UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 28.06.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}$$
specificando: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio della derivata prima, massimi e minimi e disegnando infine il grafico. (Lo studio della derivata seconda é facoltativo). Esistono massimi e/o minimi assoluti?

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, discutere la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(f\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right)^4.$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare le primitive della funzione $g(x) = (f(x))^3$ sull'intervallo $[0, +\infty[$. Determinare poi la primitiva che si annulla nel punto 0.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é l'insieme $D = I\!R \setminus \{-2\}$. Per il segno, si ha che $f(x) > 0$ se e solo se $x > -1$ o $x < -2$ mentre $f(x) < 0$ se e solo se $-2 < x < -1$. Inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $x = -1$ e $f(0) = 1/\sqrt[3]{2}$.

Per quanto riguarda gli asintoti:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty,$$

e quindi la retta $x = -2$ é un asintoto verticale. Inoltre:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1,$$

e quindi la retta $y = 1$ é un asintoto orizzontale. Non vi sono altri asintoti.

Valutiamo ora la derivata prima. Si ha, per $x \in D$, $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2}\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^{2/3}}\frac{1}{(x+2)^{4/3}}.$$

Nel punto $x = -1$ la derivata non esiste e risulta

$$\lim_{x\to -1^\pm} f'(x) = +\infty,$$

pertanto la retta $x = -1$ é tangente al grafico di f nel punto $x = -1$.

Risulta $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D \setminus \{-1\}$, pertanto la funzione f é crescente negli intervalli $]-\infty, -2[$, $]-2, -1]$ e $[-1, +\infty[$. Non ci sono quindi punti di massimo o minino relativo. La funzione non é limitata né superiormente né inferiormente, quindi non esistono gli estremi assoluti.

Per la derivata seconda, dopo un po' di calcoli si ottiene ($x \neq -2, x \neq -1$)

$$f''(x) = -\frac{2}{9}\frac{3x+4}{(x+1)^{5/3}(x+2)^{7/3}}.$$

Se $x > -1$ la derivata seconda é negativa e la funzione é quindi concava, mentre per $x < -2$ la funzione é convessa. Nell'intervallo $]-2, -1[$ la derivata seconda si annulla nel punto $x = -4/3$, e risulta negativa se $x \in]-2, -4/3[$ mentre é positiva se $x \in]-4/3, -1[$. Dunque la f é concava in $]-2, -4/3]$ ed é convessa in $[-4/3, -1]$. Dunque il punto $x = -4/3$ é un flesso. Il grafico puó ora essere tracciato.

2. La serie da studiare é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{4/3}},$$

che é una serie a termini positivi. Per il criterio degli infinitesimi con $p = 4/3 > 1$ si ha che la serie é convergente.

3. Occorre determinare l'integrale indefinito per $x \geq 0$ della funzione $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$. Si ha:

$$\int \frac{x+1}{x+2} dx = \int dx - \int \frac{1}{x+2} dx = x - \log(x+2) + c.$$

Per trovare la primitiva che si annulla in $x = 0$ é sufficiente porre $c = \log 2$.