^2} d\rho = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \log 5 + \frac{1}{2} \log 2.$$

Risolviamo ora l'altro integrale, utilizzando l'integrazione per parti:

$$\int \sin^2 \vartheta d\vartheta = \int \sin \vartheta \cdot \sin \vartheta d\vartheta = -\sin \vartheta \cos \vartheta + \int \cos^2 \vartheta d\vartheta =$$
$$-\sin \vartheta \cos \vartheta + \vartheta - \int \sin^2 \vartheta d\vartheta$$

da cui

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = -\frac{1}{2} \left[\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Quindi

$$I = \pi \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \log 5 + \frac{1}{2} \log 2 \right).$$

Soluzione del terzo esercizio

L'equazione differenziale é del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata é $\lambda^2 + 1 = 0$, le cui soluzioni sono $\pm i$. L'integrale generale dell'omogenea é quindi:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Determiniamo ora un integrale particolare. Poiché i é soluzione dell'equazione caratteristica, un integrale particolare sará del tipo:

$$\overline{y}(x) = x(a_1 \cos x + a_2 \sin x).$$

Calcoliamo ora a_1 e a_2. Risulta:

$$\overline{y}'(x) = a_1 \cos x + a_2 \sin x - a_1 x \sin x + a_2 x \cos x;$$

$$\overline{y}''(x) = -2a_1 \sin x + 2a_2 \cos x - a_1 x \cos x - a_2 x \sin x.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene:

$$-2a_1 \sin x + 2a_2 \cos x = \sin x + \cos x,$$

da cui si ricava $a_1 = -\frac{1}{2}$ e $a_2 = \frac{1}{2}$. La soluzione dell'equazione differenziale é quindi:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x(\sin x - \cos x).$$

Imponendo ora le condizioni $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1/2$ si ottiene $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 19.07.2004

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare il massimo e il minimo assoluti (e i punti in cui sono assunti) della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - x^2 - \frac{1}{2}y$$

sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1\}$.

2. Si consideri la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \left(\frac{2xy^2}{1+x^2} + 2\right) dx + (\lambda y \ln(1+x^2) - 4) dy.$$

Dire per quale valore di λ ω é esatta nel suo insieme di definizione e calcolare le primitive. Determinare infine la primitiva P tale che $P(0,1) = -3$.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{x} + 2x\sqrt{y} \\ \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 19. 07. 2004

Soluzione del primo esercizio.
La funzione f é continua sull'insieme D che é compatto e quindi per il teorema di Weierstrass f ammette il massimo e il minimo assoluti. L'espressione del gradiente é la seguente:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x - 2x\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}; \; \frac{2y - \sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

Notiamo che la funzione non é derivabile parzialmente nel punto $P_1 = (0,0)$. Infatti:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 1,$$

mentre

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = -1,$$

quindi non esiste $f'_x(P_1)$. Analogamente si prova che non esiste $f'_y(P_1)$. Le soluzioni del sistema $\nabla f(x,y) = 0$ nell'aperto D sono:

$$P_2 = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}),$$

$$P_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}).$$

Esaminiamo ora la frontiera di D. Parametrizzando, otteniamo la funzione della sola variabile ϑ:

$$g(\vartheta) = 1 - \cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\sin\vartheta,$$

la cui espressione della derivata prima é:

$$g'(\vartheta) = \cos\vartheta(2\sin\vartheta - \frac{1}{2}).$$

Le soluzioni dell'equazione $g'(\vartheta) = 0$ sono:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2},$$

$$\vartheta = \frac{3}{2}\pi,$$

$$\vartheta = \arcsin\frac{1}{4},$$

che forniscono i punti

$$P_4 = (0, 1),$$

$$P_5 = (0, -1),$$

$$P_6 = (\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}),$$

$$P_7 = (-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}).$$

Risulta

$$f(P_1) = 0,$$

$$f(P_2) = f(P_3) = \frac{3}{16},$$

$$f(P_4) = \frac{1}{2},$$

$$f(P_5) = \frac{3}{2},$$

$$f(P_6) = f(P_7) = -\frac{1}{16}.$$

Pertanto il massimo assoluto é $\frac{3}{2}$ ed é assunto nel punto P_5, mentre il minimo assoluto é $-\frac{1}{16}$ ed é assunto nei punti P_6 e P_7.

Soluzione del secondo esercizio

La forma differenziale lineare é definita in tutto il piano; pertanto la sua chiusura é equivalente alla sua esattezza. Risulta:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{4xy}{1 + x^2},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{2\lambda xy}{1 + x^2}.$$

Pertanto ω é chiusa, e quindi esatta, se e solo se $\lambda = 2$. Determiniamo ora la famiglia delle primitive.

$$P(x,y) = \int \left(\frac{2xy^2}{1+x^2} + 2 \right) dx + \varphi(y) =$$
$$= y^2 \ln(1+x^2) + 2x + \varphi(y).$$

Calcoliamo ora $\varphi(y)$ ponendo $\dfrac{\partial P}{\partial y} = Y$. Si ottiene:

$$2y \ln(1+x^2) + \varphi'(y) = 2y \ln(1+x^2) - 4,$$

che fornisce $\varphi'(y) = -4$ da cui si ottiene $\varphi(y) = -4y + c$, $c \in I\!R$. La famiglia delle primitive é quindi:

$$P(x,y) = y^2 \ln(1+x^2) + 2x - 4y + c, \quad c \in I\!R.$$

Infine, imponendo la condizione $P(0,1) = -3$, si ricava $c = 1$.

Soluzione del terzo esercizio

Il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione. Infatti in un opportuno intorno del punto $(-1,1)$ la funzione $f(x,y) = \dfrac{2y}{x} + 2x\sqrt{y}$ verifica le ipotesi del Teorema di Picard-Peano.

Risolviamo l'equazione differenziale, che é un'equazione di Bernoulli. Ponendo $\sqrt{y} = z$ si perviene all'equazione differenziale lineare

$$z'(x) = \frac{z}{x} + x,$$

la cui soluzione é:

$$z(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} \{ \int x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + c \} =$$
$$= x \{ \int x e^{-\ln x} dx + c \} = x(x+c).$$

Pertanto

$$y(x) = x^2 (x+c)^2.$$

Imponendo ora la condizione $y(-1) = 1$ otteniamo la soluzione cercata ricavando c dall'equazione $(1-c)^2 = 1$, che fornisce $c = 0$ o $c = 2$. Osserviamo che la seconda soluzione per c non puó essere accettata perché in tal caso avremmo $z(-1) < 0$ che é impossibile essendo $z(x) = \sqrt{y(x)} > 0$ per ogni $x > 0$. Pertanto l'unica soluzione é $y(x) = x^4$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 7.09.2004

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2y + 3y^2$$

sull'insieme $D = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ -1 \le y \le -x^2 + 1\}$.

2. Sia $D = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ 0 \le y \le \sin x, \ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}\}$. Posto $\Omega(x,y) = (\sin y + \cos y, \ y \arcsin y + \sqrt{1-y^2})$, determinare il flusso del campo Ω uscente da $Fr(D)$.

3. Tra tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x^2y'' - xy' - 8y = x, \ x > 0$$

determinare quella tale che $\lim_{x \to 0^+} y(x) = 0$.

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 7. 09. 2004

Soluzione del primo esercizio.
La funzione f é continua sull'insieme D che é compatto e quindi per il teorema di Weierstrass f ammette il massimo e il minimo assoluti. L'espressione del gradiente é la seguente:

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4xy; \ -2x^2 + 6y).$$

La soluzione del sistema $\nabla f(x,y) = 0$ nell'aperto D é $P_1 = (0,0)$. Per stabilire la natura di tale punto, calcoliamo ora il determinante della matrice hessiana in P_1. Risulta:

$$f''_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4y,$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -4x,$$

$$f''_{yy}(x,y) = 6;$$

Il determinante della matrice hessiana in P_1 é nullo, quindi nulla si puó concludere sulla natura del punto. Notiamo peró che $f(x,y) \geq 0$ (basta risolvere la disequazione $x^4 - 2x^2y + 3y^2 \geq 0$ rispetto alla variabile y). Poiché $f(0,0) = 0$, il P_1 é un punto di minimo assoluto.
Esaminiamo ora la frontiera di D. Per i punti della retta $y = -1$ la funzione diventa:

$$f(x,-1) = x^4 + 2x^2 + 3 := g(x),$$

con $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Studiando il segno di $g'(x)$ si ottiene che g decresce in $]-\sqrt{2}, 0[$ e cresce in $]0, \sqrt{2}[$. Quindi $P_2 = (-\sqrt{2}, -1)$ é un punto di massimo relativo, $P_3 = (0,-1)$ é un punto di minimo relativo e $P_4 = (\sqrt{2}, -1)$ é un punto di massimo relativo.
Per i punti della parabola $y = -x^2 + 1$ la funzione diventa:

$$f(x, -x^2 + 1) = 6x^4 - 8x^2 + 3 := h(x),$$

con $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Studiando il segno di $h'(x)$ si ottiene che h decresce in $]-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{2}{3}}[$, cresce in $]-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0[$, decresce in $]0, \sqrt{\frac{2}{3}}[$ e cresce in $]\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{2}[$. Pertanto il punto $P_5 = (0,1)$ é di massimo relativo, mentre i punti $P_6 = (-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3})$ e $P_7 = (\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3})$ sono di minimo relativo. Calcoliamo ora i valori che la funzione assume in tali punti per determinare i punti di massimo e di minimo assoluti:

$$f(P_1) = 0,$$
$$f(P_2) = f(P_4) = 11,$$
$$f(P_3) = f(P_5) = 3,$$
$$f(P_6) = f(P_7) = \frac{1}{3}.$$

Pertanto il massimo assoluto é 11 ed é assunto nei punti P_2 e P_4, mentre il minimo assoluto é 0 ed é assunto nel punto P_1.

