UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
del 26.01.2017

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right)$$
determinandone il dominio, il segno, le intersezioni con gli assi, gli eventuali asintoti, crescenza, decrescenza, massimi, minimi relativi e tracciare infine un grafico (lo studio della derivata seconda é facoltativo, il grafico puó essere tracciato in modo sufficientemente preciso).

2. Studiare convergenza semplice ed assoluta della serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3} \log f\left(\frac{1}{n}\right)$$
dove f é la funzione dell'esercizio 1.

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare la famiglia delle primitive della funzione
$$g(x) = (x+1)\log f(x),$$
per $x > 3$. Trovare poi la primitiva che si annulla per $x = 4$.

Svolgimento

1. Studio della funzione.

(a) Il dominio della funzione é l'insieme $D = I\!R \setminus \{0, 3\}$.

(b) Si ha $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$, pertanto non ci sono intersezioni con l'asse delle x e siccome la f non é definita in 0, non c'é nemmeno l'intersezione con l'asse delle y.

(c) Asintoti. Osserviamo intanto che $x^2 - 3x > 0$ se e solo se $x < 0$ e $x > 3$ mentre é negativo se $0 < x < 3$. Questo implica che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 0.$$

Quindi le rette $x = 0$ e $x = 3$ sono asintoti verticali. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$

e quindi la retta $y = 1$ é un asintoto orizzontale.

(d) La derivata prima, che esiste in tutti i punti di D, é data dalla

$$f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right) \frac{3 - 2x}{(x^2 - 3x)^2}, \quad x \in D.$$

Ora, $f'(x) > 0$ se e solo se $3 - 2x > 0$ cioé se $x < 3/2$, $x \neq 0$. Questo implica che f é crescente in $]-\infty, 0[$ e in $]0, 3/2]$, mentre é decrescente se $x \in [3/2, 3[$ e in $]3, +\infty[$. Dunque, $x = 3/2$ é un punto di massimo relativo con $f(3/2) = e^{-4/9} < 1$. Per poter tracciare il grafico in modo piú accurato, determiniamo i limiti della derivata a sinistra nel punto 3 e a destra nel punto 0. Tenendo conto delle proprietá della funzione esponenziale, si vede subito che tali limiti sono nulli, cioé

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \to 3^-} f'(x) = 0$$

e quindi il grafico "esce" da questi punti con tangente l'asse delle x.

Il grafico ora puó essere tracciato in modo sufficientemente preciso. In particolare si puó dedurre che la funzione é convessa per $x < 0$ e $x > 3$ mentre possiede due flessi nell'intervallo $]0, 3[$.

La derivata seconda, che esiste in tutti i punti di D é data dalla:

$$f''(x) = \frac{6x^4 - 36x^3 + 76x^2 - 66x + 9}{(x^2 - 3x)^4} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right), \quad x \in D.$$

Trovare gli zeri di f'' non é semplice ma, come giá detto, lo studio della derivata prima é sufficiente a tracciare il grafico.

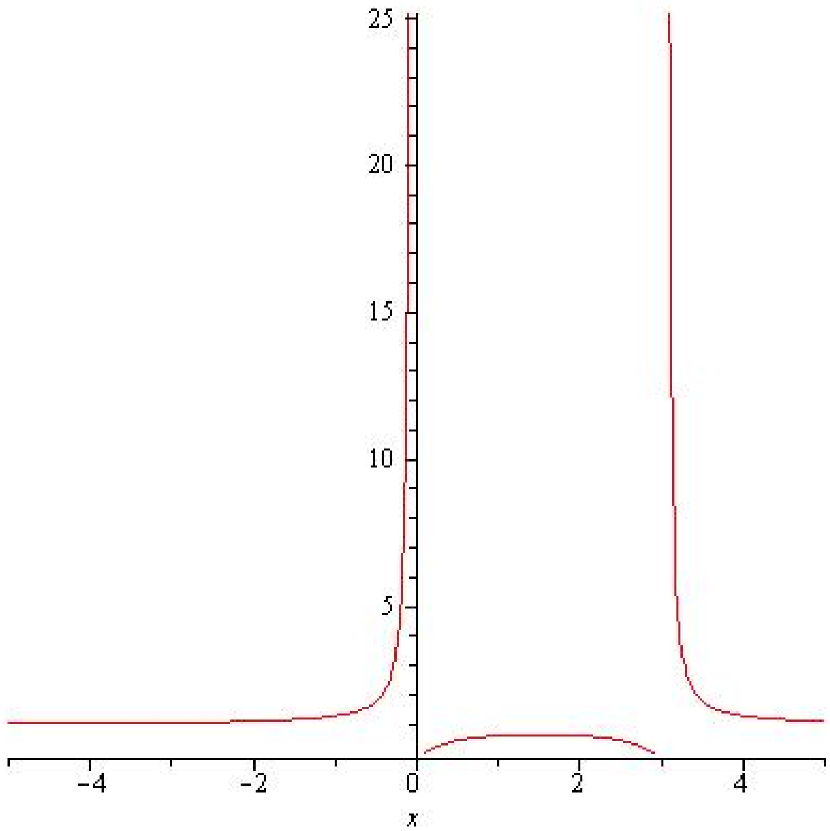

Figure 1: il grafico della funzione f.

2. Comportamento della serie.

La serie da studiare é:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(1-3n)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(3n-1)}.$$

La serie assoluta é data dalla

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3n-1)}$$

che é convergente per il criterio degli infinitesimi (con $p = 2$). La serie é allora assolutamente convergente e quindi anche convergente.

3. L'integrale da calcolare é il seguente

$$I = \int \frac{x+1}{x(x-3)}dx.$$

Si ha, per $x > 3$:

$$I = \int \frac{1}{x-3}dx + \int \frac{1}{x(x-3)}dx = \log(x-3) + \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \frac{4}{3}\log(x-3) - \frac{1}{3}\log x + c.$$

La primitiva richiesta si ottiene con $c = \frac{\log 4}{3}$.