**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 10.01.2001**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

**Soluzione**

Usando il criterio del rapporto si ottiene:

$$\lim_n \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_n \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)(n!)} =$$
$$= \lim_n \frac{(n+1)n!(n+1)n!(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!n!n!} = \lim_n \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1.$$

e quindi la serie converge.

**2.** Si consideri la funzione $f : [-\frac{3}{2}, 1] \to I\!R$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(2+x)}{x+1}, & -\frac{3}{2} \le x < -1 \\ (x-1)^{\frac{1}{3}}, & -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{\sin x - 2x}{x}, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Studiare la continuitá e la derivabilitá di $f$.
Determinare inoltre l' espressione della derivata prima $f^{'}$.

**Soluzione**

Studiamo la continuitá di $f$ in $x = -1$.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{\log(2+x)}{x+1} = 1,$$

ma $f(-1) = -2^{\frac{1}{3}}$. Quindi $f$ non é continua in $x = -1$. Pertanto $f$ non é derivabile in tale punto.
Esaminiamo ora la continuitá in $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - 2x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} - 2 = -1,$$

e $f(0) = -1$. Quindi $f$ é continua in $x = 0$. Studiamo la derivabilitá in $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \to 0^-} f^{'}(x) = \\ = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Quindi $f$ non é derivabile in $x = 0$. Resta da studiare la derivabilitá agli estremi.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -\frac{3}{2}^+} \frac{f(x) - f(-\frac{3}{2})}{x + \frac{3}{2}} = \lim_{x \to -\frac{3}{2}^+} f^{'}(x) = \\ &= \lim_{x \to -\frac{3}{2}^+} \frac{x + 1 - (x+2)\log(x+2)}{(x+1)^2(x+2)} = -4 - 28\log\frac{7}{2} = f^{'}_{+}(-\frac{3}{2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \to 1^-} f^{'}(x) = \\ = \lim_{x \to 1^-} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} &= \cos 1 - \sin 1 = f^{'}_{s}(1). \end{aligned}$$

Infine si ha:

$$f^{'}(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 1 - (x+2)\log(x+2)}{(x+1)^2(x+2)}, & -\frac{3}{2} \leq x < -1 \\ \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}, & -1 < x < 0 \\ \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

**3.** Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^2 \log\frac{x^2+2}{x+1}dx.$$

**Soluzione**

Troviamo prima una primitiva. Notiamo che $\dfrac{x^2+2}{x+1} > 0$ per $x > -1$. Usando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\int \log \frac{x^2+2}{x+1} dx = x \log \frac{x^2+2}{x+1} - \int \frac{x(x^2+2x-2)}{(x^2+2)(x+1)} dx.$$

Eseguendo la divisione tra i polinomi $x^3+2x^2-2x$ e $x^3+x^2+2x+2$ otteniamo 1 come quoziente e $x^2-4x-2$ come resto. Pertanto

$$\int \log \frac{x^2+2}{x+1} dx = x \log \frac{x^2+2}{x+1} - x - \int \frac{x^2-4x-2}{(x^2+2)(x+1)} dx.$$

Usando ora la formula di Hermite si ha

$$\frac{x^2-4x-2}{(x^2+2)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}.$$

Utilizzando il principio di identitá tra polinomi si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C+B=-4 \\ 2A+C=-2 \end{cases}$$

che risolto da i seguenti valori per le costanti $A, B, C$:

$$A=1,\ B=0,\ C=-4.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \log \frac{x^2+2}{x+1} dx &= x \log \frac{x^2+2}{x+1} - x - \int \frac{1}{(x+1)} dx - \int \frac{-4}{x^2+2} dx = \\ &= x \log \frac{x^2+2}{x+1} - x - \log(x+1) + 2 \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= x \log \frac{x^2+2}{x+1} - x - \log(x+1) + 2 \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c \end{aligned}$$

Se indichiamo con $P(x)$ la primitiva ottenuta per $c=0$, risulta

$$\int_0^2 \log \frac{x^2+2}{x+1} dx = [P(x)]_0^2 = 2\log 2 - 2 - \log 3 + 2 \arctan \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 19.03.2001**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + (n+1)^{\frac{1}{3}}}.$$

**2.** Determinare, dopo averne giustificato l'esistenza, il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x) = (9 - x^2)^{\frac{1}{2}} + |x + 2|$$

nel suo dominio.

**3.** Stabilire se la funzione $f(x) = e^{-2x} \cos 3x$ é integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[0, +\infty[$ e, in caso affermativo, calcolare l'integrale.

**Universitá degli Studi di Perugia - Facoltá di Ingegneria**

Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia (Ambiente e Territorio)

Appello del **29.06.2001**

Svolgere almeno due tra gli esercizi seguenti:

**1.** Stabilire il carattere della seguente serie numerica, motivando adeguatamente la risposta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3+1}(3/2)^n.$$

**2.** Provare che la funzione $f : [1,3] \to I\!R$ :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}, & x \in [1,e] \\ \\ e^{-1/2}, & x \in [e,3] \end{cases}$$

è continua in $[1,3]$ e determinare la classe delle primitive in $[1,3]$.

**3.** Si consideri la funzione:

$$f(x) = \log \frac{(x^2+2x+1)}{x+a}.$$

Trovare i valori della costante $a \in I\!R$ per i quali la funzione $f$ possiede punti di massimo o di minimo relativo nel proprio dominio. Si determinino poi questi questi punti.

**Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica Ia**
**c.l. Ambiente e Territorio**
**appello del 29.06.2001**

**1.** La serie è a termini positivi. Usiamo quindi il criterio del rapporto. Risulta:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2}\frac{(2n^3+1)(n+3)}{(n+2)(2(n+1)^3+1)},$$
il cui limite per $n \to +\infty$ è $3/2 > 1$. Perciò la serie diverge.

**2.** La $f$ è ovviamente continua in ogni punto di $[1, 3]$ diverso da $e$. Ma essa è continua anche in $e$ perchè :
$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} f(x) = e^{-1/2}.$$
Per il calcolo delle primitive consideriamo la funzione integrale:
$$F(x) = \int_1^x f(t)dt.$$
Se $1 \le x \le e$, ponendo $z = \sqrt{t}$, si ha:
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \frac{\log t}{\sqrt{t}}dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \log z^2 dz \\ &= 4\int_1^{\sqrt{x}} \log z dz = 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x} + 4. \end{aligned}$$
Se invece $x \in ]e, 3]$, si ha:
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^e \frac{\log t}{\sqrt{t}}dt + \int_e^x e^{-1/2}dt \\ &= -2\sqrt{e} + 4 + e^{-1/2}(x-e). \end{aligned}$$
Pertanto la classe delle primitive è data dalla famiglia di funzioni:
$$\int f(x)dx = \int_1^x f(t)dt + c, \quad c \in I\!R.$$

**3.** La funzione può essere scritta nella forma:

$$f(x) = \log \frac{(x+1)^2}{x+a}.$$

Il campo di esistenza della $f$ è l'insieme

$$D = \{x \in I\!R : x > -a,\ x \neq -1\}.$$

Derivando la funzione in $D$ si ottiene:

$$f'(x) = \frac{x+a}{(x+1)^2} \frac{(x+1)(x-1+2a)}{(x+a)^2} = \frac{x-1+2a}{(x+1)(x+a)}.$$

Questa derivata si annulla se e solo se $x = 1-2a$. Ora i valori di $a$ tali che $1-2a \in D$ sono quelli per cui $1-2a > -a$, cioè $a < 1$, e $1-2a \neq -1$, cioé $a \neq 1$. Pertanto questi valori sono tutti e soli i numeri $a$ minori di 1.

Siccome per tali valori di $a$ risulta $-a > -1$, in $D$, si ha anche $x+1 > 0$, cosicchè la derivata cambia segno a seconda che $x < 1-2a$ oppure $x > 1-2a$. In particolare se $x \in ]-a, 1-2a[$ allora $f'(x) < 0$, mentre se $x > 1-2a$ $f'(x) > 0$. Pertanto per ogni valore di $a < 1$ la $f$ ammette minimo relativo, mentre non ha massimi relativi.

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 23.07.2001**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}-1)^n.$$

**Svolgimento**

La serie é a termini positivi. Usando il criterio della radice si ottiene:

$$\lim_n \left[(n^{1/n}-1)^n\right]^{1/n} = \lim_n n^{1/n}-1 =$$
$$= \lim_n e^{1/n \log n} - 1 = 0.$$

e quindi la serie converge.

**2.** Data la funzione $f : I\!R \to I\!R$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{9-x^2}}, & |x| < 3 \\ \\ (x-a)(x+3)^2, & |x| \geq 3 \end{cases}$$

dopo aver determinato il valore del parametro $a \in I\!R$ in modo che $f$ risulti continua su $I\!R$, studiare la derivabilitá.

**Svolgimento**

Determiniamo $a \in I\!R$ in modo che $f$ sia continua.

$$\lim_{x\to -1^+} e^{-\dfrac{1}{9-x^2}} = 0,$$

e $f(-3) = 0$. Quindi $f$ é continua in $x = -3$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.
Esaminiamo ora la continuitá in $x = 3$.

$$\lim_{x \to 3^-} e^{-\frac{1}{9-x^2}} = 0,$$

e $f(3) = 36(3 - a)$. Quindi $f$ é continua in $x = 3$ se e solo se $a = 3$. Pertanto $f$ é continua su $\mathbb{R}$ se $a = 3$. Studiamo la derivabilitá di $f$. Per $-3 < x < 3$ si ha

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{9-x^2}} \cdot \frac{2x}{(9-x^2)^2},$$

mentre per $x < -3,\ x > 3$ si ha

$$f'(x) = 3(x + 3)(x - 1).$$

Studiamo la derivabilitá in $x = -3$.

$$\lim_{x \to -3^+} f'(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to -3^-} f'(x) = 0,$$

quindi $f$ é derivabile in $x = -3$ con $f'(-3) = 0$. Esaminiamo infine il punto $x = 3$.

$$\lim_{x \to 3^-} f'(x) = 0,$$

mentre

$$\lim_{x \to 3^+} f'(x) = 36$$

quindi $f$ non é derivabile in $x = 3$.

**3.** Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalle rette $x = 1,\ x = -1$ e dalla curva di equazione $f(x) = \dfrac{1}{2 + x^{1/3}}$.

**Svolgimento**

Poiché $f$ é positiva nell'intervallo $[-1,1]$, l'area richiesta é fornita dal seguente integrale:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x^{1/3}}dx.$$

Effettuando la sostituzione $x^{1/3}=t$ si ottiene l'integrale

$$3\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{t+2}dt.$$

Eseguendo la divisione tra i polinomi $t^2$ e $t+2$ si ottiene $t-2$ come quoziente e 4 come resto. Pertanto si ha

$$3\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{t+2}dt = [3/2t^2-6t+12\log(t+2)]_{-1}^{1} = 12\log 3.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova dell' 8.09.2001**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} (1-x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

**2.** Determinare i punti di massimo e minimo relativi della funzione

$$f(x) = [x(x^2-1)^2]^{1/3}.$$

Esistono massimo e minimo assoluti?

**3.** Determinare l'espressione della funzione integrale della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x \arctan x^2, & x \in [0,1] \\ \dfrac{e^{-1/x}}{x^2}, & x \in ]1,2] \end{cases}$$

**Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica Ia**
**c.l. Ambiente e Territorio**
**Appello dell'8 . 09. 2001**

**Soluzione del primo esercizio.**

$$(1-x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\frac{\log(1-x)}{\sin x}},$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x-1)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\log(x-1)}{-x} \cdot \frac{x}{\sin x} = -1.$$

Dunque il limite richiesto é $e^{-1}$.

**Soluzione del secondo esercizio**
Dominio di $f$:$R$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$

quindi non esistono massimo e minimo assoluti.

$$f'(x) = \frac{5x^2-1}{3\sqrt[3]{x^2(x^2-1)}}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = +\infty,$$

quindi $f$ non é derivabile in $x=0$ e in $x=1$. Studiamo ora il segno di $f'$.

$$N(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad x \geq \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$D(x) > 0 \Longleftrightarrow x < -1, \quad x > 1.$$

Quindi $x = 1$ e $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = -1$ e $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ sono punti di massimo relativo.

**Soluzione del terzo esercizio**

Per $0 \le x \le 1$ si ha
$$F(x) = \int_0^x 3t \arctan t^2 dt.$$
Operando la sostituzione $t^2 = y$ e successivamente integrando per parti si ottiene
$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{3}{2}\int_0^{x^2} \arctan y dy = \frac{3}{2}x^2 \arctan x^2 - \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{2y}{1+y^2} dy = \\ &= \frac{3}{2}x^2 \arctan x^2 - \frac{3}{4}\log(1+x^4). \end{aligned}$$
Per $1 < x \le 2$ si ha
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 3x \arctan x^2 dx + \int_1^x \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt = \\ &= \frac{3}{8}\pi - \frac{3}{-}\log 2 + [e^{-\frac{1}{t}}]_1^x = \\ &= \frac{3}{8}\pi - \frac{3}{-}\log 2 + e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$
Pertanto
$$F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 \arctan x^2 - \frac{3}{4}\log(1+x^4), & \text{se } x \in [0,1] \\ \\ \frac{3}{8}\pi - \frac{3}{-}\log 2 + e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{e}, & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 29.09.2001**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{\log n + n}{n}.$$

**Svolgimento**

La serie assoluta é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{\log n + n}{n}.$$

Utilizzando il criterio del rapporto si ottiene

$$\lim_n \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \frac{\log(n+1) + n + 1}{n+1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-n} \frac{n}{\log n + n} = \frac{4}{3} > 1,$$

pertanto la serie assoluta diverge.

Studiamo ora la convergenza semplice.
La serie é a segni alterni. Poiché

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

la successione $(a_n)_n$ é non decrescente. Quindi la serie é indeterminata.

**2.** Data la funzione $f : [-1, 1] \to R$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \in [-1, 0] \\ \dfrac{e^{ax} - 1}{x}, & x \in ]0, 1] \end{cases}$$

determinare il valore del parametro $a > 0$ per il quale $f$ é continua e derivabile in $[-1, 1]$. Scrivere inoltre l'espressione di $f'(x)$.

**Svolgimento**

Esaminiamo la continuitá in $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = a$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2,$$

Quindi deve essere $a = 2$. Controlliamo se per tale valore $f$ é derivabile in $x = 0$.

L'espressione della derivata prima é la seguente

$$f^{'}(x) = \begin{cases} \dfrac{2xe^{2x-e^{2x}+1}}{x^2}, & x \in (0, 1] \\ 2, & x \in [-1, 0). \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f^{'}(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x}}{2x} = 2$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} f^{'}(x) = 2$$

quindi $f$ é derivabile in $x = 0$.

**3.** Determinare l'espressione della funzione integrale della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot 2^x, & x \in [-1, 1] \\ \\ \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 - 4}, & x \in ]1, 3/2] \end{cases}$$

**Svolgimento**

Per $0 \leq x \leq 1$ si ha, integrando per parti,

$$F(x) = \int_0^x t2^t dt = \frac{x2^x}{\log 2} - \frac{1}{\log 2} \int_0^x 2^t = \frac{x2^x}{\log 2} - \frac{2^x}{\log^2 2} + \frac{1}{\log^2 2}.$$

Per $1 < x \leq \dfrac{3}{2}$ si ha, eseguendo poi la divisione tra polinomi,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^1 t2^t dt + \int_1^x \frac{t^2+t+2}{t^2-4} dt = \\
&= \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{\log^2 2} + \int_1^x dt + \int_1^x \frac{t+6}{t^2-4} dt = \\
&= \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{\log^2 2} + x - 1 + \int_1^x \frac{2}{t-2} dt - \int_1^x \frac{1}{t+2} dt = \\
&= \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{\log^2 2} + x - 1 + \log(x-2)^2 - \log(x+2) + \log 3.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x2^x}{\log 2} - \dfrac{2^x}{\log^2 2} + \dfrac{1}{\log^2 2}, & \text{se } x \in [0,1] \\[2ex] \dfrac{2}{\log 2} - \dfrac{1}{\log^2 2} + x - 1 + \log(x-2)^2 - \log(x+2) + \log 3, & \text{se } x \in [1, 3/2] \end{cases}$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 6.12.2001**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare il comportamento della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)^n}.$$

**Soluzione**

Utilizzando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{3^n(n+1)^n}{n!} =$$
$$\frac{1}{3} \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{3e} < 1.$$

Pertanto la serie converge.

**2.** Determinare i punti di massimo e minimo relativi della funzione

$$f(x) = |x| \cdot e^{-x^2+x+1}.$$

Esistono massimo e minimo assoluti?

**Soluzione**

ominio di $f$: $I\!R$. La funzione si scrive

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-x^2+x+1}, & x \geq 0 \\ \\ -x \cdot e^{-x^2+x+1}, & x < 0. \end{cases}$$

La derivata prima della funzione é

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x^2+x+1} \cdot (-2x^2 + x + 1), & x > 0 \\ \\ e^{-x^2+x+1} \cdot (2x^2 - x - 1), & x < 0. \end{cases}$$

Studiamo la derivabilitá in $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = e,$$
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -e,$$

quindi $f$ non é derivabile in $x = 0$. Studiamo ora il segno di $f'$. Per $x > 0$ si ha

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 1.$$

Dunque $f$ cresce in $]0,1[$ e decresce in $]1,+\infty[$, quindi $x = 1$ é un punto di massimo relativo.
Per $x < 0$ si ha

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq -1/2$$

e quindi $x = -1/2$ é un punto di massimo relativo. Inoltre, poiché $f$ decresce in $]-1/2, 0[$ e cresce in $]0,1[$, $x = 0$ é un punto di minimo relativo. Essendo $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in I\!R$ e $f(0) = 0$, il punto $x = 0$ é di minimo assoluto. Per stabilire se la funzione ammette massimo assoluto, valutiamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Pertanto $f$ ammette massimo assoluto. Poiché $f(1) = e$ e $f(-1/2) = \frac{1}{2}e^{1/4}$, il massimo assoluto é $e$ ed é assunto in $x = 1$.