Soluzione del secondo esercizio

Usando il Teorema della Divergenza il flusso puó essere determinato dall'integrale $\int\int_D div\Omega(x,y)dxdy$. Risulta $div\Omega(x,y) = \arcsin y$ e quindi occorre calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D \arcsin y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} \arcsin y dy.$$

Operando la sostituzione $\arcsin y = t$ e integrando successivamente per parti si ottiene:

$$\int\int_D \arcsin y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^x t\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [t\sin t + \cos t]_0^x dx =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x\sin x + \cos x - 1)dx = [-x\cos x + 2\sin x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) + \sqrt{2}$$

Soluzione del terzo esercizio

Determiniamo prima l'integrale generale dell'omogenea associata chwe é un'equazione di Eulero. Abbiamo $a_1 = -1$ e $a_2 = -8$ e con la sostituzione $x = e^z$ otteniamo la seguente equazione a coefficienti costanti:

$$\eta'' - 2\eta' - 8\eta = 0,$$

la cui equazione caratteristica é

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

che fornisce le due soluzioni $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 4$. Quindi due soluzioni indipendenti dell'equazione a coefficienti costanti sono date da

$$u_1(z) = e^{-2z}, \quad u_2(z) = e^{4z},$$

e sostituendo $z = \log x$ si ha l'integrale generale dell'equazione di Eulero:

$$y(x) = \frac{c_1}{x^2} + c_2 x^4.$$

Determiniamo ora un integrale particolare dell'equazione non omogenea. Normalizzando l'equazione, il termine noto é $f(x) = \dfrac{1}{x}$, il determinante della martice wronskiana di (u_1, u_2) é $-6x$ e la sua matrice inversa é data da:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}x^2 & -\frac{1}{6}x^3 \\ \\ \frac{1}{3x^4} & \frac{1}{6x^3} \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$v_1(x) = -\frac{1}{6}\int x^2 dx,$$

$$v_2(x) = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x^4} dx,$$

da cui

$$v_1(x) = -\frac{1}{18}x^3,$$

$$v_2(x) = -\frac{1}{18x^3}.$$

L'integrale particolare é quindi

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{18}x - \frac{1}{18}x = -\frac{1}{9}x.$$

L'integrale generale dell'equazione é pertanto:

$$y(x) = \frac{c_1}{x^2} + c2x^4 - \frac{1}{9}x.$$

Infine

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = 0 \Longleftrightarrow c_1 = 0, \; c_2 \in I\!R.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 27.09.2004

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}(x^2 - y^2)$$

sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$. L'origine é un estremo relativo per f?

2. Calcolare l'integrale

$$\int\int\int_E (x^2 + z)dxdydz,$$

dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$.

3. Determinare $y(e^2)$ dove $y(x)$ é la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{\ln x}{x} \\ \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 27. 09. 2004

Soluzione del primo esercizio.
La funzione f é continua sull'insieme D che é compatto e quindi per il teorema di Weierstrass f ammette il massimo e il minimo assoluti. L'espressione del gradiente é la seguente:

$$\nabla f(x, y) = (2xe^{x^2+y^2}(x^2 - y^2 + 1);\ 2ye^{x^2+y^2}(x^2 - y^2 - 1)).$$

La soluzione del sistema $\nabla f(x, y) = 0$ nell'aperto D é $P_1 = (0, 0)$.
Esaminiamo ora la frontiera di D. Passiamo a coordinate polari:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

con $t \in [0, 2\pi]$. La funzione diventa quindi:

$$f(t) = 4e^4(\cos^2 t - \sin^2 t),$$

La cui derivata prima é

$$f'(t) = -16e^4 \sin t \cos t.$$

Tale derivata si annulla nei punti $t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$. Pertanto, oltre al punto P_1, i punti critici della funzione $f(x, y)$ sono $P_2 = (2, 0)$, $P_3 = (0, 2)$, $P_4 = (-2, 0)$ e $P_5 = (0, -2)$. Calcoliamo ora i valori che la funzione assume in tali punti per determinare i punti di massimo e di minimo assoluti:

$$f(P_1) = 0,$$

$$f(P_2) = f(P_4) = 4e^4,$$
$$f(P_3) = f(P_5) = -4e^4.$$

Pertanto il massimo assoluto é $4e^4$ ed é assunto nei punti P_2 e P_4, mentre il minimo assoluto é $-4e^4$ ed é assunto nei punti P_3 e P_5.
Per stabilire se l'origine é un estremo relativo per f, basta studiare il segno della funzione. Poiché in ogni intorno del punto P_1 la funzione assume sia valori positivi che negativi, concludiamo che P_1 non é un estremo relativo per f.

Soluzione del secondo esercizio

Passiamo a coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \\ z = z \end{cases}$$

con $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e $\rho^2 \leq z \leq 4$. Ricordando che il determinante della matrice jacobiana di tale trasformazione é ρ, risulta

$$\int\int\int_E (x^2+z)dxdydz = \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} dt \int_{\rho^2}^4 (\rho^2 \cos t + z)dz =$$
$$= \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} (4\rho^2 \cos^2 t + 8 - \rho^4 \cos^2 t - \frac{1}{2}\rho^4)dt =$$
$$= \pi \int_0^2 (4\rho^3 - 2\rho^5 + 16\rho)d\rho = \frac{80}{3}\pi$$

Soluzione del terzo esercizio

L'equazione differenziale é lineare del primo ordine, con $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ e $\beta(x) = -\frac{\ln x}{x}$. Risulta

$$\int \alpha(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x,$$

e

$$\int \beta(x)e^{-\ln x}dx = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Risolviamo quest'ultimo integrale operando dapprima la sostituzione $\ln x = t$ e integrando successivamente per parti:

$$-\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\int te^{-t}dt =$$
$$= te^{-t} + \int -e^{-t}dt = te^{-t} + e^{-t} = \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}.$$

Pertanto la soluzione dell'equazione é:

$$y(x) = x\left(\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + c\right) = \ln x + 1 + cx,$$

con $c \in I\!R$. Imponendo la condizione $y(1) = 2$ si trova $c = 1$, per cui la soluzione del problema di Cauchy é

$$y(x) = \ln x + 1 + x.$$

Infine
$$y(e^2) = 2 + 1 + e^2 = 3 + e^2.$$

Universitá degli Studi di Perugia - Facoltá di Ingegneria

Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa (c.l. Ambiente-Territorio)-
Appello del **13.12.2004**

Risolvere gli esercizi seguenti:

1. Determinare i punti critici e stabilirne la natura della funzione:

$$f(x,y) = (x^2 - y)(y - x)^2.$$

2. Calcolare il flusso del campo

$$\Omega(x,y) = (\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + \cos y, \frac{1}{2}xy^2 + \arctan x^4),$$

uscente da $Fr(D)$, dove D é il quarto di cerchio centrato in $(0,0)$ e di raggio 2 contenuto nel primo quadrante.

3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^{2x}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 13.12.2004

Soluzione del primo esercizio.
Il dominio della funzione é $I\!R^2$. Risulta

$$f'_x(x,y) = 2(y-x)(-2x^2+y+xy),$$

$$f'_y(x,y) = (y-x)(2x^2-3y+x).$$

Determiniamo i punti critici ponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Si ottengono le soluzioni (x,x) con $x \in I\!R$ e $(1/2, 1/3)$. Le espressioni delle derivate seconde sono:

$$f''_{xx}(x,y) = 12x^2 + 2y^2 - 2y - 12xy,$$
$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -6x^2 + 4y - 2x + 4xy,$$
$$f''_{yy}(x,y) = 2x^2 - 6y + 4x.$$

Il determinante della matrice hessiana calcolata nei punti (x,x) viene zero e quindi nulla si puó concludere sulla natura di tali punti, mentre il determiante della matrice hessiana calcolato nel punto $(1/2, 1/3)$ é positivo. Essendo $f''_{xx}(1/2, 1/3) = 5/9$, il punto é di minimo relativo. Per stabilire la natura dei punti (x,x) é sufficiente studiare il segno della funzione. Si ha che (x,x) sono punti di minimo relativo per $x < 0$ e $x > 1$, punti di massimo relativo se $0 < x < 1$. I punti $(0,0)$ e $(1,1)$ sono di sella.

Soluzione del secondo esercizio
Utilizziamo il teorema della divergenza. Risulta $\text{div}\Omega = x^2 + y^2 + xy$, e quindi si ha, utilizzando le coordinate polari:

$$\text{flusso}\Omega = \int\int_D (x^2+y^2+xy)\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \rho^3(1+\cos\vartheta\sin\vartheta)\,d\rho d\vartheta =$$
$$= 4\int_0^{\pi/2}(1+\cos\vartheta\sin\vartheta)d\vartheta = 2\pi + 2\int_0^{\pi/2}\sin 2\vartheta d\vartheta = 2\pi + 2$$

Soluzione del terzo esercizio
L'equazione differenziale é del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione

caratteristica é $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ che ammette le soluzioni $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. L'integrale generale dell'omogenea associata é quindi

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x},$$

con $c_1, c_2 \in I\!R$. Poiché $\alpha = 2$ é soluzione dell'equazione caratteristica e $2\alpha + a \neq 0$, un integrale particolare dell'equazione é

$$\overline{y}(x) = -x e^{2x}.$$

L'integrale generale dell'equazione é pertanto:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - x e^{2x}.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ si trova $c_1 = -2$ e $c_2 = 2$.

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Ambiente e territorio
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
21 Marzo 2005

1) Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = xy(x-y)$$

nel triangolo di vertici $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$.

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} xy''(x) - 3y'(x) + \dfrac{8}{x}y(x) = 0 \\ \\ y(1) = 0, \ y'(1) = 2. \end{cases}$$

3) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_T \frac{x^2+y^2}{x+y} dxdy,$$

dove T è il triangolo di vertici $(1,1)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Ambiente e territorio
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
21 Marzo 2005

Soluzioni del compito di Analisi II del 21 Marzo 2005

1) Il triangolo è un insieme compatto e, poichè la funzione è continua, per il teorema di Weierstrass il massimo ed il minimo assoluti esistono. Determiniamo i punti critici all'interno del triagolo. Calcolando le derivate parziali si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y(x-y) + xy = y(2x-y) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = x(x-y) - xy = x(x-2y). \end{cases}$$

Se $y = 0$ si ottiene $x = 0$ se invece $2x = y$ si ottiene ancora il punto $(0,0)$. Quindi l'unico punto soluzione del sistema risulta essere l'origine ma, essendo un punto di frontiera, non è accettabile, pertanto non ci sono punti critici all'interno del triangolo. Passiamo ad esaminare i punti della frontiera che ècostituita da tre segmenti. Il lato costituito da (x,x) con $-1 \le x \le 1$ è tale che $f(x,x) = 0$. Per quanto riguarda il lato $(1,y)$ con $-1 \le y \le 1$ si ha che $f(1,y) = y(1-y) = y - y^2$ e quindi $f' = 1 - 2y$ da cui risulta che i punti critici sono $(1,-1), (1,1), (1,1/2)$. In modo analogo, studiando i punti del tipo $(x,-1)$ con $-1 \le x \le 1$ si ha che $f(x,-1) = -x(x+1) = -x^2 - x$ da cui risulta che i punti critici sono $(-1,-1), (-1/2,-1), (1,-1)$. I valori assunti in questi punti sono allora

$$f(1,1) = 0 = f(-1,-1)$$

$$f(1,1/2) = 1/4 = f(-1/2,-1)$$

$$f(1,-1) = -2$$

e quindi il massimo assoluto viene assunto in $(1,1/2)$ e $(-1/2,-1)$ e vale $\frac{1}{4}$ mentre il minimo assoluto viene assunto in $(1,-1)$ e vale -2.

