UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
del 25.02.2016

Cognome ______________________________ **Nome** ______________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**____________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Provare che tutte le soluzioni y dell'equazione differenziale

$$x^2y' + 2xy = 1, \quad x > 0$$

sono tali che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$. Determinare inoltre la soluzione che verifica $y(1) = 1$.

2. Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

lungo la curva costituita dall'arco di equazione $(\cos t, \sin t)$ con $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{3\pi}{4}$ e dal segmento $(t, \frac{\sqrt{2}}{2})$ con $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D x^2 e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

dove D é la boccia di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

Svolgimento

1. Dividendo per $x^2 > 0$ si ha

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

che é un' equazione lineare del primo ordine. La soluzione é allora data da

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[\int \frac{1}{x^2}e^{\int \frac{2}{x}dx}dx + C\right] = \frac{1}{x^2}[x + C] = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}.$$

Ovviamente il limite a $+\infty$ viene sempre zero. Infine

$$y(1) = 1 = 1 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

2. La forma differenziale lineare é chiusa che nell'insieme convesso $y > 0$ e quindi é ivi esatta. Siccome la curva é tuta immersa in tale sempiano, l'integrale risulta ovviamente nullo.

3. Passando a coordinate polari $x = \varrho \cos t,\ y = \varrho \sin t$ si ha che

$$\iint_D x^2 e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{D'} \varrho^2 \cos^2 t e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho dt$$

dove D' definito da $t \in [0, 2\pi]$ e $\varrho \in [0, 1]$. Quindi

$$\iint_D x^2 e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \int_0^1 \varrho^3 e^{-\varrho^2} d\varrho = \pi \int_0^1 \varrho^3 e^{-\varrho^2} d\varrho$$

$$= \quad -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \varrho^2(-2\varrho)e^{-\varrho^2} d\varrho = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \varrho^2 (e^{-\varrho^2})' d\varrho = \frac{\pi(e-2)}{2e}.$$