**3.** Determinare la famiglia delle primitive della funzione

$$f(x) = \log \frac{2x+1}{x-3}.$$

Calcolare poi
$$\int_{-4}^{-1} f(x)dx.$$

**Soluzione**

La famiglia delle primitive si ottiene risolvendo l'integrale indefinito.
$$\int f(x)dx = \int \log(2x+1)dx - \int \log(x-3)dx.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int f(x)dx = x\log\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) - \int \frac{2x}{2x+1}dx + \int \frac{x}{x-3}dx = \\
&= x\log\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) - \int dx + \int \frac{1}{2x+1}dx + \int dx + \int \frac{3}{x-3}dx = \\
&= x\log\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) + \frac{1}{2}\log|2x+1| + 3\log|x-3| + c.
\end{aligned}$$

Pertanto
$$\int_{-4}^{-1} f(x)dx = 4\log 4 - \frac{7}{2}\log 7.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 10.01.2002**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{2n^2-1}.$$

**Soluzione**

La serie è a segni alterni. Si ha

$$\lim_n \frac{n-1}{2n^2-1} = 0.$$

Studiamo ora la monotonia della successione $\left(\frac{n-1}{2n^2-1}\right)_n$.
Posto $f(x) = \frac{x-1}{2x^2-1}$, risulta

$$f'(x) = \frac{-2x^2+4x-1}{(2x^2-1)^2},$$

e quindi $f'(x) < 0$ per $x < \frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $x > \frac{2+\sqrt{2}}{2}$, cioè la successione è definitivamente decrescente. Pertanto, per il criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente.
Per quanto riguarda la serie assoluta, utilizzando il criterio del confronto asintotico, si ottiene la divergenza, essendo

$$\lim_n \frac{n-1}{2n^2-1} : \frac{1}{2n} = 1.$$

**2.** Determinare i punti di massimo e minimo relativi e i punti di flesso della funzione

$$f(x) = \frac{|x^2-4x+3|}{e^x}.$$

**Soluzione**

Dominio di $f$: $I\!R$. La funzione si scrive

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{e^x}, & x \leq 1,\ x \geq 3 \\ \\ \dfrac{-x^2+4x-3}{e^x}, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

La derivata prima della funzione é

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2+6x-7}{e^x}, & x < 1,\ x > 3 \\ \\ \dfrac{x^2-6x+7}{e^x}, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

Studiamo la derivabilitá in $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\frac{2}{e},$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \frac{2}{e},$$

quindi $f$ non é derivabile in $x = 1$. Esaminiamo ora $x = 3$.

$$\lim_{x\to 3^+} f'(x) = \frac{2}{e^3},$$

$$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = -\frac{2}{e^3},$$

quindi $f$ non é derivabile in $x = 3$. Studiamo ora il segno di $f'$. Per $x < 1,\ x > 3$ si ha

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in ]3, 3+\sqrt{2}].$$

Dunque $f$ cresce in $]3, 3+\sqrt{2}[$, decresce in $]-\infty, 1[$ e in $]3+\sqrt{2}, +\infty[$, quindi $x = 3+\sqrt{2}$ é un punto di massimo relativo.
Per $1 < x < 3$ si ha

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in ]1, 3-\sqrt{2}]$$

e quindi $f$ cresce in $]1, 3-\sqrt{2}[$ e decresce in $]3-\sqrt{2}, 3[$, quindi $x = 3-\sqrt{2}$ è un punto di massimo relativo. Inoltre, poiché $f$ decresce in $]-\infty, 1[$ e cresce in $]1, 3-\sqrt{2}[$, $x = 1$ é un punto di minimo relativo, e poichè $f$ decresce in $]3-\sqrt{2}, 3[$ e cresce in $]3, 3+\sqrt{2}[$, $x = 3$ è un punto di minimo relativo.
Per determinare gli eventuali punti di flesso, studiamo il segno della derivata seconda.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 8x + 13}{e^x}, & x < 1, \ x > 3 \\ \\ \dfrac{-x^2 + 8x - 13}{e^x}, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

Per $x < 1, \ x > 3$ si ha

$$f''(x) \geq 0 \iff x < 1, \ x \in ]3, 4+\sqrt{3}].$$

Dunque $f$ è convessa in $]-\infty, 1[$ e in $]3, 4+\sqrt{3}[$, mentre è concava in $]4+\sqrt{3}, +\infty[$, quindi $x = 4+\sqrt{3}$ é un punto di flesso.
Per $1 < x < 3$ si ha

$$f'(x) \geq 0 \iff x \in [4-\sqrt{3}, 3[$$

e quindi $f$ è concava in $]1, 4-\sqrt{3}[$ ed è convessa in $]4-\sqrt{3}, 3[$, quindi $x = 4-\sqrt{3}$ è un altro punto di flesso.

**3.** Determinare la funzione integrale della funzione $f : [2, 4] \to I\!R$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}, & x \in [2, 3] \\ \\ \dfrac{x-3}{x^2-1}, & x \in ]3, 4]. \end{cases}$$

**Soluzione**

Per $2 \leq x \leq 3$ si ha

$$F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{1 + e^{2t}} \, dt.$$

Utilizzando la sostituzione $e^t = z$, da cui $dt = \frac{1}{z}\,dz$, si ottiene

$$F(x) = \int_{e^2}^{e^x} \frac{1}{1+z^2}\,dz = \arctan e^x - \arctan e^2.$$

Per $x < 2 \leq 4$ si ha

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_2^3 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx + \int_3^x \frac{t-3}{t^2-1}\,dt = \\ &= \arctan e^3 - \arctan e^2 + \int_3^x \frac{t-3}{t^2-1}\,dt. \end{aligned}$$

Risolviamo ora $\int_3^x \frac{t-3}{t^2-1}\,dt$, utilizzando la scomposizione di Hermite.

$$\frac{t-3}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1},$$

che da luogo al sistema

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=-3 \end{cases}$$

la cui soluzione è $A=-1$, $B=2$.
Pertanto

$$\begin{aligned} &\int_3^x \frac{t-3}{t^2-1}\,dt = \int_3^x \frac{-1}{t-1}\,dt + \int_3^x \frac{2}{t+1}\,dt = \\ &= -\log(x-1) + 2\log(x+1) + \log 2 - 2\log 4 = \log\frac{(x+1)^2}{x-1} - \log 8. \end{aligned}$$

Quindi, per $x < 3 \leq 4$ si ha

$$F(x) = \log\frac{(x+1)^2}{x-1} - \log 8 + \arctan e^3 - \arctan e^2.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 5.04.2002**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{3n^2-2}.$$

2. Determinare i massimi e i minimi relativi della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\left|\frac{2x^2-7x+3}{3x+2}\right|}.$$

3. Data la funzione $f_\alpha : [1,2] \to I\!R$, con $\alpha \in I\!R \setminus \{0\}$, definita da

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha x\sqrt{1-\log^2 x}},$$

determinare $\alpha$ in modo che $F_\alpha(2) = \arcsin \log 2$, dove $F_\alpha$ denota la funzione integrale di $f_\alpha$.

**Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica Ia**
**c.l. Ambiente e Territorio**
**Appello del 5.04.2002**

**Soluzione del primo esercizio.**
La serie è a segni alterni. Si ha

$$\lim_n \frac{n-1}{3n^2-2} = 0.$$

Studiamo ora la monotonia della successione $\left(\dfrac{n-1}{3n^2-2}\right)_n$.
Posto $f(x) = \dfrac{x-1}{3x^2-2}$, risulta

$$f'(x) = \frac{-3x^2+6x-2}{(3x^2-2)^2},$$

e quindi $f'(x) \le 0$ per $x \le \frac{3-\sqrt{3}}{3}$, $\quad x \ge \frac{3+\sqrt{3}}{3}$, cioè la successione è definitivamente decrescente. Pertanto, per il criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente.
Per quanto riguarda la serie assoluta, utilizzando il criterio del confronto asintotico, si ottiene la divergenza, essendo

$$\lim_n \frac{n-1}{3n^2-2} : \frac{1}{3n} = 1.$$

**Soluzione del secondo esercizio**
Dominio di $f$: $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$. La funzione si scrive

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x^2-7x+3}{3x+2}}, & -\frac{2}{3} < x \le \frac{1}{2},\ x \ge 3 \\ \\ \sqrt{\dfrac{-2x^2-7x+3}{3x+2}}, & x < -\frac{2}{3},\ \frac{1}{2} < x < 3. \end{cases}$$

La derivata prima della funzione é

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3x+2}{2x^2-7x+3}} \cdot \dfrac{6x^2+8x-25}{(3x+2)^2}, & -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2},\ x > 3 \\ \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-\dfrac{3x+2}{2x^2-7x+3}} \cdot \dfrac{6x^2+8x-25}{(3x+2)^2}, & x < -\frac{2}{3},\ \frac{1}{2} < x < 3. \end{cases}$$

Studiamo la derivabilitá in $x = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f'(x) = +\infty,$$

quindi $f$ non é derivabile in $x = \frac{1}{2}$. Esaminiamo ora $x = 3$.

$$\lim_{x \to 3^+} f'(x) = +\infty,$$

quindi $f$ non é derivabile in $x = 3$. Studiamo ora il segno di $f'$. Risulta

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, x_2] \cup \left] -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right] \cup [x_1, 3],$$

dove $x_1 = \dfrac{-4 + \sqrt{166}}{6}$ e $x_2 = \dfrac{-4 - \sqrt{166}}{6}$, quindi

$$x = x_2, \; x = \frac{1}{2}, \; x = 3$$

sono punti di minimo relativo, mentre $x = x_1$ è un punto di massimo relativo.

**Soluzione del terzo esercizio**

Si ha

$$F_\alpha(x) = \int_1^2 \frac{dx}{\alpha x \sqrt{1 - \log^2 x}}.$$

Utilizzando la sostituzione $\log x = t$, da cui $dx = e^t \; dt$, si ottiene

$$F_\alpha(x) = \alpha^{-1} \int_0^{\log 2} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \; dt = \alpha^{-1} \arcsin \log 2.$$

Imponendo la condizione $F_\alpha(2) = \arcsin \log 2$, si ottiene $\alpha = 1$.

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 29.06.2002**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \log n}{n^2}.$$

**2.** Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x) = \sqrt{|4 - x^2|}.$$

Esistono il massimo e/o il minimo assoluti?

**3.** Calcolare l'integrale

$$\int_{-4}^{-3} \frac{x^2 + 6x + 7}{x + 3}.$$

**Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica Ia**
**c.l. Ambiente e Territorio**
**Appello del 29.06.2002**

**Soluzione del primo esercizio.**
Utilizzando il criterio del confronto asintotico si ha

$$\lim_n \frac{(n+\log n)n}{n^2} = 1,$$

pertanto la serie ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e quindi diverge.

**Soluzione del secondo esercizio**
Dominio di $f$: $I\!R$. La funzione si scrive

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & -2 \le x \le 2 \\ \sqrt{x^2-4}, & x < -2,\ x > 2. \end{cases}$$

Il calcolo della derivata prima fornisce

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} & -2 < x < 2 \\[2ex] \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} & x < -2,\ x > 2. \end{cases}$$

Studiamo la derivabilitá in $x = -2$.

$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = +\infty,$$

pertanto $f$ non è derivabile in $x = -2$. Studiamo ora la derivabilità in $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = -\infty,$$

e quindi $f$ non è derivabile in $x = 2$. Studiamo ora il segno di $f'$. Risulta

$$f'(x) \ge 0 \Longleftrightarrow -2 < x \le 0,\ x > 2.$$

Dunque $f$ cresce in $]-2, 0]$ e in $]2, +\infty)$ e decresce in $(-\infty, -2[$ e in $]0, 2[$, quindi $x = 0$ é un punto di massimo relativo, mentre i punti $x = -2$ e $x = 2$

sono di minimo relativo. Notiamo che $f \geq 0$ per ogni $x \in I\!R$ e dunque $x = -2$ e $x = 2$ sono punti di minimo assoluto, essendo $f(\pm 2) = 0$.
Per stabilire se la funzione ammette massimo assoluto, valutiamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Pertanto $f$ ammette non ammette massimo assoluto.

**Soluzione del terzo esercizio**

$$\begin{aligned}
&\int_{-5}^{-4} f(x)dx = \int_{-5}^{-4} \frac{x^2 + 6x + 9 - 2}{x+3} dx = \\
&= \int_{-5}^{-4} (x+3)dx + \int_{-5}^{-4} \frac{1}{x+3} dx = \\
&= \left[ \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\log(3-x) \right]_{-5}^{-4} = -\frac{3}{2} + 2\log 2.
\end{aligned}$$

**Universitá degli Studi di Perugia - Facoltá di Ingegneria**

Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia (c.l. Ambiente-Territorio)-
Appello del **07.09.2002**

Risolvere gli esercizi seguenti:

**1.** Studiare il comportamento della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log n}{n^3+1}.$$

**2.** Calcolare l'area della regione del piano contenuta nel primo quadrante, compresa tra le rette $x = 0$, $x = 1$ e il grafico della funzione $f(x) = x \log(x^2 + 1)$.

**3.** Determinare i punti di massimo e di minimo della funzione

$$f(x) = (9 - x^2)|x^2 - 1|.$$

Dire infine se esistono il massimo e minimo assoluti.

**Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica Ia**
**Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio**
**appello del 07.09.2002**

**1.** La serie (a termini positivi) converge per il criterio di convergenza asintotica. Infatti, confrontando per esempio con la serie di termine generale $b_n = n^{-3/2}$, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log n}{n^3+1} : \frac{1}{n^{3/2}} = 0.$$

Quindi, dato che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ è convergente, segue la convergenza della serie data.

**2.** Occorre calcolare l'integrale definito:

$$A = \int_0^1 x\log(x^2+1)dx.$$

Si ha facilmente:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^1 2x\log(x^2+1)dx = (\text{posto } u = x^2+1) \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \log u du = \frac{1}{2}\left[u\log u - u\right]_1^2 \\ &= \frac{\log 4 - 1}{2} = \frac{1}{2}[2\log 2 - 1]. \end{aligned}$$

**3.** La funzione è simmetrica rispetto all'asse delle $y$ sicchè possiamo limitarci a considerare $x \geq 0$. Si ha, per $x \geq 0$,

$$f(x) = \begin{cases} (9-x^2)(1-x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ (9-x^2)(x^2-1), & x \geq 1, \end{cases}$$

Per ogni $x \in ]0,1[$ si ha

$$f'(x) = 4x(x^2-5) < 0,$$

e quindi $f$ è decrescente in $[0,1]$. Per simmetria, $f$ è crescente in $[-1,0]$ e quindi il punto $x=0$ è un punto di massimo relativo e $f(0)=9$. Inoltre si ha $f(-1) = f(1) = 0$.

Se invece $x > 1$, risulta:

$$f'(x) = 4x(5 - x^2),$$

e si ha $f'(x) = 0$ per $x = \sqrt{5}$. Essendo $f'(x) > 0$ se $1 < x < \sqrt{5}$ e $f'(x) < 0$ se $x > \sqrt{5}$, si ottiene che $x = \sqrt{5}$ è ancora un punto di massimo relativo e $f(\sqrt{5}) = 16$. Per simmetria, anche il punto $x = -\sqrt{5}$ è un massimo relativo. Si osservi infine che i punti $x = \pm 1$ sono punti di minimo relativo con $f(\pm 1) = 0$. La funzione non ammette minimo assoluto perchè per esempio $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Possiede invece massimo assoluto che vale 16 assunto nei punti $x = \pm\sqrt{5}$.

**Universitá degli Studi di Perugia - Facoltá di Ingegneria**

Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia (c.l. Ambiente-Territorio)- Appello del **28.09.2002**

Risolvere gli esercizi seguenti:

**1.** Si consideri la successione:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n + \log n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dimostrare che $\{a_n\}$ è monotona e calcolare il limite

$$\lim_{n \to +\infty} a_n.$$

Studiare poi il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

**2.** Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(1 + e^{x/(x+1)}\right),$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

**3.** Calcolare, al variare del parametro $a > 0$, l'integrale generalizzato:

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4 + a^2} dx,$$

e calcolare il limite

$$\lim_{a \to +\infty} \sqrt{a} F(a).$$

**Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica Ia**
**Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio**
**appello del 28.09.2002**

**1.** Per studiare la monotonia conviene considerare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \log x}, \quad x \geq 1.$$

Derivando otteniamo:

$$f'(x) = \frac{\log x - x - 2}{2\sqrt{x}(x + \log x)^2},$$

che risulta sempre negativa, perchè $\log x < x$, per ogni $x > 0$.

Pertanto la successione $\{a_n\}_{n \in I\!N}$ è monotona decrescente ed il limite per $n \to +\infty$ è 0. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ è allora convergente per il criterio di Leibniz delle serie a segni alterni.

**2.** Il dominio della funzione $f$ è $D = I\!R \setminus \{-1\}$. Inoltre la $f$ è sempre positiva in $D$. Risulta poi

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \log(1 + e), \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty.$$

Essendo infine

$$f'(x) = \frac{e^{x/(x+1)}}{1 + e^{x/(1+x)}} \frac{1}{(x + 1)^2},$$

risulta $f'(x) > 0$, per ogni $x \in D$. Dunque la $f$ è crescente in ciascuna delle semirette $]-\infty, -1[$ e $]-1, +\infty[$ e non possiede massimi e minimi. La $f$ è limitata inferiormente (da 0 che è l'estremo inferiore) ma non lo è superiormente.

**3.** Considerato l'integrale

$$\int_0^r \frac{x}{x^4 + a^2} dx,$$

operando la sostituzione $x^2 = t$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^r \frac{x}{x^4 + a^2} dx &= \frac{1}{2a}\int_0^{r^2} \frac{1}{1 + (t/a)^2} d(t/a) \\ &= \frac{1}{2a}[\arctan(t/a)]_0^{r^2} = \frac{1}{2a}[\arctan(r^2/a)]. \end{aligned}$$

Passando al limite per $r \to +\infty$, otteniamo

$$F(a) = \frac{\pi}{4a}.$$

Si ha infine $\lim_{a\to+\infty} \sqrt{a}F(a) = 0$.

**Università degli Studi di Perugia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Appello del 09.12.2002**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte:

1. Studiare il comportamento (convergenza semplice ed assoluta) della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n + \sin n}.$$

2. Si determinino i punti di massimo, di minimo e di flesso della funzione
$$y = \log\left(\left|\frac{x^2+9}{4x^2-9}\right| + 1\right).$$
Dire infine in quali punti la funzione risulta derivabile e tracciarne un grafico approssimativo.

3. Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione
$$y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$$
l'asse delle ascisse e le rette di equazione $x = 0$ ed $x = 1$.