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare di Eulero. Ponendo $x = e^t$, si ottiene l'equazione differenziale a coefficienti costanti

$$\eta'' - 4\eta' + 8\eta = 0.$$

L'equazione caratteristica risulta essere

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda = 2 \pm 2i.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$\eta(t) = C_1 e^{2t} \cos 2t + C_2 e^{2t} \sin 2t,$$

e sostituendo si ottiene

$$y(x) = C_1 x^2 \cos(2 \log x) + C_2 x^2 \sin(2 \log x).$$

Determiniamo ora le costanti. Si ha

$$y(1) = 0 = C_1$$

e derivando la funzione $y(x) = C_2 x^2 \sin(2 \log x)$ otteniamo

$$y'(x) = 2x C_2 \sin(2 \log x) + 2C_2 \frac{x^2}{x} \cos(2 \log x)$$

da cui

$$y'(1) = 2 = 2C_2 \Leftrightarrow C_2 = 1.$$

In conclusione l'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da

$$y(x) = x^2 \sin(2 \log x).$$

3) Il dominio T risulta essere, ad esempio, un dominio normale rispetto all'asse x ed è dato da

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : 0 \leq x \leq 1,\ 1 - x \leq y \leq 1\}.$$

Applicando un teorema di riduzione si ha

$$\int\int_T \frac{x^2 + y^2}{y + x} dxdy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 \frac{x^2 + y^2}{y + x} dy.$$

Eseguendo la divisione tra polinomi si ha

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = y - x + \frac{2x^2}{x + y}$$

e quindi

$$\int\int_T \frac{x^2 + y^2}{y + x} dxdy = \int_0^1 [\frac{1}{2} - x + 2x^2 \log(x + 1) - \frac{(1 - x)^2}{2} + x(1 - x)] dx$$

$$= \frac{4}{3} \log 2 - \frac{5}{9}$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Ambiente e territorio
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
11 Aprile 2005

1) Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x,y) = 24x^4 + 3y^4 - (x-y)^2.$$

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' + \frac{1}{\sqrt{x}} y = 1$$

e trovare le soluzioni tali che

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty.$$

3) Determinare gli insiemi di definizione e di esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = (\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y})dx + (-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y} + 3)dy.$$

Calcolare, inoltre, la primitiva F che soddisfa la condizione $F(\pi, 1) = 3$.

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Ambiente e territorio
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
11 Aprile 2005

Soluzioni del compito di Analisi II dell' 11 Aprile 2005

1) La funzione risulta continua e derivabile in ogni punto del piano, quindi gli eventuali punti di massimo e minimo sono da ricercare tra le soluzioni del gradiente uguagliato a zero.

Si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 96x^3 - 2(x-y) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 12y^3 + 2(x-y) \end{cases}$$

e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 96x^3 - 2x + 2y = 0 \\ \\ 12y^3 + 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

si ottengono le soluzioni $(0,0)$, $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Per determinare la matrice Hessiana calcoliamo le derivate parziali seconde, otteniamo

$$f''_{xx} = 288x^2 - 2$$

$$f''_{xy} = 2 = f''_{yx}$$

$$f''_{yy} = 36y^2 - 2.$$

Quindi si ha

$$H(0,0) = 0$$

mentre

$$H(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}) = H(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = 108.$$

Poiché nel secondo caso risulta $f''_{xx} = 16$ i punti $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ sono punti di minimo relativo. Per quanto riguarda l'origine (caso dubbio) si ha che la restrizione $y = x$ é tale che $f(x,x) = 27x^4 > 0$ mentre la restrizione $y = 0$ é tale che $f(x,0) = x^2(24x^2 - 1)$. Tali valori risultano essere negativi per $-\frac{1}{2\sqrt{6}} < x < +\frac{1}{2\sqrt{6}}$ e quindi l'origine é un punto sella.

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine definita per $x > 0$. Dalla formula risolutiva si ha

$$e^{-\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx}[\int e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx}dx + C] = e^{-2\sqrt{x}}[\int e^{2\sqrt{x}}dx + C].$$

Risolvendo l'integrale $\int e^{2\sqrt{x}}dx$ si ha

$$\begin{aligned} \int e^{2\sqrt{x}}dx &= \int e^{2t}2tdt \\ &= te^{2t} - \int e^{2t}dt = te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + C \\ &= \sqrt{x}e^{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}e^{2\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

quindi la soluzione risulta essere

$$y(x) = e^{-2\sqrt{x}}[\sqrt{x}e^{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}e^{2\sqrt{x}} + C] = \sqrt{x} - \frac{1}{2} + Ce^{-2\sqrt{x}}.$$

Imponendo la condizione si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$$

per ogni costante C.

3) Il dominio della forma differenziale lineare risulta essere $y \neq 0$. Inoltre ω è chiusa infatti

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2}\cos\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^3}\sin\frac{x}{y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Ciascuno dei due semipiani aperti $y > 0$ e $y < 0$ è un insieme semplicemente connesso e quindi la forma differenziale risulta esatta sia per $y > 0$ che per $y < 0$. Determiniamo in ognuno dei semipiani l'insieme delle primitive. Integrando rispetto a y la funzione $Y(x, y)$ si ha

$$F(x, y) = \int(-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y} + 3)dy = x\sin\frac{x}{y} + 3y + g(x).$$

Deriviamo ora rispetto a x, ottenendo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y} + g'(x) = \sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y},$$

che implica $g'(x) = 0$ da cui $g(x) = C$. Pertanto le primitive sono date da

$$F(x, y) = x\sin\frac{x}{y} + 3y + C.$$

Imponiamo ora la condizione

$$\pi\sin\pi + 3 + C = 3 \Leftrightarrow C = 0.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 05.07.2005

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{|x|^{7/2}|y-1|}{x^4-2y+y^2+1}.$$

Sugg: Scrivere il denominatore come somma di due quadrati.

2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$I = \int\int_G \frac{2xy}{1+2x^2+2y^2}dxdy,$$

dove $G = \{(x,y) \in I\!R^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \leq 0\}$.

3. Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$y' - \frac{3\cos x}{1+\sin x}y = 0$$

che passano per il punto $(\pi/2, 1)$. Dire se la soluzione é unica.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 05.07.2005

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

Soluzioni

1. La funzione può essere scritta nella forma

$$\frac{|x|^{7/2}|y-1|}{x^4+(y-1)^2}.$$

Usando le coordinate polari con polo nel punto $(0,1)$ si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{|x|^{7/2}|y-1|}{x^4+(y-1)^2} &= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^{7/2}|\cos\theta|^{7/2}\varrho|\sin\theta|}{\varrho^4\cos^4\theta+\varrho^2\sin^2\theta} \\ &= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^{5/2}|\cos\theta|^{7/2}|\sin\theta|}{\varrho^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}.\end{aligned}$$

Il limite è nullo per ogni valore di $\theta\in[0,2\pi]$. Per dimostrare l'uniformità rispetto a θ si può maggiorare il numeratore con $\varrho^{5/2}$ e basta osservare che i due addendi al denominatore non possono essere contemporaneamente nulli.

2. Usando le coordinate polari il dominio G si trasforma in

$$G' = \{(\varrho,\theta) : 0\le\varrho\le 1, \ -\pi/2\le\theta\le 0\}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\int\int_G \frac{2xy}{1+2x^2+2y^2}dxdy &= 2\int\int_{G'} \frac{\varrho^3\cos\theta\sin\theta}{1+2\varrho^2}d\varrho d\theta \\ &= \int_0^1 \frac{\varrho^3}{1+2\varrho^2}d\varrho\int_{-\pi/2}^0 \sin 2\theta d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^1 \varrho d\varrho + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\varrho}{1+2\varrho^2} \\ &= -\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\log 3.\end{aligned}$$

3. Si tratta di una equazione a variabili separabili. Integrando si ottiene:

$$\log|y| = 3\log|1+\sin x| + C$$

da cui

$$|y| = Ke^{3\log|1+\sin x|} = K|1+\sin x|^3$$

dove $K = e^C$. Pertanto la soluzione che assume il valore 1 in $\frac{\pi}{2}$ é

$$y(x) = \frac{1}{8}(1+\sin x)^3.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 12.09.2005

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Assegnata la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stabilire se

(a) f é continua in $(0,0)$

(b) esistono direzioni $\mathtt{v}$ lungo le quali esiste $\frac{\partial f}{\partial \mathtt{v}}(0,0)$ e calcolarla

(c) f é differenziabile in $(0,0)$.

2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$I = \int\int_D \frac{x^2}{1+x^2y^2}dxdy,$$

dove D é il quadrato di lato 1 nel primo quadrante con vertice in $(0,0)$.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y \log y}{x} \\ \\ y(-1) = e \end{cases}$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Ambiente e territorio
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
12 Settembre 2005

Soluzioni del compito di Analisi II del 12 Settembre 2005

1) Determiniamo, per cominciare, se la funzione è continua. Passando a coordinate polari si ha

$$\lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\varrho^2+\varrho\cos t}{\varrho^2}-1=\lim_{\varrho\to 0^+}\frac{\cos t}{\varrho}$$

che non esiste. La funzione non risulta continua nell'origine. Per quanto riguarda la derivabilità direzionale si ottiene

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2v_1^2+t^2v_2^2+tv_1}{t^2v_1^2+t^2v_2^2}-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{v_1}{t^2(v_1^2+v_2^2)}=\lim_{t\to 0}\frac{v_1}{t^2}.$$

Quest'ultimo limite vale zero $\leftrightarrow v_1=0$. La funzione non è differenziabile non essendo continua.

2) Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili. Possiamo scrivere allora

$$\int\frac{dy}{y\log y}=\int\frac{dx}{x}$$

da cui

$$\log|\log y|=\log|x|+C$$

e infine

$$|\log y|=e^C|x|.$$

Dalla condizione iniziale si ricava $C=0$ e poichè possiamo considerare $x<0$ si ha

$$y=e^{-x}.$$

3) Il dominio D è dato da

$$D=\{(x,y)\in I\!R^2\ :0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$$

e risulta un dominio normale rispetto all'asse x. Applicando un teorema di riduzione si ha

$$\int\int_D\frac{x^2}{1+x^2y^2}dxdy=\int_0^1x^2dx\int_0^1\frac{1}{1+x^2y^2}dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 x^2 \left[\frac{\arctan xy}{x}\right]_0^1 dx = \int_0^1 x \arctan x dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x - \arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Ambiente e territorio
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
29 Settembre 2005

1) Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo ed assoluto della funzione
$$f(x,y) = \sqrt{|2 - x^2 - y^2|}.$$

2) Risolvere la seguente equazione differenziale
$$y' + 2xy = x$$
e trovare le soluzioni tali che
$$y(1) = 2.$$

3) Calcolare
$$\int\int_D x^2 dxdy$$
dove $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \; ; \; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Ambiente e territorio
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
29 Settembre 2005

Soluzioni del compito di Analisi II dell' 29 Settembre 2005

1) La funzione risulta continua in ogni punto del piano e derivabile in ogni punto diverso da $x^2+y^2=2$. Quindi gli eventuali punti di massimo e minimo relativo sono da ricercare tra le soluzioni del gradiente uguagliato a zero e tra i punti di non derivabilità.
È ovvio che $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in I\!R^2$, pertanto nei punti della circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$ la f assume il minimo assoluto che vale zero. Nei punti tali che $x^2+y^2<2$ si ha $f(x,y)=\sqrt{2-x^2-y^2}$ e

$$\nabla f(x,y) = (-\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}).$$

Quindi $\nabla f = (0,0) \leftrightarrow (x,y)=(0,0)$. Essendo $f(0,0) \geq f(x,y)$ per ogni (x,y) tale che $x^2+y^2 \leq 2$, l'origine è un punto di massimo relativo. Se $x^2+y^2 \geq 2$ non ci sono punti critici. Infine la funzione f non ammette massimo assoluto perchè per esempio la restrizione all'asse delle x tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

2) Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Infatti si scrive

$$y' = x(1-2y)$$

da cui

$$\frac{dy}{1-2y} = xdx.$$

Integrando si ottiene

$$-\frac{1}{2}\log|1-2y| = \frac{x^2}{2} + C$$

cioè, poichè $1-2y$ è negativo in un intorno del punto $(1,2)$,

$$2y-1 = Ke^{-x^2}$$

da cui

$$y = \frac{Ke^{-x^2}+1}{2}.$$

Imponendo il dato iniziale otteniamo

$$y = \frac{3e^{-x^2+1}+1}{2}.$$

3) Passando in coordinate polari si ha, posto $D' = [1, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \int\int_D x^2 dxdy &= \int\int_{D'} \varrho^2 \cos^2 t \varrho d\varrho dt \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \varrho^3 d\varrho \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Ambiente e territorio
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
12 Dicembre 2005

1) Determinare massimi e minimi relativi, se esistono, della funzione

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + e^{x^2+y^2}.$$

Sugg: Utilizzare la relazione $e^t > 1 + t$.

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) + y(x) = (x+1)e^x \\ \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_T (x^2 + \sin y)\ dxdy,$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Ambiente e territorio
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
12 Dicembre 2005

Soluzioni del compito di Analisi II del 12 Dicembre 2005

1) La funzione risulta continua e derivabile in ogni punto del piano. Quindi gli eventuali punti di massimo e minimo relativo sono da ricercare tra le soluzioni del gradiente uguagliato a zero. Si ha

$$\nabla f(x,y) = (2x(1+e^{x^2+y^2}), 2y(e^{x^2+y^2}-1))$$

e quindi l'unico punto critico risulta essere $(0,0)$. Calcolando la matrice Hessiana si ottiene che $H(0,0)=0$. A questo punto, utilizzando la disuguaglianza del suggerimento possiamo scrivere

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + e^{x^2+y^2} > x^2 - y^2 + 1 + x^2 + y^2 = 1 + 2x^2 \geq 1 = f(0,0).$$

Quindi il punto $(0,0)$ risulta essere minimo relativo.

2) Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica risulta essere

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$$

che ha come soluzioni

$$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

e quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è dato da

$$C_1 e^{\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) + C_2 e^{\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}t}{2}).$$

Per determinare una soluzione particolare consideriamo funzioni del tipo

$$y = (at+b)e^t.$$

Le costanti a e b per le quali la funzione y è soluzione sono date da $a = 1$, $b = 0$ e pertanto una soluzione particolare risulta $y = te^t$. La soluzione generale è allora data da

$$C_1 e^{\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) + C_2 e^{\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}t}{2}) + te^t.$$

Imponendo le condizioni iniziali è facile vedere che $C_1 = C_2 = 0$ e quindi la soluzione del problema è

$$y = te^t.$$

3) Possiamo scrivere

$$E = \{(x, y) : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1 - y\}$$

quindi

$$\begin{aligned} & \int\int_E (x^2 + \sin y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (x^2 + \sin y) dx \\ = & \int_0^1 [\frac{(1-y)^3}{3} + (1-y)\sin y] dy = \frac{13}{12} - \sin 1. \end{aligned}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territhrio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 27.03.2006

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare il massimo e il minimo assoluti (e i punti in cui sono assunti) della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

sull'insieme $D = \{(x,y) \in I\!R^2 : x^2 + 2y^2 \leq 6\}$.

Determinare poi la natura degli eventuali punti critici interni a D.

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2}{3}y = \dfrac{e^{-x}\sin x}{\sqrt{y}} \\ \\ y(0) = \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

3. Determinare il flusso del campo

$$\Omega(x,y) = \left(\ln y - \frac{y}{2x^4}, \quad -\frac{y^3}{3x^5} \right)$$

uscente da $Fr(D)$, dove D é l'insieme delimitato dalle rette $y = x$, $y = 2x$, $y + x = 2$ e $y + 2x = 2$.

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 27.03.2006

Soluzione del primo esercizio.
Poiché la funzione f é continua e l'insieme D é compatto, per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti. Determiniamo i punti critici interni a D. Risulta

$$\nabla(x,y) = (x^2+2x,\ y) = (0,0) \iff (x,y) = P_1 = (0,0) \vee (x,y) = P_2 = (-2,0).$$

Entrambi i punti sono interni a D. Studiamo ora la frontiera di D utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La lagrangiana é:

$$H(x,y,\lambda) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - 6).$$

Bisogna quindi risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} H'_x = x^2 + 2x + 2\lambda x = 0 \\ H'_y = y + 4\lambda y = 0 \\ H'_\lambda = x^2 + 2y^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono: $P_3 = (0, \sqrt{3})$, $P_4 = (0, -\sqrt{3})$, $P_5 = (\sqrt{6}, 0)$, $P_6 = (-\sqrt{6}, 0)$, $P_7 = \left(-\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{15}{8}}\right)$, $P_8 = \left(-\frac{3}{2}, -\sqrt{\frac{15}{8}}\right)$. Per determinare il massimo e il minimo assoluti é sufficiente calcolare il valore della funzione nei punti trovati. Risulta:

$$f(P_1) = 0,$$
$$f(P_2) = \frac{4}{3},$$
$$f(P_3) = f(P_4) = \frac{3}{2},$$
$$f(P_5) = 2(\sqrt{6} + 3),$$
$$f(P_6) = 2(3 - \sqrt{6}),$$
$$f(P_7) = f(P_8) = \frac{33}{16}.$$

Quindi il massimo assoluto é $2(\sqrt{6}+3)$, assunto in P_5, mentre il minimo assoluto é 0, assunto in P_1.
Resta da stabilire la natura del punto P_2. Risulta

$$f''_{xx} = 2x + 2,$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = 0,$$

$$f''_{yy} = 1.$$

Il determinante della matrice hessiana calcolato in P_2 é pari a -2, quindi P_2 é un punto sella.

Soluzione del secondo esercizio

La funzione $f(x,y) = -\frac{2}{3}y + y^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\sin x$ é definita e continua nei punti (x,y) con $y > 0$. Inoltre f é di classe C^1 in un intorno del punto $(0, \sqrt[3]{4})$. Il problema di Cauchy ammette quindi un'unica soluzione. Risolviamo l'equazione differenziale, che é di Bernoulli. Posto $z = y^{\frac{3}{2}}$ si perviene all'equazione differenziale lineare:

$$z' = -z + \frac{3}{2}e^{-x}\sin x,$$

le cui soluzioni sono

$$z(x) = e^{-x}\left(c - \frac{3}{2}\cos x\right),$$

e quindi

$$y(x) = e^{-\frac{2}{3}x}\left(c - \frac{3}{2}\cos x\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = \sqrt[3]{4}$ si ottiene $c = \frac{7}{2}$ o $c = -\frac{1}{2}$. Osserviamo che la seconda soluzione per c non puó essere accettata perché in tal caso avremmo $z(0) < 0$ che é impossibile essendo $z(x) = \sqrt{y^3} > 0$. Pertanto l'unica soluzione del problema di Cauchy é

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}x}(7 - 3\cos x)^{\frac{2}{3}}.$$

Soluzione del terzo esercizio

Poiché D é un dominio regolare e il campo vettoriale é di classe C^1 in una regione contenente D, possiamo applicare il teorema della divergenza:

$$-\int_{+Fr(D)} \Omega \cdot n_i ds = \int\int_D div\Omega(x,y)dxdy.$$

Risulta

$$div\Omega(x,y) = \frac{y(2-y)}{x^5}$$

quindi dobbiamo calcolare il seguente integrale:

$$\int\int_D \frac{y(2-y)}{x^5}dxdy = \int\int_D \frac{y}{x^4} \cdot \frac{2-y}{x}dxdy.$$

Poniamo $u = \dfrac{x}{y}$ e $v = \dfrac{2-y}{x}$, con $1 \le u \le 2$ e $1 \le v \le 2$. Determiniamo ora x, y in funzione di u, v. Si ha:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{u+v} \\ \\ y = \dfrac{2u}{u+v} \end{cases}$$

La trasformazione $h(u,v) = \left(\dfrac{2}{u+v}, \dfrac{2u}{u+v}\right)$ é una trasformazione regolare definita per esempio nel primo quadrante aperto del piano (u,v). Infatti in tale insieme h é di classe C^1 e il determinante della matrice Jacobiana é $\dfrac{4}{(u+v)^3}$, che é sempre diverso da zero nel primo quadrante aperto. Si ha quindi:

$$\int\int_D \frac{y}{x^4} \cdot \frac{2-y}{x}dxdy = \frac{1}{2}\int_1^2 vdv \int_1^2 udu =$$
$$= \frac{3}{4}\int_1^2 vdv = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territhrio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 7.04.2006

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo della funzione
$$f(x,y) = xy\log(xy^2) + x^2y$$
sul suo insieme di definizione.

