UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
del 26.01.2017

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$y'' + \pi y = 1$$

con $y(0) = \frac{1}{\pi},\ y'(0) = 1.$

2. Data la forma differenziale lineare

$$\omega = (\sin(x+y) + x\cos(x+y))dx + x\cos(x+y)dy$$

studiarne l'esattezza nel suo insieme di definizione ed in caso affermativo determinarne le primitive.

3. Utilizzando la teoria degli integrali doppi, determinare il baricentro del triangolo di vertici $(0,0),\ (1,0),\ (\frac{1}{2},1)$.

Svolgimento

1. Si tratta di un'equazione differenziale a coefficienti costanti non omogenea. Consideriamo l'equazione omogenea associata $y'' + \pi y = 0$ che ha come equazione caratteristica $\lambda^2 + \pi = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda = \pm\sqrt{\pi}i$. Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea é dato da

$$C_1 \cos\sqrt{\pi}x + C_2 \sin\sqrt{\pi}x.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare. Essendo il termine noto un polinomio di grado zero, si cercano soluzioni del tipo $y = A$ con A costante. Sostituendo si ottiene

$$\pi A = 1 \leftrightarrow A = \frac{1}{\pi}.$$

Quindi l'integrale generale risulta essere

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\pi}x + C_2 \sin\sqrt{\pi}x + \frac{1}{\pi}.$$

Determiniamo ora le costanti C_1, C_2. Si ha

$$y(0) = C_1 + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \leftrightarrow C_1 = 0.$$

Inoltre $y'(x) = \sqrt{\pi}C_2 \cos\sqrt{\pi}x$ e quindi

$$y'(0) = \sqrt{\pi}C_2 = 1 \leftrightarrow C_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

La soluzione richiesta é quindi data dalla:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\sqrt{\pi}x + \frac{1}{\pi}.$$

2. La forma differenziale lineare é definita su tutto $\mathbb{R}^2$ che é un insieme convesso. Inoltre si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \cos(x+y) - x\sin(x+y) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y)$$

quindi ω é chiusa ed esatta. Determiniamo ora le primitive F. Poiché $\frac{\partial F}{\partial x} = \sin(x+y) + x\cos(x+y)$ si ha

$$\begin{aligned} & F(x,y) = \int (\sin(x+y) + x\cos(x+y))dx + g(y) \\ = & -\cos(x+y) + \int x\sin(x+y)dx + g(y) \\ = & -\cos(x+y) + x\sin(x+y) - \int \sin(x+y)dx + g(y) = x\sin(x+y) + g(y). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x\cos(x+y) + g'(y) = x\cos(x+y) \leftrightarrow g(y) = K$$

quindi

$$F(x,y) = x\sin(x+y) + K.$$

3. Il triangolo T si puó esprimere come

$$T = \{0 \le y \le 1, \quad \frac{y}{2} \le x \le -\frac{y}{2} + 1\}.$$

L'area del triangolo é data da Area $= \frac{1}{2}$. Quindi le componenti (x_B, y_B) del baricentro sono date da

$$\begin{aligned} & x_B = 2\iint_T x dx dy = 2\int_0^1 dy \int_{y/2}^{-y/2+1} x dx = 2\int_0^1 dy \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y/2}^{-y/2+1} \\ = & \int_0^1 (1-y)dy = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

come era logico aspettarsi. Inoltre

$$\begin{aligned} & y_B = 2\iint_T y dx dy = 2\int_0^1 y dy \int_{y/2}^{-y/2+1} dx = 2\int_0^1 y(-\frac{y}{2} + 1 - \frac{y}{2})dy \\ = & 2\int_0^1 y(1-y)dy = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$