**Soluzioni della prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova del 09.12.2002**

1. La serie non converge assolutamente in quanto per il criterio del confronto asintotico $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3n+\sin n} = \frac{1}{3}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.
   Studiamo la convergenza semplice. Per il criterio di Leibniz la serie converge. Infatti $a_n = \frac{1}{3n+\sin n} > 0$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Inoltre considerando la funzione $f(x) = \frac{1}{3x+\sin x}$ si ottiene che $f'(x) = \frac{-(3+\cos x)}{(3x+\sin x)^2}$ è negativa per ogni $x \in I\!R - \{0\}$, cioè $a_n$ è decrescente.

2. Il dominio è tutta le retta reale esclusi i punti $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$. Inoltre la funzione è sempre positiva in quanto l'argomento del logaritmo è sempre maggiore di 1. Non ci sono dunque intersezioni con l'asse delle ascisse mentre la funzione incontra l'asse delle ordinate in $(0, \log 2)$. Scriviamo esplicitamente la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \log \dfrac{5x^2}{4x^2-9} & x < -\dfrac{3}{2} \;\; x > \dfrac{3}{2} \\ \\ \log \dfrac{3(6-x^2)}{9-4x^2} & x \in \left]-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right[. \end{cases}$$
   Ora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \log(5/4)$ e $\lim_{x\to-3/2} f(x) = \lim_{x\to 3/2} f(x) = +\infty$.
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-18}{x(4x^2-9)} & x < -\dfrac{3}{2} \;\; x > \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{30x}{(6-x^2)(9-4x^2)} & x \in \left]-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right[. \end{cases}$$
   Studiando il segno di $f'$, risulta che la funzione è crescente per $x < -\frac{3}{2}$ e $x \in ]0, \frac{3}{2}[$. $f$ ha quindi un minimo relativo in $x = 0$, non ha massimi

relativi, è limitata inferiormente (da $\log(5/4)$) ma non superiormente. Inoltre $f$ è derivabile in ogni punto del dominio $I\!R - \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$.

$$f''(x) = \begin{cases} 18\dfrac{12x^2 - 9}{x^2(4x^2-9)^2} & x < -\dfrac{3}{2} \;\; x > \dfrac{3}{2} \\ \\ -90\dfrac{4x^4 - 11x^2 - 18}{(54 - 33x^2 + 4x^4)^2} & x \in \left]-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right[. \end{cases}$$

Studiando il segno della derivata seconda si trova che $f''$ è sempre positiva. Quindi la funzione volge sempre la concavità verso l' alto e non ha flessi.

3. Essendo la funzione $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ positiva in $[0,1]$, l' area in questione è data da

$$I = \int_0^1 \arcsin\sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} I &= \left[x \arcsin\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

**Università degli Studi di Perugia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Appello del 10.01.2003**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte:

1. Studiare il comportamento (convergenza semplice ed assoluta) della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{e^{\sqrt{n^2+1}}}.$$

2. Si determinino i punti di massimo, di minimo e di flesso della funzione
$$f(x) = \frac{4 - \log^2(x+1)}{4\sqrt{x+1}}.$$
Tracciarne un grafico approssimativo.

3. Data la funzione $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to I\!R$
$$f(x) = \begin{cases} \sin x \cos x & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ \dfrac{1}{\sin x + 3} & x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$
stabilire se ammette primitive e in caso affermativo calcolare l'espressione della funzione integrale. Determinare infine l'area (geometrica) della porzione di piano compresa tra il grafico di $f$, l'asse delle ascisse e le rette di equazione $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

**Soluzioni della prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova del 10.01.2003**

1. La serie è a segni alterni. Studiamo la convergenza assoluta. Per il criterio del confronto asintotico
$$\lim_{n\to+\infty} n^p\, a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} \frac{n^{p+1}}{e^{\sqrt{n^2+1}}} = 0,$$
per ogni $p > 0$. Quindi, scelto un $p > 1$, ad esempio $p = 2$, si ottiene che la serie converge assolutamente. Infatti, dalla definizione di limite si ha che
$$\forall\varepsilon > 0\,\exists N > 0\,:\,\forall n > N \quad |a_n| = a_n < \frac{\varepsilon}{n^2}.$$
Convergendo assolutamente, la serie converge anche semplicemente.

2. Il dominio è $D = ]-1, +\infty[$. Le intersezioni con l'asse delle ascisse sono $(-1+\ e^{-2}, 0)$ e $(-1+\ e^{2}, 0)$, mentre l'intersezione con l'asse delle ordinate è $(0, 1)$. $f$ è positiva per $x \in ]-1+\ e^{-2}, -1+\ e^{2}[$. Ora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$. Calcoliamo la derivata prima
$$f'(x) = \frac{\log^2(x+1) - 4\log(x+1) - 4}{8(x+1)^{3/2}}.$$
Studiando il segno di $f'$, risulta che la funzione è crescente per $x \in ]-1, -1+\ e^{2(1-\sqrt{2})}[$ e per $x > -1+\ e^{2(1+\sqrt{2})}$. $f$ ha quindi un minimo relativo (non assoluto) in $x = -1+\ e^{2(1+\sqrt{2})}$ ed un massimo assoluto in $x = -1+\ e^{2(1-\sqrt{2})}$. Calcoliamo la derivata seconda
$$f''(x) = \frac{3\log^2(x+1) - 16\log(x+1) - 4}{-16(x+1)^{5/2}}.$$
Studiando il segno della derivata seconda si trova che $f''$ è positiva per $x \in ]e^{(8-\sqrt{76})/3} - 1, e^{(8+\sqrt{76})/3} - 1[$. Quindi in tale intervallo la funzione volge la concavità verso l' alto e $x = e^{(8-\sqrt{76})/3} - 1$ e $x = e^{(8+\sqrt{76})/3} - 1$ sono i punti di flesso di $f$.

3. La funzione $f$ presenta una discontinuità in $x = 0$. Pertanto non ammette primitive in $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ma essendo limitata in $D$ con un numero finito di punti di discontinuità (uno solo in $x = 0$), $f$ è Riemann-integrabile in $D$ e quindi esiste

$$F(x) = \int_{-\pi/2}^{x} f(t)\,dt \qquad \forall x \in D,$$

vale a dire che è ben definita la funzione integrale $F$ di $f$. Calcoliamola. Per $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ si ha

$$F(x) = \int_{-\pi/2}^{x} \sin t \cos t\,dt = -\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

Per $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha

$$F(x) = \int_{-\pi/2}^{0} \sin t \cos t\,dt + \int_0^x \frac{1}{\sin t + 3}\,dt = -\frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{\sin t + 3}\,dt.$$

Operando la sostituzione $\sin t = \frac{2s}{1+s^2}$ con $s = \tan\frac{t}{2}$, si ottiene $t = 2\arctan s$, $dt = \frac{2}{1+s^2}ds$ e

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\frac{1}{2} + 2\int_0^{\tan(x/2)} \frac{1}{3s^2+2s+3}\,ds = \\
&= -\frac{1}{2} + 2\int_0^{\tan(x/2)} \frac{1}{\left(\sqrt{3}s + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{8}{3}}\,ds = \\
&= -\frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{\sqrt{8}}\left[\arctan\left(\frac{3s+1}{\sqrt{8}}\right)\right]_0^{\tan(x/2)} = \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{3\tan(x/2)+1}{\sqrt{8}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Si potrebbe verificare che $F$ non è derivabile in $x = 0$ e che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in D - \{0\}$.

Essendo $f$ negativa in $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ e positiva in $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'area richiesta $A$ è data da

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi/2}^{0} -\sin t \cos t \, dt + \int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\sin t + 3} \, dt = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) \right]. \end{aligned}$$

**Università degli Studi di Perugia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Appello del 28.03.2003**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte:

1. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} \log\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)$$

2. Si determinino i punti di massimo e di minimo (specificando se relativi od assoluti) della funzione

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-1}{|x|-2}}}{4-x}.$$

Dire se la funzione è derivabile in tutti i punti del dominio.

3. Dopo aver stabilito se la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$$

è integrabile secondo Riemann in $[0, 1]$, calcolarne l' integrale definito in tale intervallo.

**Soluzioni della prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova del 28.03.2003**

1. La serie è a termini positivi. Poiché

$$\lim_{n\to\infty} (n^2+1)\log\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right) = 1$$

si ha che il termine generale $a_n$ è un infinitesimo e

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2} a_n = 1.$$

Quindi, per il teorema del confronto la serie converge.

2. Il dominio è $D = I\!R - \{-2, 2, 4\}$. $f$ non ha intersezioni con l'asse delle ascisse, incontra l'asse delle ordinate in $(0, \frac{1}{4}e^{1/2})$ ed è positiva per $x < 4$. Scriviamo esplicitamente la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{-1}{x-2}}}{4-x} & x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{e^{\frac{1}{x+2}}}{4-x} & x < 0 \end{cases}$$

Ora $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x-2}} \dfrac{x^2-5x+8}{(4-x)^2(x-2)^2} & x > 0 \\[2ex] e^{\frac{1}{x+2}} \dfrac{x(x+5)}{(4-x)^2(x+2)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Studiando il segno di $f'$, risulta che la funzione è crescente per $x < -2$ e per $x > 0$. $f$ ha quindi un minimo relativo in $x = 0$, un massimo relativo in $x = -5$ e non è derivabile in $x = 0$.

3. Poiché $f$ è continua in $[0,1]$ (è il quoziente di funzioni continue che non si annullano in $[0,1]$), essa è integrabile secondo Riemann in $[0,1]$. Per calcolare
$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\,dx$$
decomponiamo l'integranda in una somma
$$\frac{2}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$
determinando le costanti $A, B, C$ in base al principio di identità dei polinomi:
$$(A+2B)x^2 + (B+2C)x + C + A = 1$$
da cui
$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ B + 2C = 0 \\ C + A = 1 \end{cases}$$
e risolvendo $A = 4/5$, $B = -2/5$, $C = 1/5$. Pertanto
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{4/5}{1+2x}\,dx + \int_0^1 \frac{(-2/5)x + (1/5)}{1+x^2}\,dx = \\ &= \left[-\frac{1}{5}\log(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + \frac{2}{5}\log(1+2x)\right]_0^1 = \\ &= -\frac{1}{5}\log 2 + \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\log(3). \end{aligned}$$

**Università degli Studi di Perugia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Appello del 30.06.2003**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte:

1. Studiare il comportamento della serie (convergenza assoluta e semplice)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n - e^{-n}}.$$

2. Si determinino i punti di massimo e di minimo (specificando se relativi od assoluti) della funzione

$$f(x) = e^{-x}\sqrt{\frac{x-3}{2x-1}}.$$

   Tracciarne un grafico approssimativo. (Tralasciare lo studio della derivata seconda).

3. Determinare la funzione integrale di

$$f(x) = \log(x^2 + 1)$$

   nell'intervallo $[0, 1]$. Determinare infine l'area (geometrica) della porzione di piano compresa tra il grafico di $f$, l'asse delle ascisse e le rette di equazione $x = 0$, $x = 1$.

**Soluzioni della prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova del 30.06.2003**

1. La serie è (definitivamente) a segni alterni in quanto $a_n = \dfrac{1}{n - e^{-n}} > 0$ per $n > 0$, cioé $n > e^{-n}$ per $n > 0$.
Studiamo la convergenza assoluta. Poiché $a_n \to 0$ e $n\, a_n \to 1$ per $n \to \infty$, $a_n$ é un infinitesimo di ordine 1. Pertanto la serie diverge assolutamente.
Ora, essendo verificate le ipotesi del Teorema di Leibniz ($a_n > 0$ e monotona non crescente, $a_n \to 0$ per $n \to \infty$), si ha che la serie converge semplicemente.

2. Il dominio è $D = (-\infty, \frac{1}{2}) \bigcup [3, +\infty)$. Le intersezioni con gli assi sono $(0, \sqrt{3})$ e $(3, 0)$ ed $f$ é positiva in ogni punto del dominio. Ora $\lim_{x \to 1/2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Studiando la monotonia di $f$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{-x} \left\{ -\sqrt{\frac{x-3}{2x-1}} + \frac{5}{2(2x-1)^2 \sqrt{\frac{x-3}{2x-1}}} \right\} = \\
&= e^{-x} \frac{-2(x-3)(2x-1) + 5}{2(2x-1)^2 \sqrt{\frac{x-3}{2x-1}}} = -e^{-x} \frac{4x^2 - 14x + 1}{2(2x-1)^2 \sqrt{\frac{x-3}{2x-1}}}.
\end{aligned}
$$

$f'(x) > 0$ per $4x^2 - 14x + 1 < 0$, cioé per $\dfrac{7 - \sqrt{45}}{4} < x < \dfrac{7 + \sqrt{45}}{4}$. $f$ ha quindi un minimo relativo in $x = \dfrac{7 - \sqrt{45}}{4}$, un minimo assoluto in $x = 0$ e un massimo relativo (non assoluto in quanto $f$ é illimitata superiormente) in $x = \dfrac{7 + \sqrt{45}}{4}$.

3. La funzione integrale $F$ di $f$ in $[0,1]$ é definita da

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \log(t^2+1)\,dt.$$

Calcoliamo $F(x)$. Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \log(t^2+1)\,dt = \Big[t\log(t^2+1)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{t^2+1)}\,dt = \\ &= \Big[t\log(t^2+1) - 2(t - \arctan t)\Big]_0^x = \\ &= x\log(x^2+1) - 2(x - \arctan x). \end{aligned}$$

Infine, essendo l'argomento del logaritmo sempre maggiore di 1 (verificare!), la funzione é sempre positiva in $[0,1]$ e l'area richiesta é pertanto data da $F(1) = \log 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$.

**Università degli Studi di Perugia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Appello del 16.07.2003**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte:

1. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \sin n$$

2. Si determinino i punti di flesso, di massimo e di minimo (specificando se relativi od assoluti) della funzione

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

   Tracciarne un grafico approssimativo.

3. Assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{1+\log x}{x(2+\log x)}$$

   stabilire se ammette primitive in $[1, e]$ ed in caso affermativo calcolare l'espressione di una primitiva e l'area (geometrica) della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle ascisse e le rette di equazione $x = 1$, $x = e$.

**Soluzioni della prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova del 16.07.2003**

1. La serie è a segno arbitrario. Studiamo quindi la convergenza assoluta usando il criterio del confronto asintotico. Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| n^p = 0$$

per ogni $p > 0$, scegliendo $p > 1$ si ha che la serie converge assolutamente.

2. Il dominio è $D = (-\infty, +\infty)$. Le intersezioni con gli assi sono $(0, 1)$ e $(\frac{-1}{2}, 0)$. $f$ é positiva per $x > \frac{-1}{2}$. Ora $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ e la funzione incontra l'asintoto orizzontale destro in $x = \frac{3}{8}$. Studiando la monotonia di $f$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} - (2x + 1)\frac{2x - 1}{2(x^2 - x + 1)^{3/2}} = \\ &= \frac{-4x + 5}{2(x^2 - x + 1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

$f'(x) > 0$ per $x < \frac{5}{4}$. $f$ ha quindi un massimo assoluto in $x = \frac{5}{4}$, non ha minimo assoluto ed é limitata inferiormente. Studiamo ora la derivata seconda per determinare eventuali punti di flesso.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4(x^2 - x + 1)^{3/2} - \frac{3}{2}(-4x + 5)(x^2 - x + 1)^{1/2}(2x - 1)}{2(x^2 - x + 1)^3} = \\ &= \frac{10x^2 - 34x + 7}{4(x^2 - x + 1)^{5/2}}. \end{aligned}$$

La funzione volge la concavità verso l'alto per $x > \frac{17 + \sqrt{219}}{5} \cong 6,4$ o $x > \frac{17 - \sqrt{219}}{5} \cong 0,5$ e verso il basso altrove.

3. La funzione $f$ è continua in $[1, e]$ e la famiglie delle primitive di $f$ in $[1, e]$ é data da $\int f(x)\, dx$. Operando la sostituzione $t = \log x$ ($x = e^t$ e $dx = e^t\, dt$), si ha

$$\begin{aligned}\int f(x)\, dx &= \int \left(\frac{1+t}{2+t}\right) dt = \int 1 - \frac{1}{2+t}\, dt = \\ &= t - \log(2+t) + C = \log x - \log(2 + \log x) + C.\end{aligned}$$

Infine, essendo l'argomento del logaritmo sempre maggiore di 1 (verificare!), la funzione é sempre positiva in $[1, e]$ e l'area richiesta é pertanto data da $A = \int_1^e f(x)\, dx$ ed applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale $A = [\log x - \log(2 + \log x)]_1^e = 1 - \log 3 + \log 2$.

**Università degli Studi di Perugia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Appello del 06.09.2003**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte:

1. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4+\log n}{\sqrt{n^3+1}}$$

2. Si determinino i punti di massimo e di minimo (specificando se relativi od assoluti) e di flesso della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x+3}{4-2x}\right) - \frac{4}{x+3}.$$

   Tracciarne un grafico approssimativo. (Tralasciare lo studio del segno della funzione e delle intersezioni del grafico con l'asse delle ascisse).

3. Assegnata la funzione $f : [0,2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\log(x+1)+3}}{x+1} & x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & x \in ]1,2] \end{cases}$$

   stabilire se ammette primitive, se é Riemann-integrabile ed in caso affermativo calcolare l'espressione della funzione integrale.

**Soluzioni della prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova del 06.09.2003**

1. La serie è a termini positivi ed il termine generale $a_n$ tende a zero per $n \to +\infty$ in quanto
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0,$$
per ogni $\alpha > 0$. Poiché
$$\lim_{n\to+\infty} n^p a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4 + \log n}{n^{(3/2\,-\,p)}\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^3}}} = 0,$$
per $\dfrac{3}{2} - p > 0$, ossia per $p < \dfrac{3}{2}$, si ottiene che la serie converge direttamente dal criterio del confronto asintotico scegliendo $p \in ]1, 3/2[$, ad esempio $p = \dfrac{3}{4}$.

2. Il dominio è $D = ]-3, 2[$. Le intersezioni con l' asse delle ordinate è $(0, -\dfrac{4}{3} + \log\dfrac{3}{4})$. Ora $\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$. Studiamo la monotonia di $f$.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x-2}{x+3}\,\frac{4-2x+2(x+3)}{(4-2x)^2} + \frac{4}{(x+3)^2} = \\ &= \frac{10(x+3)+4((4-2x)}{(4-2x)(x+3)^2} = \frac{2(x+23)}{(4-2x)(x+3)^2}. \end{aligned}$$
$f'(x) > 0$ in $D$, per $x + 23 > 0$, cioé per $x > -23$. $f$ è sempre crescente nel dominio, non ha quindi né massimi né minimi relativi ed è illimitata. Vediamo se ha punti di flesso.
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(4-2x)(x+3)^2 - 2(x+3)[-2(x+3)^2 + 2(x+3)(4-2x)]}{(4-2x)^2(x+3)^4} = \\ &= \frac{4\,(2x^2+67x-17)}{(4-2x)^2(x+3)^3}. \end{aligned}$$

$f$ volge la concavità verso l'alto per $\dfrac{-67+\sqrt{4625}}{4} < x < 2$ ed ha quindi un punto di flesso in $x = \dfrac{-67+\sqrt{4625}}{4}$.