2. Stabilire se la forma differenziale lineare
$$\omega(x,y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-y}} - 1\right) dx + \left(\cos y - \frac{1}{2\sqrt{x-y}}\right) dy$$
é esatta nel suo insieme di definizione e in caso affermativo calcolare la famiglia delle primitive.

3. Risolvere la seguente equazione differenziale
$$x^2y'' + 2xy' - 2y = \arctan x.$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 7. 04. 2006

Soluzione del primo esercizio.
L'insieme di definizione della funzione é $D = \{(x, y) : \ y \neq 0, \ x > 0\}$. L'espressione del gradiente é la seguente:

$$\nabla f(x, y) = (y(\log xy^2 + 1 + 2x); \ x(\log xy^2 + 2 + x)).$$

Le soluzioni del sistema $\nabla f(x, y) = 0$ nell'insieme D sono $P_1 = (1, \sqrt{e^{-3}})$ e $P_2 = (1, -\sqrt{e^{-3}})$. Per stabilire la natura di tali punti, calcoliamo ora il determinante della matrice hessiana in P_1 e in P_2. Risulta:

$$f''_{xx}(x, y) = y\left(\frac{1}{x} + 2\right),$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \log xy^2 + 3 + 2x,$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{2x}{y};$$

Il determinante della matrice hessiana in P_1 é pari a 2 e poiché $f''_{xx}(P_1) > 0$, il punto P_1 é di minimo relativo. Anche il determinante della matrice hessiana in P_2 é pari a 2, ma $f''_{xx}(P_2) < 0$, quindi P_2 é un punto di massimo relativo.

Soluzione del secondo esercizio
L'insieme di definizione della forma differenziale lineare é $A = \{(x, y) : \ y < x\}$, che é un insieme aperto e convesso. Pertanto la chiusura della forma differenziale lineare implica la sua esattezza. Risulta:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{1}{4(x - y)\sqrt{x - y}},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{4(x - y)\sqrt{x - y}}.$$

Quindi ω é chiusa e pertanto é esatta.
Calcoliamo ora la famiglia delle primitive, utilizzando la definizione.

$$F(x, y) = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x - y}} - 1\right) dx = \sqrt{x - y} - x + g(y).$$

Determiniamo ora la funzione $g(y)$, imponendo la condizione $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Y(x,y)$. Si ottiene $g'(y) = \cos y$ da cui $g(y) = \sin y + k$, con $k \in I\!R$. La famiglia della primitive é quindi

$$F(x,y) = \sqrt{x-y} - x + \sin y + k, \quad k \in I\!R.$$

Soluzione del terzo esercizio

Determiniamo prima l'integrale generale dell'omogenea associata che é un'equazione di Eulero. Abbiamo $a_1 = 2$ e $a_2 = -2$ e con la sostituzione $x = e^z$ otteniamo la seguente equazione a coefficienti costanti:

$$\eta'' + \eta' - 2\eta = 0,$$

la cui equazione caratteristica é

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

che fornisce le due soluzioni $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. Quindi due soluzioni indipendenti dell'equazione a coefficienti costanti sono date da

$$u_1(z) = e^z, \quad u_2(z) = e^{-2z},$$

e sostituendo $z = \log x$ si ha l'integrale generale dell'equazione di Eulero:

$$y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x^2}.$$

Determiniamo ora un integrale particolare dell'equazione non omogenea. Normalizzando l'equazione, il termine noto é $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x^2}$, il determinante della martice wronskiana di (u_1, u_2) é $-\dfrac{3}{x^2}$ e la sua matrice inversa é data da:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3x} & \dfrac{1}{3} \\ \\ \dfrac{x^2}{3} & -\dfrac{x^3}{3} \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$v_1(x) = \frac{1}{3}\int \frac{\arctan x}{x^2} dx,$$

$$v_2(x) = -\frac{1}{3}\int x \arctan x dx,$$

da cui

$$v_1(x) = -\frac{1}{3x}\arctan x + \frac{1}{3}\log x - \frac{1}{6}\log(x^2+1),$$

$$v_2(x) = -\frac{1}{6}x^2 \arctan x + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}\arctan x.$$

L'integrale particolare é quindi

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{6x^2}\arctan x + \frac{1}{6x} + \frac{x}{6}\log\frac{x^2+1}{x^2}.$$

L'integrale generale dell'equazione é pertanto:

$$y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{1}{2}\arctan x\left(1 + \frac{1}{3x^2}\right) + \frac{1}{6x} + \frac{x}{6}\log\frac{x^2+1}{x^2}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territhrio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 10.07.2006

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare il massimo e il minimo assoluti (e i punti in cui sono assunti) della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$$

sull'insieme $D = \{(x, y) \in I\!R^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$.

2. Si consideri la forma differenziale lineare in $I\!R^2$

$$\omega(x, y) = \frac{2x + x^2y + y}{x^2 + 1}dx + \frac{2x + xy^2 + 2y}{2 + y^2}dy.$$

Calcolare l'integrale curvilineo di ω lungo la curva

$$\gamma = \{(x, y) \in I\!R^2 :\ y = \arcsin\frac{\sqrt{2} - \cos x}{2 - \sin 2x},\ \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 9y = \sin 2x + 2\cos 2x \\ y(0) = \dfrac{7}{5} \\ y'(0) = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica IIa
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 10. 07. 2006

Soluzione del primo esercizio.
La funzione ammette massimo e minimo assoluti perché é continua e l'insieme D é compatto. L'espressione del gradiente é $\nabla f(x,y) = (2x - y;\ 2y - x)$. Il sistema $\nabla f(x,y) = 0$ non ha soluzione nell'insieme D^0. Analizziamo quindi la restrizione di f alla frontiera di D. Cominciamo con il tratto dell'asse delle x compreso tra -1 e 1. Risulta $f(x,0) = x^2$. I punti candidati sono quindi

$$P_1 = (0,0),\ P_2 = (-1,0),\ P_3 = (1,0).$$

Esaminiamo ora il tratto della semicirconferenza centrata in $(0,0)$ e di raggio 1, contenuta nel primo e secondo quadrante. Una parametrizzazione di tale curva é

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ t = \sin\theta \end{cases}$$

con $\theta \in [0,\pi]$. La funzione ristretta a tale curva é quindi $f(\theta) = 1 - \sin\theta\cos\theta$, la cui derivata é

$$f'(\theta) = \sin^2\theta - \cos^2\theta = -\cos 2\theta.$$

Le soluzioni dell'equazione $f'(\theta) = 0$ sono $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, che danno luogo ai punti

$$P_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ P_5 = (-1,0).$$

Calcoliamo infine il valore di f nei punti trovati:

$$f(P_1) = 0,\ f(P_2) = f(P_3) = f(P_5) = 1,\ f(P_4) = \frac{1}{2}.$$

Pertanto il minimo assoluto é 0 ed é assunto nel punto P_1, mentre il massimo assoluto é 1 ed é assunto nei punti $P_2,\ P_3,\ P_5$.

Soluzione del secondo esercizio
Riscriviamo X e Y come segue:

$$X(x,y) = \frac{2x}{x^2+1} + y,$$

$$Y(x,y) = \frac{2y}{x^2+2} + x.$$

Risulta

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

quindi ω é chiusa e pertanto é esatta essendo definita in $\mathbb{R}^2$. Pertanto l'integrale curvilineo lungo una curva regolare non dipende dalla curva, ma solo dagli estremi. Calcoliamo allora la famiglia delle primitive, utilizzando la definizione.

$$F(x,y) = \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + y\right) dx + f(y) = \ln(x^2+1) + xy + f(y).$$

Determiniamo ora la funzione $f(y)$, imponendo la condizione $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Y(x,y)$.
Si ottiene $f'(y) = \dfrac{2y}{2+y^2}$ da cui $f(y) = \ln(y^2+2)+k$, con $k \in \mathbb{R}$. La famiglia della primitive é quindi

$$F(x,y) = \ln(x^2+1)(y^2+2) + xy + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo ora gli estremi della curva. Per $x = \pi/4$ otteniamo $y = \pi/4$, mentre per $x = \pi/2$ otteniamo $y = \pi/4$. L'integrale richiesto é quindi

$$\int_\gamma \omega = F(\pi/2, \pi/4) - F(\pi/4, \pi/4) = \ln \frac{4\pi^2+16}{\pi^2+16} + \frac{\pi^2}{16}.$$

Soluzione del terzo esercizio

Determiniamo prima l'integrale generale dell'omogenea associata che é un'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica é $\lambda^2 + 9 = 0$ che fornisce le due soluzioni complesse $\lambda_1 = -3i$ e $\lambda_2 = 3i$. L'integrale generale della omogenea é quindi

$$y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

Determiniamo ora un integrale particolare dell'equazione non omogenea che é della forma

$$\overline{y}(x) = t_1 \cos 2x + t_2 \sin 2x.$$

Sostituendo nell'equazione data si ottiene

$$5t_1 \cos 2x + 5t_2 \sin 2x = \cos 2x + \sin 2x,$$

da cui si ricava $t_1 = 2/5$ e $t_2 = 1/5$. L'integrale generale dell'equazione é pertanto:

$$y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{2}{5} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ricava infine $c_1 = 1$ e $c_2 = 3/5$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territhrio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 5.09.2006

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 + x^2y + xy^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuitá, calcolare le derivate direzionali uscenti da $(0,0)$ e stabilire se é differenziabile in $(0,0)$.

