UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 28.06.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare il volume del solido costituito dalla parte di cilindro $x^2+y^2 = 1$ interna alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

2. Determinare i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y - 2.$$

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + 5xy' + 3y = x^3\sqrt{x} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento

1. Il solido é dato dall'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : x^2+y^2 \leq 1, \, -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}.$$

Posto $C = \{(x,y) \in I\!R^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, per simmetria si ha

$$Vol(D) = 2\iint_C \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho$$

$$-2\pi \int_0^1 \sqrt{4-\rho^2}d(4-\rho^2) = -2\pi\left[\frac{2}{3}(4-\rho^2)^{3/2}\right]_0^1 = 2\pi\frac{16-6\sqrt{3}}{3}.$$

2. La funzione é di classe C^2 in tutto il piano e il gradiente é dato da:

$$\nabla f(x,y) = (2x-6y+3, \, 3y^2-6x+6) \quad (x,y) \in I\!R^2,$$

e risulta $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e solo se $(x,y) = P_i$, $i = 1,2$, dove

$$P_1 = (\frac{27}{2}, 5), \quad P_2 = (\frac{3}{2}, 1).$$

Valutando la matrice hessiana H, si ha facilmente $H(P_1) = 24 > 0$ e $f_{xx}(P_1) = 2 > 0$, da cui segue che P_1 é un punto di minimo relativo. Invece $H(P_2) = -24 < 0$ pertanto P_2 é un punto di sella. Non vi sono quindi punti di massimo relativo.

3. Possiamo supporre $x > 0$. L'equazione é del tipo di Eulero. Utilizzando la solita sostituzione $x = e^z$ si perviene alle soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata:

$$u_1(x) = \frac{1}{x^3}, \, u_2(x) = \frac{1}{x},$$

pertanto l'integrale dell'equazione omogenea associata é:

$$y(x) = \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x}, \quad x > 0.$$

Per determinare ora una soluzione particolare $y_0(x)$ dell'equazione completa, utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Il determinante $detW(x)$ della matrice Wronskiana delle soluzioni u_1, u_2, é dato da $2/x^5$. La soluzione particolare sará del tipo $y_0(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x)$, dove:

$$v_1(x) = -\int \sqrt{x}\frac{x^5}{2}dx = -\frac{x^{13/2}}{13},$$

$$v_2(x) = \frac{1}{2}\int \sqrt{x}x^3 dx = \frac{1}{9}x^{9/2}.$$

Quindi otteniamo:

$$y_0(x) = \frac{4}{117}x^{7/2}.$$

L'integrale generale dell'equazione completa é dato dalla:

$$Y(x) = \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x} + \frac{4}{117}x^{7/2}.$$

Per trovare ora l'unica soluzione del problema che soddisfa i dati iniziali,