3. La funzione $f$ non è continua in $x = 1$ in quanto

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \neq f(1) = \frac{\sqrt{\log 2\ +3}}{2}.$$

Pertanto non ammette primitive in $[0, 2]$.
Le due leggi di definizione di $f$ sono continue nei compatti $[0, 1]$ e $[1, 2]$, rispettivamente, e quindi sono limitate. Pertanto, anche $f$ è limitata ed avendo un numero finito di discontinuità, risuta Riemann-integrabile in $[0, 2]$. Calcoliamo l'espressione della funzione integrale $F(x)$ di $f$. Per $x \in [0, 1]$ si ha

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{\sqrt{\log(t+1)+3}}{t+1}\, dt = \left[\frac{2}{3}\left(\log(t+1)\ +3\right)^{3/2}\right]_0^x = \\ &= \frac{2}{3}\left(\log(x+1)\ +3\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\sqrt{27}. \end{aligned}$$

Ora $F(1) = \dfrac{2}{3}[\,(\log 2\ +3)^{3/2} - \sqrt{27}\,]$. Per $x \in ]1, 2]$ si ha

$$\begin{aligned} F(x) &= F(1) + \int_1^x \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{\pi}{t}\right)\, dt = F(1) + \left[\frac{1}{-\pi}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)\right)\right]_1^x = \\ &= F(1) + 1 + \cos\left(\frac{\pi}{t}\right). \end{aligned}$$

**Università degli Studi di Perugia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Appello del 27.09.2003**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte:

1. Studiare la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}.$$

2. Si determinino i punti di massimo e di minimo (specificando se relativi od assoluti) della funzione

$$f(x)=\frac{x-2}{1+x}\sqrt{e^{(3-x)}}.$$

Tracciarne un grafico approssimativo. (Tralasciare lo studio della derivata seconda).

3. Assegnata la funzione

$$f(x)=x\sqrt{1-x^2},\quad x\in[0,1],$$

stabilire se ammette primitive in $[0,1]$ ed in caso affermativo calcolare l'espressione di una primitiva e l'area (geometrica) della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle ascisse e le rette di equazione $x=0$, $x=1$.

**Soluzioni della prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova del 27.09.2003**

1. La serie è a segni alterni e siccome la successione $a_n = \sqrt{n}/(n^3+1)$ tende a 0 in modo decrescente, per il criterio di convergenza delle serie a segni alterni, la serie converge. La serie converge anche assolutamente, perchè la serie dei valori assoluti è data da
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+1},$$
che converge per il criterio di convergenza asintotica (basta confrontare con la serie di termine generale $n^{-5/2}$.

2. Il dominio è $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Le intersezioni con gli assi sono $\left(0, -2e^{3/2}\right)$ e $(2, 0)$. $f$ é positiva per $x < -1$ o per $x > 2$.
Ora $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $f$ non è limitata inferiormente né superiormente; non puó avere massimi o minimi assoluti. Studiando la monotonia di $f$.
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{(3-x)/2}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{1+x}+\frac{1+x+x-2}{(1+x)^2}\right) = \\ &= e^{(3-x)/2}\cdot\frac{-x^2+x+8}{2\,(1+x)^2}. \end{aligned}$$
$f'(x) > 0$ per $-x^2+x+8 > 0$, cioé $f$ è crescente per $\frac{1-\sqrt{33}}{2} < x < -1$ e $-1 < x < \frac{1+\sqrt{33}}{2}$ ed è decrescente negli intervalli $-\infty < x < \frac{1-\sqrt{33}}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{33}}{2} < x < +\infty$. Quindi $f$ ha un minimo relativo in $x = \frac{1-\sqrt{33}}{2}$ e un massimo relativo in $x = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$.

3. Poiché $f$ è continua in $[0,1]$ (è composizione e prodotto di funzioni continue), essa ammette primitive in $[0,1]$. Scriviamo ora l'espressione di una primitiva. Calcoliamo (con la sostituzione $1-x^2=t$):

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{1-x^2}dx = \\ &= -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}d(1-x^2) = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt \\ &= -\frac{1}{3}t^{3/2} = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}.\end{aligned}$$

La famiglia dellle primitive è allora data da

$$-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+c,$$

con $c$ costante arbitraria. Per l'area basta calcolare ora l'integrale definito

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = 1/3.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 9.12.2003**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+\sin n}.$$

**Soluzione**

La serie é a segni alterni; infatti $\dfrac{1}{3n+\sin n}>0$, essendo $\sin n<3n$.
La serie assoluta é

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+\sin n}.$$

Utilizziamo il criterio degli infinitesimi:

$$\lim_n \frac{1}{3n+\sin n}\cdot n=\frac{1}{3}$$

e quindi la serie assoluta diverge. Studiamo ora la convergenza semplice usando il criterio di Leibnitz. Risulta facilmente

$$\lim_n \frac{1}{3n+\sin n}=0.$$

Studiamo ora la monotonia della successione $\left(\dfrac{1}{3n+\sin n}\right)_n$. Posto $f(x)=\dfrac{1}{3x+\sin x}$, risulta $f'(x)=\dfrac{-3-\cos x}{(3x+\sin x)^2}<0$ e quindi la successione é decrescente e pertanto la serie converge.

**2.** Studiare la funzione

$$f(x)=\ln(2+e^{\frac{3x^2-1}{x-1}})$$

e tracciarne un grafico approssimativo. Stabilire inoltre se la funzione é limitata inferiormente e/o superiormante.

**Soluzione**

Il dominio della funzione é $D = (-\infty, 1[\cup]1, +\infty)$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$. Esaminiamo i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2,$$

quindi $y = \ln 2$ é un asintoto orizzontale.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \ln 2,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty,$$

e quindi $x = 1$ é un asintoto verticale. Studiamo ora la derivata prima. La sua espressione é la seguente:

$$f'(x) = \frac{1}{2 + e^{\frac{3x^2-1}{x-1}}} \cdot e^{\frac{3x^2-1}{x-1}} \cdot \frac{3x^2 - 6x + 1}{(x-1)^2}.$$

Studiamo ora il segno di $f'(x)$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x < \frac{3-\sqrt{6}}{3},\ x > \frac{3+\sqrt{6}}{3}.$$

Pertanto, $x = \dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$ é un punto di massimo relativo, mentre $x = \dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$ é un punto di minimo relativo. Infine, $f$ non é limitata superiormente, mentre risulta $\inf_{x\in D} f(x) = \ln 2$, essendo $f(\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}) > \ln 2$.

**3.** Determinare l'espressione della funzione integrale della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{2x}-1}, & x \in [1, 2] \\ \\ \ln\left(\dfrac{5x-3}{x-1}\right), & x \in ]2, 4] \end{cases}$$

**Soluzione**

Facilmente si verifica che la funzione $f$ non é continua in $x = 2$. La funzione $f$ é Riemann integrabile e l'espressione della sua funzione integrale é la seguente:

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^x \frac{1}{e^{2t}-1}dt, & x \in [1,2] \\ \\ \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{e^{2t}-1}dt + \int_2^x \log\frac{5t-3}{t-1}dt, & x \in ]2,4]. \end{cases}$$

Operando la sostituzione $e^{2t} = z$, si ha:

$$\int \frac{1}{e^{2t}-1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z(z-1)}dz = -\frac{1}{2}\log \mid z \mid + \frac{1}{2}\log \mid z-1 \mid + c =$$
$$= -\frac{1}{2}\log e^{2t} + \frac{1}{2}\log \mid e^{2t}-1 \mid + c.$$

Pertanto

$$\int_1^x \frac{1}{e^{2t}-1}dt = 1 - x + \frac{1}{2}\log\frac{e^{2x}-1}{e^2-1}.$$

Risolviamo ora l'integrale $\displaystyle\int \log\frac{5t-3}{t-1}dt$. Utilizzando l'integrazione per parti si ha:

$$\int \log\frac{5t-3}{t-1}dt = t\log\frac{5t-3}{t-1} + 2\int \frac{t}{(t-1)(5t-3)}dt.$$

Utilizzando nell'ultimo integrale la formula di Hermite si ha infine:

$$\int \log\frac{5t-3}{t-1}dt = t\log\frac{5t-3}{t-1} - 3\int \frac{1}{5t-3}dt + \int \frac{1}{t-1}dt =$$
$$= t\log\frac{5t-3}{t-1} - \frac{3}{5}\log \mid 5t-3 \mid + \log \mid t-1 \mid + k.$$

L'espressione della funzione integrale é quindi:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x + \dfrac{1}{2}\log\dfrac{e^{2x}-1}{e^2-1}, & x \in [1,2] \\ \\ \dfrac{1}{2}\log\dfrac{e^4-1}{e^2-1} - 1 + x\log\dfrac{5x-3}{x-1} + \log\dfrac{x-1}{\sqrt[5]{(5x-3)^3}} - \dfrac{7}{5}\log 7, & x \in ]2,4]. \end{cases}$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 9.01.2004**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare al variare di $x \in I\!R$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{1}{n + \log n}.$$

**Soluzione**

La serie é a termini di segno qualunque. La serie assoluta é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid x \mid^n \frac{1}{n + \log n}.$$

Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\lim_n \mid x \mid^{n+1} \frac{1}{n + 1 + \log(n+1)} : \mid x \mid^n \frac{1}{n + \log n} = \mid x \mid$$

e quindi la serie converge assolutamente (e quindi converge) per $-1 < x < 1$. Se $x > 1$ la serie é a termini positivi; applicando nuovamente il criterio del rapporto si ha la divergenza. Se $x = 1$ la serie si scrive $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \log n}$. Applicando il criterio degli infinitesimi si ottiene la divergenza, essendo $\lim_n \frac{n}{n + \log n} = 1$. Se $x = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n + \log n}$, che é una serie a segni alterni. Applichiamo quindi il criterio di Leibnitz. Risulta facilmente

$$\lim_n \frac{1}{n + \log n} = 0.$$

Studiamo ora la monotonia della successione $\left(\dfrac{1}{n+\log n}\right)_n$. Posto $f(x) = \dfrac{1}{x+\log x}$, con $x > 0$, risulta $f'(x) = \dfrac{-x-1}{x(x+\log x)^2} < 0$ e quindi la successione é decrescente e pertanto la serie converge. Se $x < -1$ la serie si scrive $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mid x \mid^n \dfrac{1}{n+\log n}$. Poiché $\lim_n \dfrac{\mid x \mid^n}{n+\log n} = +\infty$, la serie non converge.

**2.** Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-x^2}\sqrt{x^2-9}$$

e tracciarne un grafico approssimativo (non é richiesto lo studio della derivata seconda). Determinare inoltre, se esistono, il massimo e il minimo assoluti.

**Soluzione**

Il dominio della funzione é $D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$. (Essendo la funzione simmetrica rispetto all'asse delle $y$, é sufficiente studiarla nell'intervallo $[3, +\infty)$).Risulta $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e $f(x) = 0$ per $x = \pm 3$. Esaminiamo i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

quindi $y = 0$ é un asintoto orizzontale. Studiamo ora la derivata prima. La sua espressione é la seguente:

$$f'(x) = xe^{-x^2}\frac{-2x^2+19}{\sqrt{x^2-9}}.$$

Studiamo ora il segno di $f'(x)$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(2x^2-19) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{19}{2}},\ 3 < x \leq \sqrt{\frac{19}{2}}.$$

Pertanto, $x = \pm\sqrt{\frac{19}{2}}$ sono punti di massimo relativo, mentre i punti $x = \pm 3$ sono punti di minimo assoluto. Infine, il minimo assoluto é zero, assunto nei punti $x = \pm 3$ e il massimo assoluto é assunto nei punti $x = \pm\sqrt{\frac{19}{2}}$.

**3.** Determinare l'area della regione di piano compresa tra le rette $x = 0$, $x = 3$ e il grafico della funzione $f : [0, 3] \to I\!R$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}, & x \in \left[0, \dfrac{5}{2}\right] \\ \\ \dfrac{1}{x(1 + \log^2 3x)}, & x \in \left]\dfrac{5}{2}, 3\right] \end{cases}$$

**Soluzione**

Poiché la funzione $f$ é negativa nell'intervallo $]2, 5/2]$, l'area richiesta é la seguente:

$$A = \int_0^2 \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} dx - \int_2^{5/2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} dx + \int_{5/2}^3 \frac{1}{x(1 + \log^2 3x)} dx.$$

Calcoliamo le primitive della funzione $x \mapsto \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}$, risolvendo il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} dx.$$

Eseguendo la divisione tra i polinomi $x^2 - x - 2$ e $x - 3$, si ottiene

$$\int \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} dx = \int (x+2) dx + 4 \int \frac{1}{x - 3} dx = x^2/2 + 2x + 4 \log \mid x - 3 \mid + c.$$

Calcoliamo ora le primitive della funzione $x \mapsto \dfrac{1}{x(1 + \log^2 3x)}$.

$$\left( \int \frac{1}{x(x + \log^2 3x)} dx \right)_{\log 3x = t} = \int \frac{1}{1 + t^2} dt = \arctan \log 3x + k.$$

L'area richiesta é quindi:

$$A = \left[ x^2/2 + 2x + 4 \log \mid x - 3 \mid \right]_0^2 - \left[ x^2/2 + 2x + 4 \log \mid x - 3 \mid \right]_2^{5/2} +$$
$$+ \left[ \arctan \log 3x \right]_{5/2}^3 =$$
$$= 31/8 - 4 \log 3 + 4 \log 2 + \arctan \log 9 - \arctan \log 15/2.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 26.03.2004**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare al variare di $x \in I\!R$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{1}{n^2 2^{2n}}.$$

**Soluzione**

La serie é a termini di segno qualunque. Studiamo la convergenza della serie assoluta, utilizzando il criterio del rapporto. Si ottiene:

$$\lim_n \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2 2^{2n+2}} \frac{n^2 2^{2n}}{|x|^n} = \frac{|x|}{4}.$$

Quindi la serie converge assolutamente, e quindi converge, per $-4 < x < 4$. Se $x = 4$ la serie si scrive

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{n^2 2^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

che converge. Se $x = -4$ la serie si scrive

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

che é una serie a segni alterni. Essendo $\left(\frac{1}{n^2}\right)_n$ una successione decrescente e infinitesima, per il criterio di Leibnitz sia ha la convergenza. Se $x > 4$ la serie diverge, essendo $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Se $x < -4$ la serie si scrive $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{n^2 2^{2n}}$, che é una serie a segni alterni. Essendo $\lim_n \frac{|x|^n}{n^2 2^{2n}} = +\infty$, la serie non converge.

**2.** Studiare la continuitá e la derivabilitá della funzione

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x \in [0, +\infty[ \\ \\ \sqrt[3]{(x^2-1)^2}, & x \in ]-\infty, 0[ \end{cases}$$

Determinare inoltre, se esistono, i punti di massimo e minimo relativi e/o assoluti.

**Svolgimento**

Risulta

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = 1,$$

e $f(0) = 0$, la funzione $f$ non é continua in $x = 0$, e quindi non é derivabile in tale punto.
Studiamo la derivabilitá di $f$. Per $x > 0$ si ha

$$f^{'}(x) = e^{-\dfrac{x^2}{2}} \cdot (1 - x^2),$$

mentre per $x < 0,\ x \neq -1$ si ha

$$f^{'}(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

Studiamo la derivabilitá in $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1^-} f^{'}(x) = -\infty,$$

quindi $f$ non é derivabile in $x = -1$. Studiamo ora il segno di $f'$. Per $x > 0$ si ha $f'(x) \geq 0 \iff 0 < x \leq 1$, mentre per $x < 0,\ x \neq -1$ si ha $f'(x) \geq 0 \iff x < -1$. Pertanto $x = 1$ é un punto di massimo relativo, mentre $x = -1$ é un punto di minimo relativo. Notiamo che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in I\!R$; poiché $f(-1) = f(0) = 0$, zero é il minimo assoluto assunto nei punti $x = 0$ e $x = -1$. La funzione non ammette massimo assoluto essendo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

**3.** Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare la famiglia della primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^x \sin 2x, & x \in [-\pi, 0] \\ \\ \dfrac{x}{x^2 + 3x + 2}, & x \in ]0, 1] \end{cases}$$

**Svolgimento**

$f$ é continua nell'intervallo $[-\pi, 1]$, quindi la funzione integrale é una sua primitiva. La famiglia delle primitive é allora data da $F(x) + c$, dove

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{x} e^t \sin 2t dt, & x \in [-\pi, 0] \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{0} e^x \sin 2x dx + \int_0^x \frac{t}{t^2 + 37 + 2} dt, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Per quanto riguarda il primo integrale, integrando per parti due volte si ottiene:

$$\int_{-\pi}^{x} e^t \sin 2t dt = \frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) + \frac{2}{5e^{\pi}}.$$

Per il secondo integrale, utilizzando la formula di hermite, si ha:

$$\int_0^x \frac{t}{t^2 + 37 + 2} dt = \ln \frac{(x+2)^2}{x+1} - 2\ln 2.$$

Quindi

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) + \dfrac{2}{5e^{\pi}}, & x \in [-\pi, 0] \\ \\ \dfrac{2}{5e^{\pi}} - \dfrac{2}{5} + \ln \dfrac{(x+2)^2}{x+1} - 2\ln 2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 29.06.2004**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n + (-3)^n n}{4^n}.$$

**Svolgimento**

Scriviamo la serie come somma di due serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n \cdot n}{4^n}.$$

La prima serie  a termini di segno qualunque. Risulta:

$$\mid \frac{\cos n}{4^n} \mid \leq \frac{1}{4^n},$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ converge. Pertanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{4^n}$ converge assolutamente e quindi converge. Studiamo ora l'altra serie. Essa é a segni alterni. La serie assoluta é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n}{4^n}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n 3^n} = \frac{3}{4}$$

quindi la serie converge assolutamente. Pertanto la serie data, essendo somma di due serie assolutamente convergenti, converge.