2. Calcolare il seguente integrale

$$\int\int\int_D z \cdot e^{x^2+y^2} dxdydz,$$

dove D é il dominio delimitato dalla superficie $z = x^2 + y^2$ e dal piano $z = 1$.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{9}{x}y + 3\dfrac{e^x}{x^2} \cdot y^{2/3} \\ \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica II
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 5. 09. 2006

Soluzione del primo esercizio.
Studiamo la continuitá in $(0,0)$. Passiamo a coordinate polari:

$$f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = \rho\sin\vartheta(1+\sin\vartheta\cos\vartheta);$$

$$\lim_{\rho\to 0} \rho\sin\vartheta(1+\sin\vartheta\cos\vartheta) = 0, \quad \forall\vartheta.$$

Proviamo ora l'uniformitá rispetto a ϑ. Risulta

$$|\rho\sin\vartheta(1+\sin\vartheta\cos\vartheta)| \le \rho|\sin\vartheta| + \rho\sin^2\vartheta|\cos\vartheta| \le \rho+\rho = 2\rho := g(\rho),$$

ed essendo g un infinitesimo per $\rho\to 0$, si ha l'uniformitá rispetto a ϑ. Proviamo ora l'eseistenza delle derivate direzionali uscenti da $(0,0)$. Posto $\nu = (v_1, v_2)$ con $|\nu| = 1$, si ha:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_2(v_2^2 + v_1^2 + v_1 v_2)}{t^3(v_1^2 + v_2^2)} =$$

$$= \frac{v_2(v_2^2 + v_1^2 + v_1 v_2)}{(v_1^2 + v_2^2)} := \frac{\partial f}{\partial \nu}(0,0).$$

In particolare $f'_x(0,0) = 0$ e $f'_y(0,0) = 1$. Studiamo ora la differenziabiltá in $(0,0)$. Risulta

$$\varepsilon(h,k) = \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Passando a coordinate polari si ottiene

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\sin^2\vartheta\cos\vartheta)}{\rho^3} = \sin^2\vartheta\cos\vartheta.$$

La funzione non é quindi differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione del secondo esercizio
Passiamo a coordinate cilindriche:

$$\int\int\int_D z\cdot e^{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho e^{\rho^2} d\rho \int_{\rho^2}^1 z dz =$$

$$= \pi \int_0^1 \rho e^{\rho^2}(1-\rho^4)d\rho = \pi \int_0^1 \rho e^{\rho^2} d\rho - \pi \int_0^1 \rho^5 e^{\rho^2} d\rho =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2} \right) - \pi \int_0^1 \rho^5 e^{\rho^2} d\rho.$$

Risolviamo l'integrale rimasto, integrando tre volte per parti:

$$\int \rho^5 e^{\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int 2\rho e^{\rho^2} \cdot \rho^4 d\rho = \frac{1}{2}\rho^4 e^{\rho^2} - \int 2\rho e^{\rho^2} \cdot \rho^2 d\rho =$$
$$= \frac{1}{2}\rho^4 e^{\rho^2} - \rho^2 e^{\rho^2} + \int_0^1 2\rho e^{\rho^2} d\rho = \frac{1}{2}\rho^4 e^{\rho^2} - \rho^2 e^{\rho^2} + e^{\rho^2} + c$$

da cui

$$\int_0^1 \rho^5 e^{\rho^2} d\rho = \frac{1}{2}e - 1.$$

Quindi

$$\int\int\int_D z \cdot e^{x^2+y^2} dxdydz = \pi \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2} \right) - \pi \left(\frac{1}{2}e - 1 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Soluzione del terzo esercizio

Per il Teorema di Picard-Peano il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione. Risolviamo l'equazione differenziale. Posto $z = \sqrt[3]{y}$ si perviene all'equazione differenziale lineare

$$z' = -\frac{3}{x}z + \frac{e^x}{x^2},$$

le cui soluzioni sono

$$z(x) = \frac{1}{x^3}(xe^x - e^x + c)$$

e quindi

$$y(x) = \frac{1}{x^9}(xe^x - e^x + c)^3.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $c = 0$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territhrio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 26.09.2006

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dire se la seguente forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \frac{3}{2}\sqrt{xy}dx + \left(\frac{x^2}{2\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) dy$$

é esatta nel suo dominio di definizione e in caso affermativo trovarne le primitive.

2. Calcolare il seguente integrale

$$\int\int\int_D \ln(x^2+y^2+z^2)dxdydz,$$

dove D é l'insieme delimitato dalle bocce di centro $(0,0)$ e raggi 1 e 2.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sin 2x - y\tan x \\ \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica II
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 26. 09. 2006

Soluzione del primo esercizio.
L'insieme di definizione della forma differenziale lineare é $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$, che é convesso. Poiché X e Y sono di classe $C^1(A)$, per verificare l'esattezza di ω é sufficiente verificarne la chiusura. Risulta:

$$\frac{\partial X}{\partial y}(x, y) = \frac{3x}{4\sqrt{xy}} = \frac{\partial Y}{\partial x}(x, y),$$

e quindi ω é esatta in A. Determiniamo ora i potenziali.

$$F(x, y) = \frac{3}{2}\int \sqrt{xy}dx + f(y) = \frac{3}{2y}\int y\sqrt{xy}dx + f(y) =$$
$$= \frac{xy\sqrt{xy}}{y} + f(y) = x\sqrt{xy} + f(y).$$

Determiniamo $f(y)$, imponendo la condizione $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Y(x, y)$. Si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2}{2\sqrt{xy}} + f'(y) := \frac{x^2}{2\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{y}},$$

da cui $f'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, cioé $f(y) = 2\sqrt{y} + c$, con $c \in \mathbb{R}$. I potenziali sono quindi

$$F(x, y) = x\sqrt{xy} + 2\sqrt{y} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Soluzione del secondo esercizio
Passiamo a coordinate sferiche. Tale cambiamento di variabili é individuato dalla trasformazione

$$h(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin\varphi \cos\theta,\ \rho \sin\varphi \sin\theta,\ \rho \cos\varphi),$$

con $\theta \in [0, 2\pi[,\ \ \rho \in [1, 2]$ e $\varphi \in [0, \pi]$.

$$\int\int\int_D \ln(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^2 \ln \rho^2 d\rho \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi =$$
$$= 8\pi \int_1^2 \rho^2 \ln \rho d\rho = 8\pi \left[\frac{1}{3}\rho^3 \ln \rho - \frac{1}{9}\rho^3\right]_1^2 = 8\pi \left(\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}\right).$$

Soluzione del terzo esercizio

Per il Teorema di Picard-Peano il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione. Risolviamo l'equazione differenziale del primo ordine lineare. Si ha $\alpha(x) = -\tan x$ e $\beta(x) = \sin 2x$. Quindi

$$\varphi(x) = -\int \tan x dx = \ln(\cos x),$$

pertanto

$$y(x) = \cos x(c - 2\cos x).$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $c = 1$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 13.12.2006

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare i massimi e i minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = \frac{3y}{2+x^2+y^2}.$$

2. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{x}{y}\,dx + y\log x\ dy,$$

dove γ é l'arco di iperbole $y = \frac{1}{x}$, con $1 \leq x \leq e$.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica II
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 13. 12. 2006

Soluzione del primo esercizio.
Il dominio della funzione é $I\!R^2$. L'espressione del gradiente é

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-6xy}{(2+x^2+y^2)^2}; \frac{6+3x^2-3y^2}{(2+x^2+y^2)^2} \right).$$

Le soluzioni del sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ sono $P_1 = (0, \sqrt{2})$ e $P_2 = (0, -\sqrt{2})$. Esaminiamo la natura di tali punti critici. Calcoliamo le derivate seconde.

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{6y(3x^2-2-y^2)}{(2+x^2+y^2)^3},$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = \frac{6x(3y^2-2-x^2)}{(2+x^2+y^2)^3},$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{6y(-3x^2-6+y^2)}{(2+x^2+y^2)^3}.$$

Risulta infine $|H(P_1)| = 9/32 = |H(P_2)|$ e poiché $f''_{xx}(P_1) < 0$ il punto P_1 é di massimo relativo, mentre P_2 é di minimo relativo essendo $f''_{xx}(P_2) > 0$.

Soluzione del secondo esercizio

$$\int_\gamma \frac{x}{y} dx + y \ln x dy = \int_1^e x^2 dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx.$$

Risolvendo l'ultimo integrale per parti si ottiene infine

$$\int_\gamma \frac{x}{y} dx + y \ln x dy = [1/3x^3]_1^e + \left[\frac{\ln x}{2x^2}\right]_1^e - 1/2 \int_1^e x^{-3} dx =$$
$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2e^2} + 1/2 \left[\frac{1}{2x^2}\right]_1^e = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{4e^2} - \frac{1}{4} =$$
$$= \frac{1}{3}e^3 + \frac{3}{4e^2} - \frac{7}{12}$$

Soluzione del terzo esercizio
Per il Teorema di Picard-Peano il problema di Cauchy ammette un'unica

soluzione. Risolviamo l'equazione differenziale, che é del secondo ordine a coefficienti costanti. La soluzione dell'omogenea é

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Ora, poiché $\alpha = 2$ é soluzione dell'equazione caratteristica e $2\alpha + a = 0$, un integrale particolare é

$$\overline{y}(x) = 2xe^{2x}.$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione sono

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + 2xe^{2x}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ricava $c_1 = 1$ e $c_2 = 3$. La soluzione del problema di Cauchy é

$$y(x) = e^{2x}(1 + 3x + 2x^2).$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 28.03.2007

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione

$$f(x, y) = 2y^4 - 3x^4 + 5x^2y^2 - 3.$$

Determinare inoltre i punti di massimo e di minimo assoluti nel triangolo

$$T = \{(x, y) \in I\!R^2 : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x\}$$

2. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \left(y^3 \cos x + \frac{1}{1 + (x + \pi)^2} \right) \, dx + 3y^2 \sin x \; dy,$$

dove $\gamma = \{(x, y) \in I\!R^2 \; : \; y = (2\cos^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}, \; \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}\}$.

3. Dopo aver verificato che $y(x) = e^x$ é soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - \frac{2x}{x^2 + 1} \, y' - \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} \, y = 0,$$

determinare l'integrale generale. Calcolare poi la soluzione che verifica la condizione $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica II
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 28. 03. 2007

Soluzione del primo esercizio. Il dominio di f é $\mathbb{R}^2$. Il gradiente della funzione é

$$\nabla f(x,y) = (-12x^3 + 10xy^2, \quad 8y^3 + 10x^2y).$$

Il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ fornisce l'unica soluzione $(0,0)$. Stabiliamo la natura dia tale punto. Il test della matrice Hessiana non fornisce informazioni, essendo $|H(0,0)| = 0$. Consideriamo allora le restrizioni di f agli assi cartesiani:

$$f_{|y=0} = -3x^4 - 3 := g(x) \Longrightarrow g'(x) = -12x^3,$$

cioé $(0,0)$ é un punto di massimo relativo per g;

$$f_{|x=0} = 2y^4 - 3 := h(y) \Longrightarrow h'(y) = 8y^3,$$

cioé $(0,0)$ é un punto di minimo relativo per h. Pertanto $(0,0)$ é un punto sella per f.
Determiniamo ora il massimo e il minimo assoluti di f nel triangolo dato. I punti critici lungo l'asse delle x, con $0 \le x \le 1$, sono $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (1,0)$, mentre quelli lungo la retta $x = 1$, con $0 \le y \le 1$, sono $P_3 = (1,1)$ e P_2 giá determinato. Il tratto di frontiera $y = x$, con $0 \le x \le 1$ fornisce i punti $P_1 =$ e P_3 giá determinati. Calcoliamo ora il valore di f nei tre punti:

$$f(P_1) = -3, \; f(P_2) = -6, \; f(P_3) = 1.$$

Il massimo assoluto nel triangolo é 1, assunto in P_3, mentre il minimo assoluto é -6, assunto in P_2.

Soluzione del secondo esercizio
Poniamo

$$\omega(x,y) = \left(y^3 \cos x + \frac{1}{1 + (x+\pi)^2}\right) \, dx + 3y^2 \sin x \; dy.$$

Proviamo che ω é esatta, in modo che l'integrale curvilineo di ω non dipenda dalla curva, ma solo dai suoi estremi. L'insieme di definizione della forma differenziale lineare é $I\!\!R^2$, quindi, per verificare l'esattezza di ω, é sufficiente verificarne la chiusura. Risulta:

$$\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = 3y^2 \cos x = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y),$$

e quindi ω é esatta. Determiniamo ora i potenziali.

$$f(x,y) = \int 3y^2 \sin x \; dy + \xi(x) = y^3 \sin x + \xi(x).$$

Determiniamo $\xi(x)$, imponendo la condizione $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = X(x,y)$. Si ha

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y^3 \cos x + \xi'(x) := y^3 \cos x + \frac{1}{1+(x+\pi)^2},$$

da cui $\xi(x) = \arctan(x+\pi) + c$, con $c \in I\!\!R$. I potenziali sono quindi

$$f(x,y) = y^3 \sin x + \arctan(x+\pi) + c, \quad c \in I\!\!R.$$

Determiniamo ora gli estremi della curva. Per $x = \frac{\pi}{6}$, otteniamo $y = \sqrt[3]{(3/2)^4}$, mentre per $x = \frac{\pi}{4}$ otteniamo $y = 1$. Quindi

$$\int_\gamma \omega = f\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) - f\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt[3]{(3/2)^4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{81}{32} + \arctan\left(\frac{5}{4}\pi\right) - \arctan\left(\frac{7}{6}\pi\right).$$

Soluzione del terzo esercizio

E' immediato verificare che $y(x) = e^x$ é una soluzione dell'equazione differenziale. Posto $y_1(x) = e^x$ e $a(x) = -\dfrac{2x}{x^2+1}$, un'altra soluzione linearmente indipendente é fornita dalla seguente formula:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2(x)} \; dx.$$

Risulta

$$\int a(x) \; dx = \int \frac{2x}{x^2+1} \; dx = \log(x^2+1);$$

quindi

$$y_2(x) = e^x \int \frac{x^2+1}{e^{2x}} \; dx = e^x \int (x^2+1)e^{-2x} \; dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene infine

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= e^x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2+1)+\int xe^{-2x}\,dx\right)= \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2+1)+e^x\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx\right)= \\
&= -\frac{1}{4}e^{-x}(2x^2+2x+3)
\end{aligned}$$

L'integrale generale é:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}(2x^2+2x+3), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La soluzione che verifica la condizione richiesta si ottiene per $c_1 = 0$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 18.04.2007

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la continuitá e la differenziabilitá della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcolare inoltre le derivate direzionali uscenti da $(0,0)$.

2. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D \frac{y^2}{x^2+y^2+1} \; dxdy,$$

dove D é la parte di corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2, contenuta nel secondo quadrante.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2y + 2y^{3/2} \log(\dfrac{1}{1+e^x}) \\ \\ y(0) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica II
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 18. 04. 2007

Soluzione del primo esercizio.

Studiamo la differenziabilitá della funzione nel punto $(0,0)$. Risulta

$$f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0),$$

e

$$\varepsilon(x,y) = \frac{\sin^2 xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Calcoliamo il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y)$. Passando a coordinate polari si ottiene:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\sin^2(\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta)}{\rho^3} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin^2(\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta)}{\rho^4\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta} \cdot \rho\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta = 0.$$

Verifichiamo ora l'uniformitá rispetto a ϑ. Poniamo $h(\rho) := \dfrac{\sin^2(\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta)}{\rho^4\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta}$. Poiché $\lim_{\rho\to 0} h(\rho) = 1$, in corrispondenza di $\varepsilon = 1/2$, esiste $\delta > 0$ tale che $\forall \rho < \delta$ risulta $|h(\rho) - 1| < 1/2$, da cui $|h(\rho)| < 1 + 1/2 = 3/2$. Pertanto

$$|f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)| \leq 3/2\rho := g(\rho),$$

per un opportuno δ. Quindi il limite é uniforme rispetto a ϑ. La funzione é perció differenziabile in $(0,0)$ e quindi é continua in $(0,0)$ ed ammette tutte le derivate direzionali uscenti dall'origine. Infine si trova facilmente che $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}(0,0) = 0$.

Soluzione del secondo esercizio

Passando a coordinate polari l'integrale si scrive

$$\int_1^2 \frac{\rho^3}{1+\rho^2}\, d\rho \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\vartheta \, d\vartheta.$$

Per quanto concerne il primo integrale, eseguendo la divisione tra polinomi otteniamo

$$\int_1^2 \frac{\rho^3}{1+\rho^2}\, d\rho = \int_1^2 \rho \, d\rho - \int_1^2 \frac{\rho}{1+\rho^2}\, d\rho =$$
$$= \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2)\right]_1^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$$

Per il secondo integrale si ha

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 \vartheta \; d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos 2\vartheta) \; d\vartheta = \frac{\pi}{4}.$$

Il valore dell'integrale richiesto é quindi

$$\int \int_D \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \; dx \; dy = \frac{3}{8}\pi - \frac{\pi}{8} \ln \frac{5}{2}.$$

Soluzione del terzo esercizio

Per il Teorema di Picard-Peano il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione. Chiaramente $y(x) = 0$ é soluzione dell'equazione differenziale (che é di Bernoulli), ma non del problema di Cauchy. Poniamo $y^{-\frac{1}{2}} = z$ e notiamo che $z(x) > 0$ per ogni x. L'equazione differenziale diventa:

$$z' = -z - \ln \frac{1}{1 + e^x},$$

che é un'equazione differenziale lineare, in cui $\alpha(x) = -1$ e $\beta(x) = -\ln \frac{1}{1+e^x}$. Risulta

$$\int \alpha(x) \; dx = -x$$

e

$$\int \beta(x) \; e^x \; dx = -\int e^x \ln \frac{1}{1 + e^x} \; dx.$$

Operando la sostituzione $e^x = t$, si ottiene

$$\int \beta(x) \, e^x \; dx = \int \ln(1+t) \; dt = t \ln(1+t) - \int \frac{t}{1+t} \; dt = (1+e^x) \ln(1+e^x) - e^x.$$

La soluzione nella variabile z é

$$z(x) = (e^{-x} + 1) \ln(1 + e^x) - 1 + ce^{-x},$$

e quindi

$$y(x) = \frac{1}{[(e^{-x} + 1) \ln(1 + e^x) - 1 + ce^{-x}]^2}.$$

Imponendo la condizione iniziale si determinano due valori per la costante c: $c_1 = 3 - 2 \ln 2$ e $c_2 = -1 - 2 \ln 2$. Se $c = c_2$ si otterrebbe $z(0) = -2$ che é impossibile. L'unica soluzione del problema di Cauchy si ottiene quindi per $c = c_1$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 04.07.2007

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare, se esistono, i massimi e i minimi relativi in $I\!R^2$, della funzione

$$f(x, y) = y|x + y - 2|.$$

Esistono massimi e minimi assoluti in $I\!R^2$?

2. Determinare l'area della regione di piano D delimitata dalle rette di equazione $y = 0$, $x = \log 2$ e dalla curva γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \log(t + 1) \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 + t \end{cases} \qquad t \in [0, 1].$$

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2y'' - 2xy' + (5/4)y = (1/2)\sqrt{x} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica II
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 4. 07. 2007

Soluzione del primo esercizio.
Il sistema $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ fornisce l'unica soluzione $(2, 0)$, che peró é un punto che appartiene alla retta $y = -x + 2$. Non é possibile quindi stabilire con il test dell'hessiano la natura di tale punto.
La funzione si annulla sui punti della retta $y = -x + 2$ e sull'asse delle x. Studiando il segno della funzione, possiamo concludere che i punti del tipo $(x, -x + 2)$ con $x < 2$ sono di minimo relativo, mentre i punti $(x, -x + 2)$ con $x > 2$ sono di massimo relativo. Il punto $(2, 0)$ é un punto sella, cosí come tutti gli altri punti dell'asse x.

Soluzione del secondo esercizio
Applicando le formule di Gauss - Green, si ottiene

$$m(D) = \int_{+FrD} x \; dy,$$

dove la frontiera di D é formata dal segmento posto sull'asse delle x che congiunge i punti $(0, 0)$ e $(\log 2, 0)$, dal segmento posto sulla retta $x = \log 2$ che congiunge i punti $(\log 2, 0)$ e $(\log 2, 3/2)$ e infine dalla curva γ. Pertanto

$$\int_{+FrD} x \; dy = \int_0^1 \log 2 \; dy - \int_0^1 (t + 1) \log(t + 1) \; dt.$$

Risolvendo l'ultimo integrale per parti, si ottiene infine

$$m(D) = \frac{3}{4} - \log 2.$$

Soluzione del terzo esercizio
É un'equazione di Eulero. Risolviamo prima l'omogenea associata. Posto $x = e^z$ e $\eta(z) = y(e^z)$ si ottiene

$$\eta'' - 3\eta' + \frac{5}{4}\eta = 0$$

la cui equazione caratteristica é

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5/4 = 0.$$

Quindi il sistema fondamentale per l'omogenea é

$$\{x^{5/2}, x^{1/2}\}.$$

Determiniamo ora un integrale particolare.

$$\mathrm{det(W(x)) = -2x^2},$$

$$[W(x)]^{-1} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^{-3/2}}{2} \\ \\ -\frac{x^{1/2}}{2} \end{pmatrix},$$

pertanto

$$v(x) = \frac{1}{4} \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} \begin{pmatrix} x^{-3/2} \\ \\ -x^{1/2} \end{pmatrix} dx.$$

$$v_1(x) = \frac{1}{4} \int x^{-3} dx = -\frac{1}{8x^2},$$

$$v_2(x) = -1/4 \int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{4} \log x.$$

Quindi

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{8}\sqrt{x} - \frac{1}{4}\sqrt{x} \log x,$$

e perció l'integrale generale dell'equazione differenziale é

$$y(x) = c_1 x^2 \sqrt{x} + \sqrt{x} \left(c_2 - \frac{1}{4} \log x \right).$$

La soluzione che verifica le condizioni richieste si ottiene per $c_1 = 5/8$ e $c_2 = -5/8$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 07.09.2007

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+(y-2)^2}, & (x,y) \neq (0,2) \\ 0, & (x,y) = (0,2). \end{cases}$$

sul triangolo delimitato dalle rette $x = 0$, $y = 0$ e $x + y - 3 = 0$.

2. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma x\ |y|\ ds,$$

dove γ é l'arco di ellisse di equazione $x^2/36 + y^2/9 = 1$ che congiunge i punti $(0,-3)$ e $(6,0)$.

3. Dopo aver risolto l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{2}{x}y + \frac{\sin 3x}{x^2},$$

determinare la soluzione tale che

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 3/2.$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica II
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 07. 09. 2007

Soluzione del primo esercizio. La funzione non é continua in $(0,2)$. Infatti, passando a coordinate polari,

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^2} = +\infty.$$

Pertanto la funzione non ammette massimo assoluto nel triangolo T. Ora, poiché $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in T$ e $f(0,2) = 0$, il minimo assoluto é zero ed é assunto nel punto $(0,2)$. Facilmente si verifica che la funzione non é derivabile parzialmente rispetto ad x e y nel punto $(0,2)$. Il gradiente della funzione é

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-2x}{[x^2+(y-2)^2]^2}, \frac{-2(y-2)}{[x^2+(y-2)^2]^2} \right).$$

Il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ fornisce l'unica soluzione $(0,2)$, che quindi non é accettabile. La funzione non presenta quindi massimi e minimi relativi interni a T.

Soluzione del secondo esercizio

Una parametrizzazione della curva γ é la seguente:

$$\begin{cases} x(t) = 6\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}$$

con $t \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$. Quindi

$$\int_\gamma x|y| \; ds = 18 \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin t \cos t \sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t} \; dt =$$
$$= 18 \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin t \cos t \sqrt{36 - 27\cos^2 t} \; dt = \frac{1}{3} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} 54 \sin t \cos t \sqrt{36 - 27\cos^2 t} \; dt =$$
$$= \frac{2}{9} \left[(36 - 27\cos^2 t)^{3/2} \right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} = -42$$

Soluzione del terzo esercizio

L'equazione differenziale é del primo ordine lineare, con $\alpha(x) = -\frac{2}{x}$ e $\beta(x) = \frac{\sin 3x}{x^2}$. Si ha quindi

$$\int \alpha(x)\ dx = -2\ln x,$$

$$\int \beta(x)e^{-\int \alpha(x)dx}\ dx = -\frac{\cos 3x}{3}.$$

La famiglia delle soluzioni dell'equazione differenziale é quindi

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x + c\right).$$

Determiniamo ora la soluzione richiesta.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{c-\frac{1}{3}\cos 3x}{x^2} &= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3c-\cos 3x}{x^2} = \\ = 3\lim_{x\to 0}\frac{3c-\cos 3x}{9x^2} &= \frac{3}{2} \Longleftrightarrow 3c = 1 \Longleftrightarrow c = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

La soluzione cercata é

$$y(x) = \frac{1}{3x^2}(1-\cos 3x).$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA IIa
Prova del 28.09.2007

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = x - 2y + 2z$$

sull'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0\}.$$

2. Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = (\alpha x^2 \sqrt{y} + x) \; dx + \left(\frac{\beta x^3}{\sqrt{y}} + 3y^2 \right) \; dy,$$

stabilire i valori dei parametri α, $\beta \in \mathbb{R}$ affinché ω sia esatta nel suo insieme di definizione. Determinare infine il potenziale f tale che $f(0, 1) = 2$.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 - 2} y' + \dfrac{3x^2}{x^3 - 2} y = 0 \\ \\ y(0) = 0 \\ \\ y'(0) = 10 \end{cases}$$

(Sugg: Una soluzione dell'equazione differenziale é $y_1(x) = e^x$.)

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica II
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 28. 09. 2007

Soluzione del primo esercizio. La funzione é continua e l'insieme D é compatto. Quindi per il teorema di Weierstrass f ammette il massimo e il minimo assoluti. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La lagrangiana si scrive

$$H(x,y,z,\lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9).$$

Il sistema $\nabla H = (0,0,0,0)$ fornisce le soluzioni $P_1(-1,2,-2)$ e $P_2(1,-2,2)$. Poiché $f(P_1) = -9$ e $f(P_2) = 9$, il massimo assoluto é 9 ed é assunto in $P - 2$, mentre il minimo assoluto é -9 ed é assunto in P_1.

Soluzione del secondo esercizio
L'insieme di definizione di ω é

$$A = \{(x,y) \in I\!R^2 : \ y > 0\},$$

che é un insieme convesso e $\omega \in C^1(A)$. Quindi la chiusura implica l'esattezza. La f.d.l. é chiusa se e solo se $\alpha = 6\beta, \quad \forall \beta \in I\!R$. Determiniamo ora i potenziali.

$$f(x,y) = \int (6\beta x^2\sqrt{y} + x)\ dx + g(y) = 2\beta x^3\sqrt{y} + \frac{x^2}{2} + g(y).$$

Determiniamo $g(y)$, imponendo la condizione $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Y(x,y)$. Si ha

$$g'(y) = 3y^2,$$

da cui $g(y) = y^3 + c$, con $c \in I\!R$. I potenziali sono quindi

$$f(x,y) = 2\beta x^3\sqrt{y} + \frac{x^2}{2} + y^3 + c, \quad c \in I\!R.$$

Imponendo la condizione richiesta si ottiene $c = 1$.

Soluzione del terzo esercizio
E' immediato verificare che $y(x) = e^x$ é una soluzione dell'equazione differenziale. Posto $y_1(x) = e^x$ e $a(x) = -\dfrac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 - 2}$, un'altra soluzione

linearmente indipendente é fornita dalla seguente formula:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2(x)}\ dx.$$

Eseguendo la divisione tra polinomi, si ottiene

$$\int a(x)\ dx = -x - \log(x^3 - 2).$$

Quindi

$$y_2(x) = e^x \int e^{-x}(x^3 - 2)\ dx.$$

Integrando tre volte per parti si perviene infine a

$$y_2(x) = -x^3 - 3x^2 - 6x - 4.$$

L'integrale generale é

$$y(x) = c_1 e^x - c_2(x^3 + 3x^2 + 6x + 4), \qquad c_1, c_2 \in I\!R.$$

La soluzione che verifica il problema di Cauchy si ottiene per $c_1 = 20$ e $c_2 = 5$.

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 12.12.2007

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale

$$\int\int_E y\ dxdy$$

dove

$$E = \{(x,y) \in I\!R^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 3,\ x^2+y^2 \geq \frac{9}{2}\}.$$

2. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{\tan(x/2)}{\tan^2(x/2)+1} ds,$$

dove γ è la bisettrice del primo quadrante congiungente $(0,0)$ e $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^3 y - x^2 y \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica II
c.l. Ambiente e Territorio
Appello del 12. 12. 2007

Soluzione del primo esercizio. L'insieme E può essere visto come l'unione dei due domini normali all'asse (per esempio) y definiti dalle

$$E_1 = \{(x,y) \in I\!R^2 : 0 \leq y \leq 3/\sqrt{2},\ \sqrt{(9/2) - y^2} \leq x \leq 3 - y\},$$

$$E_2 = \{(x,y) \in I\!R^2 : 3/\sqrt{2} \leq y \leq 3,\ 0 \leq x \leq 3 - y\}.$$

Integrando, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\int\!\!\int_E y dx dy = \int\!\!\int_{E_1} y dx dy + \int_{E_2} y dx dy \\
&= \int_0^{3/\sqrt{2}} y dy \int_{\sqrt{(9/2)-y^2}}^{3-y} dx + \int_{3/\sqrt{2}}^{3} y dy \int_0^{3-y} dx \\
&= \int_0^{3/\sqrt{2}} (3y - y^2 - y\sqrt{(9/2) - y^2}\ ) dy + \int_{3/\sqrt{2}}^{3} (3y - y^2) dy \\
&= \left[\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{((9/2) - y^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{3/\sqrt{2}} + \left[\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{3/\sqrt{2}}^{3} \\
&= \frac{27}{4} - \frac{9}{2\sqrt{2}} - \frac{9}{2\sqrt{2}} + \frac{27}{2} - 9 - \frac{27}{4} + \frac{9}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{9}{2} - \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}).
\end{aligned}$$

Soluzione del secondo esercizio

Le equazioni parametriche della bisettrice sono date dalle $x(t) = t,\ y(t) = t$, con $t \in [0, \pi/2]$. Quindi

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{2} dt.$$

Dalla definizione di integrale curvilineo rispetto alla lunghezza d'arco otteniamo, con la sostituzione $\tan(t/2) = u$,

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \frac{\tan(x/2)}{\tan^2(x/2) + 1} ds = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(t/2)}{\tan^2(t/2) + 1} dt \\
&= \sqrt{2} \int_0^1 \frac{2u}{(1 + u^2)^2} du = \left[-\frac{1}{1 + u^2}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Soluzione del terzo esercizio

Si tratta di una equazione a variabili separabili, estremamente semplice da risolvere. Si ha:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y(x-1)$$

da cui

$$\int \frac{dy}{y} = \int (x^3 - x^2)dx$$

e quindi integrando, tenendo conto che possiamo scegliere $y > 0$,

$$\log y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + k$$

da cui

$$y = c \exp(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}),$$

con c costante positiva. Sostituendo il dato iniziale, otteniamo $c = 2$. La soluzione è quindi

$$y = 2 \exp(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}).$$