**2.** Determinare gli eventuali punti di massimo relativo, di minimo relativo e i punti di flesso della funzione

$$f(x) = x^2 e^{x+1}.$$

Esistono il massimo e il minimo assoluti?

**Svolgimento**

La funzione é definita in tutto $I\!R$. L'espressione della derivata prima é la seguente

$$f'(x) = e^{x+1}(x^2 + 2x).$$

Risulta $f'(x) \geq 0 \iff x \leq -2,\ x \geq 0$. Pertanto $x = -2$ é un punto di massimo relativo e $x = 0$ é un punto di minimo relativo. Studiamo ora la derivata seconda. La sua espressione é:

$$f''(x) = e^{x+1}(x^2 + 4x + 2).$$

Risulta $f''(x) \geq 0 \iff x \leq -2 - \sqrt{2},\ x \geq -2 + \sqrt{2}$. Quindi $x = -2 \pm \sqrt{2}$ sono punti di flesso; piú precisamente la funzione é convessa in $(-\infty, -2 - \sqrt{2})$ e in $(-2 + \sqrt{2}, +\infty)$, mentre é concava in $(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$.
La funzione non ammette massimo assoluto essendo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

mentre il minimo assoluto é zero, assunto in $x = 0$, essendo $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in I\!R$.

**3.** Determinare l'espressione della funzione integrale della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{x+1}, & x \in [-1, 0] \\ \\ \log(x + 2) + 3, & x \in ]0, 1] \end{cases}$$

**Svolgimento**

La funzione é discontinua nel punto $x = 0$; essa é integrabile nell'intervallo $[-1, 1]$. La sua funzione intergrale é cosí definita:

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{x} te^{t+1}dt, & \text{se } x \in [-1, 0] \\ \\ \displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{x+1}dx + \int_{0}^{x} [\log(t+2) + 3]dt, & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Per $-1 \leq x \leq 0$ si ha, integrando per parti,

$$F(x) = \int_{-1}^{x} te^{t+1}dt = xe^{x+1} + 1 - \int_{-1}^{x} e^{t+1}dt = xe^{x+1} - e^{x+1} + 2.$$

Calcoliamo ora l'integrale indefinito $\int [\log(t+2) + 3]dt$. Risulta, utilizzando l'integrazione per parti:

$$\int [\log(t+2) + 3]dt = \int \log(t+2)dt + 3t = t\log(t+2) - \int \frac{t+2-2}{t+2}dt =$$
$$t\log(t+2) - t + 2\int \frac{1}{t+2}dt = t\log(t+2) + 2\log(t+2) + 2t.$$

Pertanto

$$F(x) = \begin{cases} xe^{x+1} - e^{x+1} + 2, & \text{se } x \in [-1, 0] \\ \\ 2 - e + x\log(x+2) + 2\log(x+2) + 2x - 2\log 2, & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 19.07.2004**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n e^n n!}{n^n}.$$

**Svolgimento**

La serie é a termini positivi.Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n e^n n!} = 2e \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2e \cdot \frac{1}{e} = 2.$$

Quindi la serie diverge.

**2.** Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione

$$f(x) = e^{-x^2}\sqrt{16-x^2}.$$

Esistono il massimo e il minimo assoluti?

**Svolgimento** Il dominio della funzione é l'intervallo chiuso $[-4, 4]$. L'espressione della derivata prima é la seguente

$$f'(x) = xe^{-x^2} \frac{2x^2-33}{\sqrt{16-x^2}}.$$

Risulta $f'(x) = 0$ per $x = \pm\sqrt{\frac{33}{2}}$, valori che non appartengono al dominio, o $x = 0$. Dallo studio del segno della derivata prima si deduce che $f$ cresce nell'intervallo $]-4, 0[$ e decresce nell'intervallo $]0, 4[$. Pertanto $x = -4$ e $x = 4$ sono punti di minimo assoluti, mentre $x = 0$ é un punto di massimo assoluto.

**3.** Determinare l'area della porzione di piano compresa tra le rette $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1$, l'asse $x$ e il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^4-1}{x^3+2x^2}$.

**Svolgimento**

La funzione é positiva nell'intervallo [-3/2,-1], pertanto l'area richiesta é fornita dal seguente integrale:

$$\mathcal{A} = \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \frac{x^4-1}{x^3+2x^2} dx.$$

Eseguendo la divisione tra polinomi si ottiene:

$$\mathcal{A} = \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} (x-2) dx + \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \frac{4x^2-1}{x^2(x+2)} dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-\frac{3}{2}}^{-1} + \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \frac{4x^2-1}{x^2(x+2)} dx.$$

Utilizziamo la scomposizione di Hermite:

$$\frac{4x^2-1}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Il principio di uguaglianza tra polinomi conduce ad un sistema di tre equazioni nelle incognite $A, B, C$ che fornisce la seguente soluzione:

$$A = 1/4, \ B = -1/2, \ C = 15/4.$$

Quindi:

$$\mathcal{A} = -\frac{13}{8} + \frac{1}{4}\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \frac{1}{x^2} dx + \frac{15}{4}\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \frac{1}{x+2} dx =$$
$$= -\frac{13}{8} + \left[\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{2x} + \frac{15}{4}\ln|x+2|\right]_{-\frac{3}{2}}^{-1} = -\frac{43}{24} + 4\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 3.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 7.09.2004**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare, al variare di $x \in I\!R^+$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log x)^n}{n^2+1}.$$

**Soluzione**

La serie é a termini di segno qualunque. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie assoluta:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\log x|^{n+1}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{|\log x|^n} = |\log x| .$$

Quindi la serie converge assolutamente se $|\log x| < 1$, cioé se $\frac{1}{e} < x < e$. Se $x = e$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1},$$

che risulta convergente. Se $x = \frac{1}{e}$, la serie si scrive

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1},$$

che converge per il criterio di Leibniz, essendo $\lim_n \dfrac{1}{n^2+1} = 0$, e $\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right)_n$ una successione decrescente. Se $x > e$ la serie é a termini positivi e per il criterio del rapporto diverge essendo $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Se $0 < x < \frac{1}{e}$ la serie si scrive

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{|\log x|^n}{n^2+1},$$

che é una serie a segni alterni. Tale serie non converge essendo $\lim_n \dfrac{|\log x|^n}{n^2+1} = +\infty$.

**2.** Determinare il valore del parametro $\alpha \in I\!R$ affinché la funzione $f_\alpha$ definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{(x+1)(x+\alpha)} & x \in [0,1] \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+3)}, & x \in ]1,2] \end{cases}$$

risulti continua. Studiare poi la derivabilitá della funzione cosí ottenuta e determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi e assoluti.

**Soluzione**

Chiaramente la funzione é continua nell'intervallo $[0,1[$ e nell'intervallo $]1,2]$. Esaminiamo la continuitá nel punto $x = 1$. Poiché $\lim_{x\to 1^+} f_\alpha(x) = \frac{1}{4}$ e $f_\alpha(1) = -\dfrac{1}{2(1+\alpha)}$, la funzione risulta continua in $x = 1$ se e solo se $-\dfrac{1}{2(1+\alpha)} = \dfrac{1}{4}$, cioé se e solo se $\alpha = -3$. Studiamo ora la derivabilitá della funzione $f_{-3}(x)$. Per $x \in [0,1[$ risulta

$$f'_{-3}(x) = \frac{-x^2+4x-7}{(x+1)^2(x-3)^2}.$$

Studiando il segno di $f'_{-3}(x)$ si ottiene che $f_{-3}(x)$ decresce in $[0,1[$. Per $x \in ]1,2[$ si ha

$$f'_{-3}(x) = -\frac{3x+3}{2x\sqrt{x}(x+3)^2},$$

e studiando il segno di tale derivata si ottiene che $f_{-3}(x)$ decresce in $]1,2]$. Pertanto la funzione ha in $x = 0$ un punto di massimo assoluto e in $x = 2$ un punto di minimo assoluto. Il massimo assoluto é $\frac{2}{3}$, mentre il minimo assoluto é $\frac{1}{5\sqrt{2}}$. La funzione non é derivabile in $x = 1$. Infatti:

$$\lim_{x\to 1^-} f'_{-3}(x) = -\frac{1}{4},$$

mentre
$$\lim_{x\to 1^+} f'_{-3}(x) = -\frac{3}{16}.$$

**3.** Determinare l'espressione della funzione integrale della seguente funzione
$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{\sqrt{x}}, & x \in [0,1] \\ \\ \dfrac{x-2}{x(x+1)}, & x \in ]1,2] \end{cases}$$

**Soluzione**

Notiamo che $f$ non é continua nel punto $x = 1$ e quindi non puó ammettere primitive. La funzione integrale é:
$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x te^{\sqrt{t}}dt, & x \in [0,1] \\ \\ \displaystyle\int_0^1 xe^{\sqrt{x}}dx + \int_1^x \frac{t-2}{t(t+1)}dt, & x \in ]1,2] \end{cases}$$
Determiniamo la famiglia delle primitive della funzione $t \mapsto te^{\sqrt{t}}$, risolvendo il seguente integrale indefinito:
$$\int te^{\sqrt{t}}dt.$$
Operando la sostituzione $\sqrt{t} = z$ e applicando tre volte la formula di integrazione per parti si ottiene:
$$\int te^{\sqrt{t}}dt = 2\int z^3e^z dz = 2z^3e^z - 6\int z^2e^z dz =$$
$$= 2z^3e^z - 6z^2e^z + 12\int ze^z dz = 2z^3e^z - 6z^2e^z + 12ze^z - 12e^z + c =$$
$$= 2t\sqrt{t}e^{\sqrt{t}} - 6te^{\sqrt{t}} + 12\sqrt{t}e^{\sqrt{t}} - 12e^{\sqrt{t}} + c$$
Risolviamo ora l'altro integrale indefinito per trovare la famiglia delle primitive della funzione $t \mapsto \dfrac{t-2}{t(t+1)}$, utilizzando la formula di decomposizione.
$$\int \frac{t-2}{t(t+1)}dt = -2\int \frac{1}{t}dt + 3\int \frac{1}{t+1}dt = -2\log|t| + 3\log|t+1| + k.$$

L'espressione della funzione integrale sará quindi:

$$F(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{x}}(2x\sqrt{x} - 6x + 12\sqrt{x} - 12) + 12, & x \in [0,1] \\ \\ -2\log x + 3\log(x+1) - 3\log 2 - 4e + 12, & x \in ]1,2] \end{cases}$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 27.09.2004**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(-2)^n}.$$

**Svolgimento**

La serie é a segni alterni. Infatto possiamo scriverla nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^n}.$$

Studiamo la convergenza assoluta, applicando il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = +\infty.$$

Quindi la serie assoluta non converge. Studiamo ora la convergenza semplice. Poiché $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$, fissato $M = 1$ esiste $\overline{n}(M) > 0$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulta $a_{n+1} > a_n$. Quindi la successione $\left(\dfrac{n!}{2^n}\right)_n$ é definitivamente crescente, pertanto la serie non converge semplicemente.

**2.** Si determinino gli eventuali punti di massimo, di minimo e di flesso della funzione

$$f(x) = e^{-x}\sqrt[3]{3x-2}.$$

Dire infine se la funzione ammette il massimo e/o il minimo assoluti e tracciare un grafico approssimativo.

**Svolgimento**

La funzione é definita in tutto l'asse reale. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

L'espressione della derivata prima é la seguente:

$$f'(x) = e^{-x} \cdot \frac{-3x+3}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}}.$$

Studiamo la derivabilitá in $x = \dfrac{2}{3}$:

$$\lim_{x\to(\frac{2}{3})^+} f'(x) = +\infty,$$

e quindi la funzione non é derivabile in tale punto. Studiando il segno di $f'(x)$ si ottiene che $f(x)$ cresce in $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right[$, cresce in $\left]\dfrac{2}{3}, 1\right[$ e decresce in $]1, +\infty)$. Pertanto il punto $x = 1$ é di massimo relativo, con $f(1) = \dfrac{1}{e}$. Determiniamo ora l'espressione della derivata seconda. Risulta:

$$f''(x) = e^{-x} \cdot \frac{9x^2 - 24x + 10}{(3x-2)\sqrt[3]{(3x-2)^2}}.$$

Studiando il segno di $f''(x)$ si evince che la funzione presenta tre punti di flesso: $x = \dfrac{12 \pm \sqrt{54}}{9}$ e $x = \dfrac{2}{3}$. La funzione é concava in $\left(-\infty, \dfrac{12-\sqrt{54}}{9}\right[$, é convessa in $\left]\dfrac{12-\sqrt{54}}{9}, \dfrac{2}{3}\right[$, é concava in $\left]\dfrac{2}{3}, \dfrac{12+\sqrt{54}}{9}\right[$ ed é convessa in $\left]\dfrac{12+\sqrt{54}}{9}, +\infty\right)$.

La funzione ha in $x = 1$ un massimo assoluto, mentre non ammette il minimo assoluto essendo inferiormente illimitata.

**3.** Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{x^4}{x^3 - 8} dx.$$

**Svolgimento**

Eseguendo la divisione tra polinomi si ottiene:

$$\int \frac{x^4}{x^3-8}dx = \int x dx + 8\int \frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)}dx.$$

Risolviamo il secondo integrale utilizzando la scomposizione di Hermite:

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}.$$

Applicando il principio di uguaglianza tra polinomi si ottiene $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{6}$ e $C = \frac{1}{3}$. Quindi

$$\int \frac{x^4}{x^3-8}dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\int \frac{-4x+8}{x^2+2x+4}dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{4}{3}\int \frac{x}{(x+1)^2+3}dx + \frac{8}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2+3}dx.$$

Risolviamo ora $\int \frac{x}{(x+1)^2+3}dx$. Operando la sostituzione $x+1=t$ si ottiene:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2+3}dx = \int \frac{t-1}{t^2+3}dt = \int \frac{t}{t^2+3}dt - \int \frac{1}{t^2+3}dt =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+3) - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+3) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} + c =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4+2x) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + c$$

In conclusione

$$\int \frac{x^4}{x^3-8}dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln(x^2+4+2x) + \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + \frac{8\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + c$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln(x^2+4+2x) + \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

**Università degli Studi di Perugia**
**Facoltà di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Appello del 13.12.2004**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte:

1. Studiare il comportamento della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n^{1/4}})}{\sqrt{n}}.$$

2. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x) = x + \log(1 + \frac{x}{x-2}),$$
determinando in particolare gli eventuali asintoti, gli eventuali punti di massimo, minimo, flesso.

3. Calcolare il seguente integrale definito:
$$\int_{-3/2}^{-1} \frac{10x+4}{4x-x^3} dx.$$

**Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica Ia**
**c.l. Ambiente e Territorio**
**Appello del 13.12. 2004**

**Soluzione del primo esercizio.**
La serie é a termini positivi. Applichiamo il criterio degli infinitesimi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n^{1/4}})}{n^{1/2}} \cdot n^{\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n^{1/4}})}{\frac{1}{n^{\alpha-1/2}}} = 1,$$

se $\alpha = 3/4$. Pertanto la serie diverge.

**Soluzione del secondo esercizio**
Per determinare il dominio occorre risolvere la disequazione fratta $1+\dfrac{x}{x-2} > 0$ che é soddisfatta per $x < 1$ o $x > 2$. Pertanto il dominio é $D = ]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$. Notiamo che $f(0) = 0$. Determiniamo ora gli eventuali asintoti orizzontali. Risulta:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

e quindi non ci sono asintoti orizzontali. Determiniamo gli eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 := m$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \log 2 := q.$$

Analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 := m$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \log 2 := q.$$

Pertanto $y = x + \log 2$ é l'asintoto obliquo. Determiniamo ora gli eventuali asintoti verticali:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty,$$

quindi $x = 1$ é un asintoto verticale;

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty,$$

quindi $x = 2$  un asintoto verticale.
L'espressione della derivata prima é:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)(x-2)}.$$

Dallo studio del segno di $f'$ si deduce che $f$ cresce nell'intervallo $]-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}[$, decresce in $]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1[$, cresce in $]2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}[$ e decresce in $]\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$. Pertanto $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ é un punto di massimo relativo, mentre $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  un punto di minimo relativo.
L'espressione della derivata seconda é:

$$f''(x) = \frac{2x - 3}{(x-1)^2(x-2)^2}.$$

Dallo studio del segno di $f''$ si deduce che $f$ é concava in $]-\infty, 1[$, mentre é convessa in $]2, +\infty[$.

**Soluzione del terzo esercizio**
Applicando la formula di Hermite si ottiene:

$$\frac{10x+4}{x(2-x)(2+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2-x} + \frac{C}{2+x} = \frac{x^2(-A+B-C) + x(2B+2C) + 4A}{x(2-x)(2+x)}.$$

Dal principio di identitá tra polinomi si ottiene $A = 1,\ B = 3,\ C = 2$. Pertanto l'integrale si scrive:

$$\int_{-3/2}^{-1} \frac{10x+4}{4x - x^3} dx = \int_{-3/2}^{-1} \frac{1}{x} dx + 3\int_{-3/2}^{-1} \frac{1}{2-x} dx + 2\int_{-3/2}^{-1} \frac{1}{2+x} dx =$$

$$= [\log|x| - 3\log|2-x| + 2\log|2+x|]_{-3/2}^{-1} = -3\log 3 - \log\frac{3}{2} + 3\log\frac{7}{2} - 2\log\frac{1}{2} =$$

$$= -4\log 3 + 3\log 7.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 10.01.2005**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{\frac{n+2}{n^2+1}} - 1}{n}.$$

**Soluzione**

La serie é a segni alterni. Studiamo la convergenza assoluta, utilizzando il criterio degli infinitesimi:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot n^p = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{n+2}{n^2+1}} - 1}{\frac{n+2}{n^2+1}} \cdot \frac{n+2}{n^2+1} \cdot n^{p-1} = 1,$$

se $p = +2$. Pertanto la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

**2.** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (x+2)\sqrt{4-x^2},$$

determinando in particolare gli eventuali punti di massimo, minimo e flesso. Stabilire inoltre se esistono $f'_s(2)$ e $f'_d(-2)$, e se la funzione ammette massimo e/o minimo assoluti.

**Soluzione**

Per determinare il dominio occorre risolvere la disequazione $4 - x^2 \geq 0$ che é soddisfatta per $-2 \leq x \leq 2$. Pertanto il dominio é $D = [-2, 2]$. Risulta $f(x) = 0 \iff x = \pm 2$ e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$. La funzione non ammette asintoti. L'espressione della derivata prima é la seguente:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\sqrt{4-x^2}}, \quad \forall x \in ]-2, 2[.$$

Studiamo la derivabilitá nei punti $x = \pm 2$.

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = -\infty,$$

quindi non esiste $f'_d(2)$, mentre

$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = \lim_{x \to -2^+} 2\sqrt{\frac{(x-1)^2(x+2)^2}{(2+x)(2-x)}} = \lim_{x \to -2^+} 2\sqrt{\frac{(x-1)^2(x+2)}{2-x}} = 0 = f'_s(-2).$$

Dallo studio del segno di $f'$ si deduce che $f$ cresce nell'intervallo $]-2,1[$ e decresce in $]1,2[$. Pertanto $x = 1$ é un punto di massimo assoluto, mentre $x = \pm 2$ sono punti di minimo assoluto.
L'espressione della derivata seconda é:

$$f''(x) = \frac{2(x^3 - 12x - 8)}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}.$$

Scomponendo il numeratore con Ruffini si ottiene:

$$f''(x) = \frac{2(x+2)(x^2 - 2x - 2)}{(2-x)(2+x)\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2(x^2 - 2x - 2)}{(2-x)\sqrt{4 - x^2}}.$$

Dallo studio del segno di $f''$ si deduce che $f$ é convessa in $]-2, 1-\sqrt{3}[$, mentre é concava in $]1-\sqrt{3}, 2[$. Il punto $x = 1 - \sqrt{3}$ é di flesso.

**3.** Determinare la famiglia delle primitive della funzione

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}.$$

**Soluzione**

L'integrale indefinito di una funzione continua $f$ rappresenta la classe di tutte le primitive della $f$. Quindi risolviamo l'integrale indefinito della $f$. Operando la sostituzione $e^x = t$ si ottiene:

$$\int \frac{e^x + 2}{e^x + 1} dx = \int \frac{t + 2}{t(t+1)} dt.$$

Utilizzando la formula di Hermite si perviene a:

$$\int \frac{t+2}{t(t+1)}dt = 2\int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+1}dt = 2\ln|t| - \ln|t+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pertanto

$$\int \frac{e^x+2}{e^x+1}dx = 2x - \ln(e^x+1) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova dell' 11.04.2005**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \arctan \frac{n}{n^2+1}.$$

**2.** Studiare la funzione $f(x) = \ln\left[1 + \left(\frac{x+1}{x^2-2}\right)^2\right]$ e tracciarne il grafico (non é richiesto lo studio della derivata seconda) . Stabilire inoltre se esiste un intervallo $[a, b]$ in cui sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle.

**3.** Determinare l'espressione della funzione integrale della funzione $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x-1}$.

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 5.07.2005**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare il comportamento della seguente serie, usando il criterio del confronto asintotico:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}(e^{1/n} - 1).$$

**2.** Determinare gli eventuali punti di massimo relativo, di minimo relativo e i punti di flesso della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x-1), & x \leq 1 \\ \\ \log \dfrac{x-1}{x+3}, & x > 1 \end{cases}$$

Facoltativo: tracciare il grafico della funzione.

**3.** Determinare la famiglia delle primitive della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 5x + 6}.$$

**Università degli Studi di Perugia**
**Facoltà di Ingegneria**
**Corso di laurea in Ingegneria Ambiente e territorio**
**Prova scritta di Analisi Matematica IA**
**05 Luglio 2005**

## Soluzioni del compito di Analisi I del 5 Luglio 2005

**1)** La serie è a termini positivi. Utilizzando il criterio del confronto asintotico, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/n}-1}{n^{-1/2}} n^{\alpha} = 1$$

se $\alpha = 1/2$. Pertanto la serie diverge.

**2)** Il dominio della funzione è tutto $I\!R$. Inoltre si vede facilmente che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ e quindi la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale. Intersezioni con gli assi: $f(1) = 0$ e $f(0) = -1$. Osserviamo che la funzione non è continua nel punto 1, poichè $f(1) = 0$ mentre

$$\lim_{x\to 1^+} \log \frac{x-1}{x+3} = -\infty.$$

Quindi la retta $x = 1$ è un asintoto verticale e in tale punto $f$ non è nemmeno derivabile. Negli altri punti si ha:

$$f(x) = \begin{cases} xe^x, & x < 1 \\ \dfrac{4}{(x-1)(x+3)}, & x > 1 \end{cases}$$

Osserviamo che il punto $x = 1$ è anche un massimo assoluto, perchè risulta $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in I\!R$. Per studiare il segno della derivata prima, conviene spezzare il problema in due parti. Prima studiamo il caso $x < 1$. In tal caso è facile vedere che $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 0$, $x \neq 1$. Quindi $f$ è decrescente in $]-\infty, 0[$ e crescente in $[0, 1[$. Pertanto il punto $x = 0$ è un minimo relativo e $f(0) = -1$.

Per $x > 1$, si vede subito che è sempre $f'(x) > 0$, pertanto la funzione è crescente in $]1, +\infty[$.

Per la derivata seconda si ha:

$$f''(x) = \begin{cases} e^x(x+1), & x < 1 \\ -\dfrac{8(x+1)}{(x-1)^2(x+3)^2}, & x > 1 \end{cases}$$

La funzione è quindi convessa nell'intervallo $]-1, 1[$ e concava in $]1, +\infty[$ e $]-\infty, -1[$. Il punto $x = -1$ è un punto di flesso.

**3)** Eseguendo anzitutto la divisione dei polinomi $x^2 - 4x$ e $x^2 + 5x + 6$, si ha

$$\int \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 5x + 6} dx = x - 3 \int \frac{3x + 2}{(x + 2)(x + 3)} dx.$$

Calcoliamo quindi l'ultimo integrale utilizzando la formula di Hermite. Posto

$$\frac{3x + 2}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3}$$

da cui si ricavano $A = -4$, $B = 7$ e quindi

$$\int \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 5x + 6} dx = x + 12 \log|x + 2| - 21 \log|x + 3| + c.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 12.09.2005**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Stabilire il comportamento della successione $\left(\sqrt[n]{2^n + n^2}\right)_n$.

**Svolgimento**

Risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(2^n + n^2\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{1/n \log(2^n+n^2)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log(2^n + n^2)}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n \log 2}{n}} = e^{\log 2} = 2.$$

Pertanto la successione converge al valore 2.

**2.** Tracciare il grafico della funzione $f(x) = x\sqrt[3]{x^2 + 5x}$. (Non é richiesto lo studio della derivata seconda).

**Svolgimento**

Il dominio della funzione é $I\!R$. Le intersezioni con gli assi coordinati sono i punti $A = (0, 0)$ e $B = (-5, 0)$. Studiando il segno della funzione risulta $f(x) > 0$ in $] - 5, 0[\cup]0, +\infty[$, mentre $f(x) < 0$ in $] - \infty, 0[$. Passiamo ora al calcolo dei limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

quindi non ci sono asintoti orizzontali. Stabiliamo se esistono asintoti obliqui. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

pertanto non esistono asintoti obliqui.
L'espressione della derivata prima é:

$$f'(x) = \frac{5x^2 + 20x}{3\sqrt[3]{(x^2+5x)^2}}.$$

Notiamo che i punti $x = 0$ e $x = -5$ sono di non derivabilitá e quindi punti angolosi. Studiamo il segno di $f'$. Risulta

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 4 \;\vee\; x \geq 0.$$

Quindi il punto $x = -4$ é di massimo relativo, mentre il punto $x = 0$ é di minimo relativo.

**3.** Determinare la primitiva $P(x)$ della funzione $g(x) = xe^{\sqrt{x}}$ che verifica la condizione $P(0) = -12$.

**Svolgimento**

Determiniamo la famiglia delle primitive di $g$, rislovendo l'integrale indefinito. Operando la sostituzione $\sqrt{x} = t$ e successivamente integrando per parti tre volte si ottiene:

$$\int xe^{\sqrt{x}}dx = 2\int t^3e^tdt = 2t^3e^t - 6\int t^2e^tdt =$$

$$= 2t^3e^t - 6t^2e^t + 12\int te^tdt = 2t^3e^t - 6t^2e^t + 12te^t - 12e^t + c =$$

$$= 2x\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 6xe^{\sqrt{x}} + 12\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 12e^{\sqrt{x}} + c.$$

Imponendo la condizione $P(x) = -12$, si ottiene $c = 0$. La primitiva richiesta é:

$$P(x) = 2x\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 6xe^{\sqrt{x}} + 12\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 12e^{\sqrt{x}}.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 29.09.2005**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare al variare di $x \in I\!R$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n \frac{3n+2}{n^2}.$$

**Svolgimento**

La serie é a termini di segno qualunque. Studiamo la convergenza della serie assoluta, utilizzando il criterio del rapporto. Si ottiene:

$$\lim_n |x|^{n+1} \frac{(3n+2)}{(n+1)^2} \frac{n^2}{|x|^n(3n+2)} = |x|.$$

Quindi la serie converge assolutamente, e quindi converge, per $-1 < x < 1$. Se $x = -1$ la serie si scrive

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+2}{n^2},$$

che é una serie a termini positivi. Poiché

$$\lim_n \frac{3n+2}{n^2} \cdot n = 3,$$

la serie diverge per il criterio del confronto asintotico.
Se $x = 1$ la serie si scrive

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3n+2}{n^2}$$

che é una serie a segni alterni. Essendo $\left(\frac{3n+2}{n^2}\right)_n$ una successione decrescente e infinitesima, per il criterio di Leibnitz si ha la convergenza.

Se $x < -1$ la serie si scrive

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x|^n \frac{3n+2}{n^2}.$$

Poiché $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, la serie diverge. Se $x > 1$ la serie si scrive $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n \frac{3n+2}{n^2}$, che é una serie a segni alterni. Essendo $\lim_n x^n \dfrac{3n+2}{n^2} = +\infty$, la serie non converge.

**2.** Data la funzione $f : I\!R \to I\!R$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x}, & x < 0 \\ \\ \dfrac{x+a}{x+2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

dopo aver determinato il valore del parametro $a \in I\!R$ in modo che $f$ risulti continua su $I\!R$, studiare la derivabilitá.

**Svolgimento**

Studiamo la continuitá nel punto $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x \to 0^-} 2 \frac{e^{2x}-1}{2x} = 2,$$

e $f(0) = \dfrac{a}{2}$. Quindi la funzione $f$ é continua in $x = 0$, solo se $a = 4$. Studiamo la derivabilitá di $f$. Per $x > 0$ si ha

$$f^{'}(x) = \frac{-2}{(x+2)^2},$$

mentre per $x < 0$ si ha

$$f^{'}(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)+1}{x^2}.$$

Studiamo la derivabilitá in $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f^{'}(x) = -1/2,$$

mentre, utilizzando L'Hopital, si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} f^{'}(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{4e^{2x}}{2x} = 2$$

quindi $f$ non é derivabile in $x = 0$.

**3.** Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2 + 3x - 1}{(x-3)(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

**Svolgimento**

Utilizzando la formula di Hermite, si ha:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2 + 3x - 1}{(x-3)(x^2 + 2x + 2)} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x-3} dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx =$$
$$= [\ln|x-3|]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{1}{1 + (x+1)^2} dx = [\ln|x-3| + \arctan(x+1)]_{-1}^{0} =$$
$$= \ln 3/4 + \pi/4.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 12.12.2005**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \log^3\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

**Svolgimento**

La serie é a termini positivi. Applichiamo il criterio degli infinitesimi:

$$\lim_n \frac{\log^3(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} \cdot n = \lim_n \frac{\log^3(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^3}} = 1.$$

Essendo $p = 1$, la serie diverge.

**2.** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-3} e^{x+1}.$$

(Non é richiesto lo studio della derivata seconda).

**Svolgimento**

Il dominio della funzione é $I\!R \setminus \{3\}$. La funzione é positiva per $x > 3$. Le intersezioni con gli assi coordinati sono $(0, -\frac{2}{3}e)$ e $(2, 0)$. La funzione si scrive

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-3} e^{x+1}, & x \in [2, 3[\cup]3, +\infty[ \\ \\ \dfrac{2-x}{x-3} e^{x+1}, & x \in ]-\infty, 2[ \end{cases}$$

Risulta:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

e quindi $y = 0$ é un asintoto orizzontale;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Verifichiamo se la funzione ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

e quindi non ci sono asintoti obliqui. Ricerchiamo ora eventuali asintoti verticali.

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty.$$

Pertanto $x = 3$ é un asintoto verticale.
L'espressione della derivata prima é la seguente:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x+1}\dfrac{x^2-5x+5}{(x-3)^2}, & x \in ]2,3[\cup]3,+\infty[ \\ \\ e^{x+1}\dfrac{-x^2+5x-5}{(x-3)^2}, & x \in ]-\infty, 2[ \end{cases}$$

Studiamo la derivabilitá in $x = 2$. Risulta:

$$\lim_{x\to2^-} f'(x) = e^3,$$

$$\lim_{x\to2^+} f'(x) = -e^3,$$

pertanto non esiste $f'(2)$. Studiamo ora il segno di $f'(x)$. Per $x \in ]2,3[\cup]3,+\infty[$ si ha

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \frac{5+\sqrt{5}}{2},$$

$$f'(x) \leq 0 \Longleftrightarrow x \in ]2,3[\cup \left]3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right[.$$

Quindi $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ é un punto di minimo relativo.
Per $x \in ]-\infty, 2[$ risulta

$$f'(x) \geq 0 \iff x \in \left]\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2\right[,$$

$$f'(x) \leq 0 \iff x \in \left]-\infty, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right[,$$

quindi $x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ é un punto di minimo relativo, mentre $x = 2$ é un punto di massimo relativo (angoloso).

**3.** Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^e \log \frac{3x-2}{3-x} dx.$$

**Svolgimento**

Determiniamo prima la famiglia delle primitive della funzione $\log \dfrac{3x-2}{3-x}$.
Utilizzando la formula di integrazione per parti si ha:

$$\int \log \frac{3x-2}{3-x} dx = x \cdot \log \frac{3x-2}{3-x} - 7 \int \frac{x}{(3x-2)(3-x)} dx.$$

Utilizzando ora la formula di decomposizione si ottiene:

$$\int \log \frac{3x-2}{3-x} dx = x \cdot \log \frac{3x-2}{3-x} - 2 \int \frac{dx}{3x-2} - 3 \int \frac{dx}{3-x} =$$
$$= x \cdot \log \frac{3x-2}{3-x} - \frac{2}{3} \log |3x-2| + 3 \log |3-x| + c.$$

Quindi

$$\int_1^e \log \frac{3x-2}{3-x} dx = \left[x \cdot \log \frac{3x-2}{3-x} - \frac{2}{3} \log |3x-2| + 3 \log |3-x|\right]_1^e =$$
$$= \left(e - \frac{2}{3}\right) \log(3e-2) + (3-e) \log(3-e) - \log 2.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 10.01.2006**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x-1)^n}{n^2}.$$

### Soluzioni

La serie assoluta é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|3x-1|^n}{n^2}.$$

Utilizzando il criterio del rapporto si ottiene

$$\lim_n \frac{|3x-1|^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{|3x-1|^n}{n^2} = |3x-1|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente se $|3x-1| < 1$, cioé $0 < x < \frac{2}{3}$.
Se $x = 0$ la serie si scrive:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

che é una serie a segni alterni. Poiché la successione $\left(\frac{1}{n^2}\right)_n$ é monotona decrescente e $\lim_n \frac{1}{n^2} = 0$, per il criterio di Leibnitz la serie converge.
Se $x = \frac{2}{3}$, la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

che é convergente.
Se $x > \frac{2}{3}$, la serie é a termini positivi ed essendo $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3x-1 > 1$, la serie diverge per il criterio del rapporto.
Se $x < 0$, la serie si scrive:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|3x-1|^n}{n^2},$$

che é una serie a segni alterni. Poiché $\lim_n \frac{|3x-1|^n}{n^2} = +\infty$, la serie non converge.

**2.** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (x^2 - 4)\sqrt[3]{x+1}.$$

(É richiesto lo studio della derivata seconda).

**Soluzioni**

Il dominio della funzione é $I\!R$. L'intersezione con l'asse delle $y$ é il punto $(0, -4)$, mentre le intersezioni con l'asse delle $x$ sono i punti $(\pm 2, 0)$ e $(-1, 0)$. La funzione é positiva in $]-2, -1[\cup]2, +\infty[$, mentre é negativa in $]-\infty, -2[\cup$
$]-1, 2[$.
la funzione non presenta asintoti orizzontali, essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

L'espressione della derivata prima é la seguente:

$$f'(x) = \frac{7x^2 + 6x - 4}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

Studiamo la derivabilitá nel punto $x = -1$:

$$\lim_{x\to-1} f'(x) = +\infty,$$

quindi $f$ non é derivabile in $x = -1$. Studiamo ora il segno della derivata prima.

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x < \frac{-3-\sqrt{37}}{7}, \quad x > \frac{-3+\sqrt{37}}{7}.$$

Quindi $x = \dfrac{-3-\sqrt{37}}{7}$ é un punto di massimo relativo, mentre $x = \dfrac{-3+\sqrt{37}}{7}$ é un punto di minimo relativo.
L'espressione della derivata seconda é, per $x \neq -1$:

$$f''(x) = \frac{2(14x^2+24x+13)}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}.$$

Risulta $f''(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x > -1$. Quindi $x = -1$ é un flesso.

**3.** Determinare la primitiva $P(x)$ della funzione $f : [-1,1] \to I\!R$ definita da

$$f(x) = \arctan(x+1) + \frac{3}{x^2-4},$$

tale che $P(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

**Soluzioni**

Calcoliamo l'integrale indefinito per determinare la famiglia di tutte le primitive della funzione data.

$$\int f(x)dx = \int \arctan(x+1)dx + 3\int \frac{dx}{(x+2)(x-2)}.$$

Risolviamo il primo integrale per parti, il secondo utilizzando la decomposizione:

$$\int f(x)dx = x\arctan(x+1) - \int \frac{x}{1+(x+1)^2}dx - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= x\arctan(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{1+(x+1)^2}dx - \frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{3}{4}\ln|x-2| =$$

$$= x\arctan(x+1) - \frac{1}{2}\ln[1+(x+1)^2] + \arctan(x+1) - \frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{3}{4}\ln|x-2| + c =$$

$$= (x+1)\arctan(x+1) - \frac{1}{2}\ln[1+(x+1)^2] + \frac{3}{4}\ln\frac{|x-2|}{|x+2|} + c.$$

Imponendo la condizione $P(0) = \frac{\pi}{4}$, si ottiene $c = \frac{1}{2}\ln 2$.

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 7.04.2006**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+3}.$$

**Soluzione**

La serie assoluta é

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+3}.$$

Utilizzando il criterio degli infinitesimi si ottiene

$$\lim_n \frac{n^{2/3}}{(n+3)}\cdot n^p = 1 \Longleftrightarrow p = 1/3.$$

Pertanto la serie diverge assolutamente.
Studiamo ora la convergenza semplice. Risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+3} = 0.$$

Stabiliamo la monotonia della successione $\left(\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+3}\right)_n$. Posto $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+3}$, con $x \geq 0$, si ha

$$f'(x) = \frac{-x+6}{3(x+3)^2\sqrt[3]{x}} \geq 0 \Longleftrightarrow 0 < x < 6.$$

Quindi la successione é definitivamente decrescente. Per il criterio di Leibnitz la serie converge semplicemente.

**2.** Studiare la funzione
$$f(x) = \log\left(1 + \frac{2x-5}{x}\right)$$
e tracciarne un grafico approssimativo. (E' richiesto lo studio della derivata seconda).

**Soluzione**

Il dominio della funzione é $D = (-\infty, 0) \cup (5/3, +\infty)$. L'intersezione con l'asse delle $x$ é il punto $(5/2, 0)$. La funzione é positiva in $(-\infty, 0) \cup (5/2, +\infty)$, mentre é negativa in $(5/3, 5/2)$.
La retta $y = \log 3$ é un asintoto orizzontale per la funzione, essendo
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \log 3,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \log 3.$$
La funzione ammette inoltre anche gli asintoti verticali $x = 0$ e $x = 5/3$; infatti
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to (5/3)^+} f(x) = -\infty.$$
L'espressione della derivata prima é la seguente:
$$f'(x) = \frac{5}{x(3x-5)}.$$
Studiamo il segno della derivata prima.
$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in D.$$
Quindi $f$ cresce in $(-\infty, 0)$ e in $(5/3, +\infty)$.
L'espressione della derivata seconda é:
$$f''(x) = \frac{5(-6x+5)}{(3x^2-5x)^2}.$$
Risulta $f''(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x < 0$. Quindi $f$ é convessa in $(-\infty, 0)$ mentre é concava in $(5/3, +\infty)$.

**3.** Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra l'asse delle ascisse, le rette di equazione $x = e - 1$ e $x = 0$ e il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\log^2(x+1)}{(x+1)[\log(x+1)+3]}.$$

**Soluzione**

Poiché la funzione integranda é positiva nell'intervallo $[0, e-1]$, l'area richiesta é fornita dall'integrale

$$\int_0^{e-1} \frac{\log^2(x+1)}{(x+1)[\log(x+1)+3]} dx.$$

Operando la sostituzione $\log(x+1) = t$ l'integrale si scrive

$$\int_0^1 \frac{t^2}{t+3} dt.$$

Eseguendo la divisione tra polinomi, si ottiene infine

$$\int_0^1 \frac{t^2}{t+3} dt = \int_0^1 (t-3) dt + 9 \int_0^1 \frac{1}{t+3} dt =$$
$$= [t^2/2 - 3t + 9\log(t+3)]_0^1 = 9 \log \frac{4}{3} - \frac{5}{2}.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA Ia**
**Prova del 10.07.2006**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \left(\frac{4n+3}{n+1}\right)^{n}.$$

**Soluzione**

La serie é a termini positivi. Poiché

$$\lim_n a_n = \lim_n \left(\frac{4n+3}{4n+4}\right)^n =$$
$$= \lim_n \left[\left(1+\frac{1}{-4n-4}\right)^{-4n-4}\right]^{\frac{n}{-4n-4}} = e^{-\frac{1}{4}}$$

la serie diverge.

**2.** Studiare la funzione

$$f(x) = xe^{\frac{3-x}{x-2}}$$

e tracciarne un grafico approssimativo. (E' richiesto lo studio degli asintoti obliqui).

**Soluzione**

Il dominio della funzione é $I\!R \setminus \{2\}$. La funzione passa per l'origine ed é positiva in $]0,2[\cup]2,+\infty[$, mentre é negativa in $]-\infty,0[$.
La funzione non presenta asintoti orizzontali, essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Cerchiamo quindi eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - \frac{1}{e}x] = \frac{1}{e}.$$

L'asintoto obliquo é $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$. La retta $x = 2$ é un asintoto verticale per la funzione essendo

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0.$$

L'espressione della derivata prima é la seguente:

$$f'(x) = e^{\frac{3-x}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima.

$$f'(x) \geq 0 \iff x \leq 1, \quad x \geq 4.$$

Quindi $x = 1$ é un punto di massimo relativo, mentre $x = 4$ é un punto di minimo relativo.

**3.** Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-8} dx.$$

**Soluzione**

perando la sostituzione $\sqrt{x} = t$ l'integrale diventa

$$2\int \frac{t^2+t}{t^3-8} dt = 2\int \frac{t^2+t}{(t-2)(t^2+2t+4)} dt.$$

Utilizzando la decomposizione si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{t-2}dt + \int \frac{t+2}{t^2+2t+4}dt = \\
&= \ln|t-2| + \frac{1}{2}\ln(t^2+2t+4) + \int \frac{1}{t^2+2t+4}dt = \\
&= \ln|t-2| + \frac{1}{2}\ln(t^2+2t+4) + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1/\sqrt{3}}{1+(\frac{t+1}{\sqrt{3}})^2}dt = \\
&= \ln|t-2| + \frac{1}{2}\ln(t^2+2t+4) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{t+1}{\sqrt{3}} + c.
\end{aligned}$$

Ponendo infine $t = \sqrt{x}$ si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-8}dx = \ln|\sqrt{x}-2| + \frac{1}{2}\ln(x+2\sqrt{x}+4) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}} + c.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I**
**Prova del 5.09.2006**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Stabilire il comportamento della successione

$$\left(\frac{e^{1/n} - 1 + 4/n}{\sin 3/n}\right)_n .$$

**Svolgimento**

$$\lim_n a_n = \lim_n \left(\frac{e^{1/n} - 1}{\sin 3/n} + \frac{4/n}{\sin 3/n}\right) =$$
$$= \frac{1}{3} \lim_n \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \cdot \frac{3/n}{\sin 3/n} + \frac{4}{3} \lim_n \frac{3/n}{\sin 3/n} = \frac{5}{3}$$

La successione converge.

**2.** Studiare la funzione

$$f(x) = (x-2)e^{-1/x}$$

e tracciarne un grafico approssimativo. (E' richiesto lo studio degli asintoti obliqui e della derivata seconda).

**Svolgimento**

Il dominio della funzione é $I\!R \setminus \{0\}$. La funzione é positiva in $]2, +\infty[$,é negativa in $]-\infty, 0[\cup]0, 2[$, e si annulla per $x = 2$.
La funzione non presenta asintoti orizzontali, essendo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Cerchiamo quindi eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 := m,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[ -\frac{e^{-1/x} - 1}{-1/x} - 2e^{-1/x} \right] = -3 := q.$$

L'asintoto obliquo é $y = x - 3$. La retta $x = 0$ é un asintoto verticale per la funzione essendo

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

L'espressione della derivata prima é la seguente:

$$f'(x) = e^{-1/x} \cdot \frac{x^2 + x - 2}{x^2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima.

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq -2 \ \vee \ x \geq 1.$$

Quindi $x = -2$ é un punto di massimo relativo, mentre $x = 1$ é un punto di minimo relativo. La funzione cresce in $]-\infty, -2[$ e in $]1, +\infty[$, mentre decresce in $]-2, 0[$ e in $]0, 1[$. L'espressione della derivata seconda é

$$f''(x) = e^{-1/x} \cdot \frac{5x - 2}{x^4}.$$

Studiamo il segno della derivata seconda.

$$f''(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 2/5.$$

La funzione é concava in $]-\infty, 0[$ e in $]0, 2/5[$, mentre é convessa in $]2/5, +\infty[$. Pertanto $x = 2/5$ é un punto flesso.

**3.** Calcolare la funzione integrale della funzione $f : [0, 2] \to I\!R$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x} & , x \in [0, 1] \\ \\ \dfrac{x+1}{3x^2 - 10x + 3} & , x \in ]1, 2] \end{cases}$$

**Svolgimento** La funzione non é continua in $x = 1$; $f$ non ammette primitive, ma é integrabile in $[0, 2]$. L'espressione della funzione integrale é

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t} dt & , x \in [0, 1] \\ \\ \displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x} dx + \int_1^x \frac{t+1}{3t^2 - 10t + 3} & , x \in ]1, 2] \end{cases}$$

Determiniamo una primitiva della funzione $t^2 e^{-t}$. Integrando due volte per parti si ottiene:

$$\int t^2 e^{-t} dt = -t^2 e^{-t} + 2 \int t e^{-t} dt =$$
$$= -t^2 e^{-t} - 2t e^{-t} - 2e^{-t} + c$$

Determiniamo ora una primitiva della funzione $\dfrac{t+1}{3t^2 - 10t + 3}$. Utilizzando la decomposizione si ottiene:

$$\int \frac{t+1}{3t^2 - 10t + 3} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{3t-1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t-3} dt =$$
$$= -\frac{1}{6} \ln |3t - 1| + \frac{1}{2} \ln |t - 3| + c$$

La funzione integrale é quindi

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + 2 & , x \in [0, 1] \\ \\ -\dfrac{5}{e} + 2 - \dfrac{1}{6} \ln(3x - 1) + \dfrac{1}{2} \ln(3 - x) - \dfrac{1}{3} \ln 2 & , x \in ]1, 2] \end{cases}$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I**
**Prova del 26.09.2006**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+3/n)}{\sqrt{1/n}}.$$

**Svolgimento**

La serie é a termini positivi. Applichiamo il criterio degli infinitesimi:

$$\lim_n \frac{\ln(1+3/n)}{\sqrt{1/n}} \cdot n^p = 3 \lim_n \frac{\ln(1+3/n)}{3/n} \cdot n^{p-1/2} = 3$$

se $p = 1/2$. Quindi la serie data diverge.

**2.** Studiare la funzione

$$f(x) = x + \ln \frac{4x-1}{x+2}$$

e tracciarne un grafico approssimativo. (E' richiesto lo studio degli asintoti obliqui e della derivata seconda).

**Svolgimento**

Il dominio della funzione é $D = ]-\infty, -2[\cup]1/4, +\infty[$. La funzione non presenta asintoti orizzontali, essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Cerchiamo quindi eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 := m,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \ln 4 := q.$$

L'asintoto obliquo é $y = x + \ln 4$. Le rette $x = -2$ e $x = 1/4$ sono asintoti verticali per la funzione essendo

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to (1/4)^+} f(x) = -\infty.$$

L'espressione della derivata prima é la seguente:

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 7x + 7}{(4x-1)(x+2)}.$$

Studiamo il segno della derivata prima.

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in D.$$

Quindi la funzione cresce in $]-\infty, -2[$ e in $]1/4, +\infty[$. L'espressione della derivata seconda é

$$f''(x) = \frac{-9(8x+7)}{(4x-1)^2(x+2)^2}.$$

Studiamo il segno della derivata seconda.

$$f''(x) \geq 0 \iff x \leq -7/8.$$

La funzione é convessa in $]-\infty, -2[$ ed é concava in $]1/4, +\infty[$.

**3.** Calcolare la funzione integrale della funzione $f : [-1, 1] \to I\!R$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+5}{4x^2+5x-6} & , x \in [-1, 0] \\ \ln(2x+1) & , x \in ]0, 1] \end{cases}$$

**Svolgimento**

La funzione non é continua in $x = 0$; $f$ non ammette primitive, ma é integrabile in $[-1, 1]$. L'espressione della funzione integrale é

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{t-5}{4t^2+5t-6} dt & , x \in [0,1] \\ \\ \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x-5}{4x^2+5x-6} dx + \int_{0}^{x} \ln(2t+1) dt & , x \in ]1,2] \end{cases}$$

Determiniamo una primitiva della funzione $\dfrac{t+5}{4t^2+5t-6}$. Utilizzando la decomposizione si ottiene:

$$\int \frac{t+5}{4t^2+5t-6} dt = -3/11 \int \frac{dt}{t+2} dt + 23/11 \int \frac{dt}{4t-3} dt =$$
$$= -3/11 \ln|t+2| + 23/44 \ln|4t-3| + c$$

Determiniamo ora una primitiva della funzione $\ln(2t+1)$. Integrando per parti si ottiene:

$$\int \ln(2t+1) dt = t \ln(2t+1) - \int \frac{dt}{2t+1} dt =$$
$$= t \ln(2t+1) - \int dt + \int \frac{dt}{27+1} dt =$$
$$= t \ln(2t+1) - t + 1/2 \ln|2t+1| + c$$

La funzione integrale é quindi

$$F(x) = \begin{cases} -3/11 \ln(x+2) + 23/44 \ln|4x-3| - 23/44 \ln 7 & , x \in [-1, 0] \\ \\ -3/11 \ln 2 + 23/44 \ln 3 - 23/44 \ln 7 + (x + 1/2) \ln(2x+1) - x & , x \in ]0, 1] \end{cases}$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio, Ingegneria Edile-Architettura**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I**
**Prova del 13.12.2006**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n^3+2}\right).$$

**Svolgimento**

La serie é a segni alterni. Studiamo la convergenza assoluta. Per una nota disuguaglianza risulta

$$\log\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n^3+2}\right) \leq \frac{\sqrt{n}}{n^3+2}.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+2}$$

converge; infatti per il criterio degli infinitesimi

$$\lim_n \frac{\sqrt{n}}{n^3+2} \cdot n^p = 1 \Longleftrightarrow p = 5/2.$$

Per il criterio del confronto converge anche la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n^3+2}\right).$$

La serie assegnata converge assolutamente e quindi converge.

**2.** Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2-1|}}{x+2}$$

e tracciarne un grafico approssimativo. (Non é richiesto lo studio della derivata seconda).

**Svolgimento**

Il dominio della funzione é $D = ]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$. La funzione é positiva in $]-2, +\infty[$, é negativa in $]-\infty, -2[$, e si annulla per $x = \pm 1$. La funzione si scrive

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}, & x \in ]-\infty, -2[\cup]-2, -1] \cup [1, +\infty[ \\ \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}, & x \in ]-1, 1[ \end{cases}$$

La funzione presenta i due asintoti orizzontali $y = -1$ e $y = 1$, essendo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

La retta $x = -2$ é un asintoto verticale per la funzione essendo

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty.$$

L'espressione della derivata prima é la seguente:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}}, & x \in ]-\infty, -2[\cup]-2, -1[\cup]1, +\infty[ \\ \\ -\dfrac{2x+1}{(x+2)^2\sqrt{1-x^2}}, & x \in ]-1, 1[ \end{cases}$$

Studiamo la derivabilitá nei punti $x = \pm 1$.

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty.$$

La funzione non é derivabile in tali punti e le rette $x = \pm 1$ sono le tangenti alla funzione nei punti $x = \pm 1$.
Dallo studio del segno della derivata prima si deduce che $f$ decresce in $]-\infty - 2[$, in $]-2, -1[$ e in $]-1/2, 1[$, mentre cresce in $]-1, -1/2[$ e in $]1, +\infty[$. Quindi i punti $x = \pm 1$ sono di minimo relativo, mentre il punto $x = -1/2$ é di massimo relativo.

**3.** Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^{e^2} \frac{\log^3 x - 3}{x(1+\log^2 x)} dx.$$

**Svolgimento**

Determiniamo una primitiva della funzione integranda. Operando la sostituzione $\log x = t$ l'integrale indefinito si scrive

$$\int \frac{t^3 - 3}{t^2 + 1} dt.$$

Eseguendo la divisione tra polinomi si ottiene:

$$\begin{aligned} &\int \frac{t^3-3}{t^2+1} dt = \int t dt - \int \frac{t+3}{t^2+1} dt = \\ &= t^2/2 - 1/2 \int \frac{2t}{t^2+1} dt - 3 \int \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= t^2/2 - 1/2 \log(t^2+1) - 3 \arctan t + c \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} &\int_1^{e^2} \frac{\log^3 x - 3}{x(1+\log^2 x)} dx = [1/2 \log^2 x - 1/2 \log(\log^2 x + 1) - 3 \arctan(\log x)]_1^{e^2} = \\ &= 2 - 1/2 \log 5 - 3 \arctan 2 \end{aligned}$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio, Ingegneria Edile-Architettura**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I**
**Prova del 12.01.2007**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Calcolare il limite della seguente successione

$$(a_n)_n = \left(n \arctan n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right)_n .$$

Stabilire inoltre il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

**Svolgimento**

Determiniamo prima il comportamento della successione.

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{\arctan n}{n} \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 0.$$

Infatti il primo fattore tende a zero, essendo $\lim_n \arctan n = \pi/2$, mentre il secondo fattore tende a 1. La successione converge quindi a zero. Studiamo ora il comportamento della serie, che é a termini positivi. Applicando il criterio degli infinitesimi, si ottiene:

$$\lim_n \arctan n \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \cdot n^p = \pi/2 \Longleftrightarrow p = 1.$$

La serie pertanto converge.

**2.** Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\frac{|x+2|}{x-1}}}{x-3}$$

e tracciarne un grafico approssimativo. (Non é richiesto lo studio della derivata seconda).

**Svolgimento**

Il dominio della funzione é $D = ]-\infty, 1[ \cup ]1, 3[ \cup ]3, +\infty[$. La funzione é positiva in $]3, +\infty[$, é negativa in $]-\infty, 1[ \cup ]1, 3[$. La funzione non ammette intersezioni con l'asse delle ascisse, mentre interseca l'asse delle ordinate nel punto $\left(0, -\frac{1}{3e}\right)$
La funzione si scrive

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{x+2}{x-1}}}{x-3}, & x \in [-2, 1[ \cup ]1, 3] \cup ]3, +\infty[ \\ \dfrac{e^{\frac{-x-2}{x-1}}}{x-3}, & x \in ]-\infty, -2[ \end{cases}$$

La funzione presenta l'asintoto orizzontale $y = 0$ essendo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

La retta $x = 1$ é un asintoto verticale per la funzione essendo

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty.$$

Anche la retta $x = 3$ é un asintoto verticale per la funzione poiché

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0.$$

L'espressione della derivata prima é la seguente:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{x+2}{x-1}} \dfrac{-x^2 - x + 8}{(x-1)^2 (x-3)^2}, & x \in ]-2, 1[ \cup ]1, 3] \cup ]3, +\infty[ \\ \\ e^{\frac{-x-2}{x-1}} \dfrac{-x^2 + 5x - 10}{(x-1)^2 (x-3)^2} & x \in ]-\infty, -2[ \end{cases}$$

Studiamo la derivabilitá nel punto $x = -2$.

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = -8/75,$$

$$\lim_{x\to -2^+} f'(x) = 2/75.$$

La funzione non é derivabile in tale punto.
Dallo studio del segno della derivata prima si deduce che $f$ decresce in $]-\infty-2[$, in $]\frac{\sqrt{33}-1}{2},3[$ e in $]3,+\infty[$, mentre cresce in $]-2,1[$ e in $]1,\frac{\sqrt{33}-1}{2}[$. Quindi il punto $x = 2$ é di minimo relativo, mentre il punto $x = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ é di massimo relativo.

**3.** Determinare il valore del parametro $\alpha$ affinché $f_\alpha : [0, 2] \to I\!R$ definita da:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} (x-\alpha)\arctan x, & x \in [0,1] \\ \\ \dfrac{\sqrt{\log x}}{x}, & x \in ]1,2] \end{cases}$$

ammetta primitive e calcolarle.

**Svolgimento**

Per ammettere primitive la funzione deve essere continua. Risulta

$$\lim_{x\to 1^+} f_\alpha(x) = 0,$$

mentre

$$\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = \frac{\pi}{4}(1-\alpha).$$

Quindi $f_\alpha$ é continua solo se $\alpha = 1$. In tal caso, una primitiva é fornita dalla funzione integrale $F(x)$. La sua espressione é:

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (t-1)\arctan t\; dt, & x \in [0,1] \\ \\ \displaystyle\int_0^1 (t-1)\arctan t\; dt + \int_1^x \frac{\sqrt{\log t}}{t}\; dt, & x \in ]1,2] \end{cases}$$

Determiniamo una primitiva della funzione $(t-1)\arctan t$, usando l'integrazione per parti:

$$\int (t-1)\arctan t\; dt = \frac{t^2-2t}{2}\arctan t - 1/2\int \frac{t^2-2t}{t^2+1}\; dt =$$
$$= \frac{t^2-2t}{2}\arctan t - 1/2\int dt + 1/2\int \frac{1}{t^2+1}\; dt + 1/2\int \frac{2t}{t^2+1}\; dt =$$
$$= \frac{t^2-2t}{2}\arctan t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\log(t^2+1) + c,$$

con $c \in I\!R$. Calcoliamo ora una primitiva della funzione $\dfrac{\sqrt{\log t}}{t}$.

$$\int \frac{\sqrt{\log t}}{t}\; dt = \frac{2}{3}\sqrt{\log^3 t} + C,$$

con $C \in I\!R$. L'espressione della funzione integrale é allora

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\log(x^2+1), & x \in [0,1] \\[2ex] \dfrac{1}{2}\log 2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}\sqrt{\log^3 x}, & x \in ]1,2] \end{cases}$$

La famiglia delle primitive é data da $F(x) + k$, con $k \in I\!R$.

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio, Ingegneria Edile-Architettura**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I**
**Prova del 28.03.2007**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare, al variare di $x \in I\!R$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n \; n}{e^n}$$

**Svolgimento**

La serie é a termini di segno qualunque. Studiamo la serie assoluta, applicando il criterio del rapporto.

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x+2|}{e}.$$

Pertanto la serie converge assolutamente per $-e-2 < x < e-2$. Se $x > e-2$ la serie é a termini positivi ed essendo $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ essa diverge. Se $x = e-2$ la serie si scrive $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n$, che é chiaramente divergente. Se $x = -e-2$ la serie si scrive $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n$, che é una serie a segni alterni non convergente. Infine, se $x < -e-2$ la serie si puó scrivere $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{|x+2|^n}{e^n} n$. Poiché $\lim_n a_n = +\infty$, per il criterio di Leibnitz la serie non converge.

**2.** Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(1 + e^{\frac{\sqrt{x^2+x-6}}{x}}\right)$$

e tracciarne un grafico approssimativo. (Non é richiesto lo studio della derivata seconda). Determinare inoltre l'estremo inferiore e superiore di $f$ e dire se essi sono rispettivamente minimo assoluto e massimo assoluto.

**Svolgimento**

Il dominio della funzione é $D = ]-\infty, -3] \cup [2, +\infty[$. La funzione é strettamente positiva nel suo dominio e non ammette intersezioni con l'asse delle ordinate.
La funzione presenta gli asintoti orizzontali $y = \log(1+e)$ e $y = \log(1+1/e)$ essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \log(1 + 1/e),$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \log(1 + e).$$

L'espressione della derivata prima é la seguente:

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{\sqrt{x^2+x-6}}{x}}}{1 + e^{\frac{\sqrt{x^2+x-6}}{x}}} \cdot \frac{12 - x}{2x^2\sqrt{x^2 + x - 6}}.$$

Studiamo la derivabilitá nei punti $x = -3$ e $x = 2$.

$$\lim_{x\to-3^-} f'(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to2^+} f'(x) = +\infty.$$

La funzione non é derivabile in tali punti.
Dallo studio del segno della derivata prima si deduce che $f$ cresce in $]-\infty - 3[$ e in $]2, 12[$, mentre decresce in $]12, +\infty[$. Quindi il punto $x = 12$ é di massimo relativo.
Risulta infine

$$\max_{x\in D} f(x) = \log(1 + e^{5\frac{\sqrt{6}}{12}}),$$

$$\inf_{x\in D} f(x) = \log(1 + 1/e).$$

**3.** Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sin 2x + 1}\, dx.$$

**Svolgimento**

Determiniamo una primitiva, risolvendo l'integrale indefinito. Operando la sostituzione $\tan x = t$, da cui si ottiene $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $dx = \frac{1}{1+t^2}$, si perviene all'integrale

$$\int \frac{t}{t^2+2t+1}\, dt.$$

Calcoliamo tale integrale.

$$\int \frac{t}{t^2+2t+1}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+1}\, dt - \int \frac{1}{t^2+2t+1}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}\log|t^2+2t+1| + \frac{1}{t+1} + c$$

Quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\sin 2x + 1}\, dx = \left[\frac{1}{2}\log(\tan x + 1)^2 + \frac{1}{\tan x + 1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \log 2 - \frac{1}{2}.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio, Ingegneria Edile-Architettura**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I**
**Prova del 04.07.2007**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Stabilire, al variare di $x \in I\!R$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{nx^3+x/2}.$$

Determinare infine la somma della serie per i valori di $x$ per i quali essa converge.

**Svolgimento**

La serie é a termini positivi e geometrica: infatti puó essere cosí scritta:

$$e^{x/2} \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{x^3})^n$$

la cui ragione é $e^{x^3}$. Pertanto essa converge se $x < 0$, mentre diverge per $x \geq 0$. La somma della serie, per $x < 0$, é data da:

$$e^{x/2} \frac{1}{1-e^{x^3}} - 1 = \frac{e^{x^3+x/2}}{1-e^{x^3}}.$$

**2.** Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{(x-3)\sqrt[3]{x-1}}{x}$$

e tracciarne un grafico approssimativo. (Non é richiesto lo studio della derivata seconda).

**Svolgimento**

Il dominio della funzione é $D = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. La funzione é positiva ne gli intervalli $]0, 1[$ e $]3, +\infty[$ e si annulla per $x = 1$ e $x = 3$.
La funzione non ammette asintoti orizzontali essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

La retta $x = 0$ é un asintoto verticale essendo

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty.$$

L'espressione della derivata prima é la seguente:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x - 9}{3x^2\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

La funzione non é derivabile in $x = 0$; infatti

$$\lim_{x\to0} f'(x) = -\infty.$$

Dallo studio del segno della derivata prima si deduce che $f$ cresce in $]-\infty, -3-3\sqrt{2}[$ e in $]-3+3\sqrt{2}, +\infty[$, mentre decresce in $]-3-3\sqrt{2}, 0[$ e in $]0, -3+3\sqrt{2}[$. Quindi il punto $x = -3-3\sqrt{2}$ é di massimo relativo, mentre il punto $x = -3+3\sqrt{2}$ é di minimo relativo.

**3.** Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x \log(1 + \sin x)dx.$$

**Svolgimento**

Operando la sostituzione $\sin x = t$ si perviene all'integrale

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \log(t+1)\ dt,$$

che puó essere facilmente calcolato per parti:

$$\begin{aligned}
&\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \log(t+1)\ dt = [t\log(t+1)]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} - \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{t}{t+1}\ dt = \\
&= [t\log(t+1) - t + \log(t+1)]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) - \frac{3}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio, Ingegneria Edile-Architettura**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I**
**Prova del 07.09.2007**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare, al variare di $x \in I\!R$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^n (x-1)^{2n}$$

**Soluzione**

La serie é a termini positivi. Applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_n \sqrt[n]{\left( \frac{n+2}{n+1} \right)^n \cdot (x-1)^{2n}} = (x-1)^2.$$

Pertanto la serie converge assolutamente per $-e-2 < x < e-2$. Quindi la serie converge se $0 < x < 2$ e diverge se $x < 0 \vee x > 2$. Se $x = 0 \vee x = 2$ la serie si scrive $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^n$, che é divergente essendo $\lim a_n = e$.

**2.** Studiare la funzione

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x-3}} - 2$$

e tracciarne un grafico approssimativo (non é richiesto lo studio della derivata seconda). Determinare, inoltre, se esistono, il massimo e il minimo assoluti.

**Soluzione**

Il dominio della funzione é $D = [-1, 1] \cup ]3, +\infty[$. La funzione é positiva in $]3, +\infty[$, negativa in $[-1, 1]$; $f$ non ammette intersezioni con l'asse

delle $x$, mentre $f(0) = \sqrt{\frac{1}{3}} - 2$. Inoltre $f(\pm 1) = -2$.
La funzione non presenta asintoti orizzontali essendo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Non vi sono asintoti obliqui essendo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

La retta $x = 3$ é asintoto verticale poiché

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty.$$

L'espressione della derivata prima é la seguente:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 1}{2(x-3)^2 \sqrt{\frac{x^2-1}{x-3}}}.$$

Studiamo la derivabilitá nei punti $x = -1$ e $x = 1$.

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = +\infty.$$

La funzione non é derivabile in tali punti.
Dallo studio del segno della derivata prima si deduce che $f$ cresce in $]-1, 3-2\sqrt{2}[$ e in $]3+2\sqrt{2}, +\infty[$, mentre decresce in $]3-2\sqrt{2}, 1[$ e in $]2, 3+2\sqrt{2}[$. Quindi il punto $x = 3 - 2\sqrt{2}$ é di massimo relativo, mentre il punto $x = 3 + 2\sqrt{2}$ é di minimo relativo.

**3.** Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin x}\, dx.$$

**Soluzione**

Operando la sostituzione $\tan\frac{x}{2} = t$, da cui si ottiene $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $dx = \dfrac{2}{1+t^2}$, si perviene all'integrale

$$2\int_0^1 (t+1)^{-2}\,dt = -2\left[\frac{1}{t+1}\right]_0^1 = 1.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio, Ingegneria Edile - Architettura**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I**
**Prova del 28.09.2007**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{ne^{n+1}}\right).$$

**2.** Stabilire il segno e il numero delle soluzioni dell'equazione

$$\log\frac{x-3}{x-2}=4-x.$$

**3.** Determinare il valore di $\alpha \in I\!R$ affinché la funzione $f_\alpha : [-\pi/2, 1/2] \to I\!R$ definita da

$$f_\alpha(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{e^x}+\alpha, & x\in[-\pi/2,0] \\[2ex] \dfrac{x-3}{x^2-1}, & x\in]0,1/2] \end{cases}$$

ammetta primitive e calcolarle.

**Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica I**
**c.l. Ambiente e Territorio, Ingegneria Edile-Architettura**
**Appello del 28. 09. 2007**

**Soluzione del primo esercizio.**
La serie é a termini positivi. Applichiamo il criterio degli infinitesimi.

$$\lim_n a_n \cdot n^p = \lim_n \frac{1-\cos\frac{1}{ne^{n+1}}}{\frac{1}{n^2e^{2n+2}}} \cdot \frac{n^{p-1}}{e^{2n+2}} = 0 \quad \forall p > 1.$$

Pertanto la serie converge.

**Soluzione del secondo esercizio**
Poniamo $f(x) = \log\frac{x-3}{x-2}$ e $g(x) = 4-x$. Cerchiamo le intersezioni tra i grafici delle due funzioni. La funzione $g$ é una retta passante per i punti $(0,4)$ e $(4,0)$. Studiamo ora la funzione $f$. Il suo dominio é $D = ]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$. La funzione é positiva in $]-\infty, 2[$ ed é negativa in $]3, +\infty[$. L'asse delle $x$ é un asintoto orizzontale, essendo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, mentre le rette $x = 2$ e $x = 3$ sono asintoti verticali, essendo $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$. L'espressione della derivata prima é la seguente:

$$f'(x) = \frac{1}{(x-3)(x-2)}.$$

La funzione cresce in $]-\infty, 2[$ e in $]3, +\infty[$.
Dalla lettura del grafico si deduce che l'equazione ammette due soluzioni entrambe positive.

**Soluzione del terzo esercizio**
La funzione é continua in $x = 0$ solo se $\alpha = 3$.
Sia $x \in [-\pi/2, 0]$. Utilizzando due volte l'integrazione per parti si ottiene

$$F(x) = \int_{-\pi/2}^{x} (e^{-t}\sin t + 3)dt = 3x + \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}e^{\pi/2}.$$

Sia ora $x \in ]0, 1/2]$. Utilizzando la decomposizione si ottiene

$$F(x) = \int_{-\pi/2}^{0} (e^{-t}\sin t + 3)dt + \int_0^x \frac{t-3}{t^2-1}dt =$$

$$= \frac{1}{2}(3\pi - 1 - e^{-\pi/2}) + \frac{1}{2}\log(1 - x^2) + \frac{3}{2}\log\frac{x + 1}{1 - x}.$$

**UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA**
**Facoltá di Ingegneria - C.L. Ambiente e Territorio, Ingegneria Edile-Architettura**
**Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I**
**Prova del 12.12.2007**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

**1.** Studiare il comportamento delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(2 - \cos \frac{3}{n}),$$

precisando, preliminarmente, il segno del termine generale.

**2.** Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^3},$$

precisando in particolare l'insieme dei punti ove $f$ è derivabile, i punti di massimo e minimo relativo, di flesso, gli intervalli di crescenza o decrescenza. Tracciare poi un grafico approssimativo. (Non é richiesto lo studio della derivata seconda).

**3.** Determinare l'insieme delle primitive della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - \log^2 x}},$$

nell'intervallo $[1/2, 2]$. Determinare infine laprimitiva che assume il valore 1 nel punto $x_0 = 1$.

**Soluzioni della prova scritta di Analisi Matematica I**
**c.l. Ambiente e Territorio, Ingegneria Edile-Architettura**
**Appello del 12. 12. 2007**

**Soluzione del primo esercizio.**
La serie è a termini positivi. Usando alcuni limiti notevoli e il criterio degli infinitesimi con $p = 2$, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \log(2-\cos(3/n)) = \lim_{n\to+\infty} n^2 \log(1+(1-\cos(3/n)))$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{\log(1+(1-\cos(3/n)))}{(1-\cos(3/n))}(1-\cos(3/n))$$
$$= \frac{9}{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(3/n)}{(3/n)^2} = 9/2.$$

Pertanto la serie converge.

**Soluzione del secondo esercizio**
La funzione può essere scritta

$$f(x) = |x|\sqrt{1-x}$$

da cui si vede subito che il dominio è dato dall'insieme $D = ]-\infty, 1]$. La funzione è non negativa e si annulla nei punti $x = 0$ e $x = 1$. Pertanto tali punti sono punti di minimo assoluto. Inoltre, per la continuità a sinistra di $f$ nel punto $x = 1$, si ha subito $\lim_{x\to1^-} f(x) = 0$. Non ci sono quindi asintoti verticali. Essendo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{1-x} = -\infty,$$

non ci sono neanche asintoti orizzontali. Infine

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-x} = -\infty,$$

e quindi non ci sono neppure asintoti obliqui. La $f$ interseca l'asse delle $y$ nell'origine e l'asse delle $x$ ancora nell'origine e nel punto $x = 1$.

Calcoliamo ora la derivata prima. Intanto osserviamo che

$$f(x) = \begin{cases} -x\sqrt{1-x}, & x \le 0 \\ x\sqrt{1-x}, & x > 0 \end{cases}$$

Controlliamo subito la derivabilità in $x = 0$ e la derivabilità sinistra in $x = 1$. Per $x = 0$ si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{1-x} = -1,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1-x} = 1,$$

e quindi la $f$ non è derivabile in $x = 0$. Per $x = 1$ si ha

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x\sqrt{1-x}}{x-1} = -\infty,$$

e quindi $f$ non è derivabile in $x = 1$ e la semiretta tangente a sinistra nel punto $x = 1$ è parallela all'asse $y$.

Calcoliamo ora la derivata negli altri punti, Se $x < 0$, si ha:

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}} = -\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}},$$

da cui si ricava facilmente che risulta $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$, e pertanto la $f$ è decrescente per $x < 0$. Se invece $0 < x < 1$ allora risulta

$$f'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}},$$

e tale derivata si annulla in $x = 2/3$, è positiva se $0 < x < 2/3$ ed è negativa per $2/3 < x < 1$. Dunque $f$ è cresente per $0 < x < 2/3$ ed è decrescente per $2/3 < x < 1$. Il punto $x = 2/3$ è quindi un massimo relativo. Si ha $f(2/3) = 2\sqrt{3}/9$. Infine, per lo studente volenteroso: è facile rendersi conto che la $f$ è convessa per $x < 0$ e concava per $x \in [0, 1]$.

**Soluzione del terzo esercizio**

La funzione è continua nell'intervallo $[1/2, 1]$ quindi ammette primitive in tale intervallo. Posto $\log x = t$ si ha subito:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin t + c = \arcsin(\log x) + c, \quad x \in [1/2, 2].$$

Siccome per $x = 1$ otteniamo $\arcsin(\log 1) + c = c$ dovrà essere $c = 1$. La primitiva richiesta è data allora dalla

$$P(x) = \arcsin(\log x) + 1.$$