UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
del 25.02.2016

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\log|1+x|}{(1+x)^2}$$

determinando dominio, segno, asintoti, intersezioni con gli assi, massimi e minimi, flessi e disegnando alla fine il grafico.

2. Studiare il comportamento della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n}.$$

3. Calcolare l'area della parte del piano definita da $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq f(x)$ dove $f(x) = \log\sqrt[3]{1+x^2}$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é $x \neq -1$, $f(0) = 0$, $f(x) = 0 \leftrightarrow x = 0, x = -2$ mentre il segno é dato da

$$|x+1| > 1 \leftrightarrow x < -2 \ \text{ oppure } \ x > 0.$$

Per quanto riguarda gli asintoti si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

e quindi $y = 0$ é asintoto orizzontale, mentre

$$\lim_{x \to -1^\pm} f(x) = -\infty$$

e quindi $x = -1$ é asintoto verticale. Studiamo la derivata prima. Per $x > -1$ si ha

$$f'(x) = \frac{1 - 2\log(1+x)}{(1+x)^3}$$

mentre per $x < -1$ si ha

$$f'(x) = \frac{1 - 2\log(-1-x)}{(1+x)^3}.$$

Quindi $f(x) = 0 \leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{e}$ inoltre riguardo al segno si ha per $x > -1$

$$f'(x) > 0 \leftrightarrow -1 \leq x \leq \sqrt{e} - 1$$

mentre per $x < -1$

$$f'(x) > 0 \leftrightarrow -\infty \leq x \leq -1 - \sqrt{e}.$$

I punti $x = -1 \pm \sqrt{e}$ sono punti di massimo. Studiamo infine la derivata seconda. Si ha per $x > -1$

$$f''(x) = \frac{-5 + 6\log(1+x)}{(1+x)^4}$$

mentre per $x < -1$

$$f''(x) = \frac{-5 + 6\log(-1-x)}{(1+x)^4}.$$

Quindi $f''(x) = 0 \leftrightarrow x = -1 \pm e^{5/6}$ che sono punti di flesso perché $f''(x) > 0 \leftrightarrow x > e^{5/6} - 1, \quad x < -1 - e^{5/6}$.

2. Si ha

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{n(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$$

che é convergente applicando il criterio degli infinitesimi con $p = 3/2$.

3. Le primitive sono date da

$$\begin{aligned}
& \int \log \sqrt[3]{1+x^2}dx = \frac{1}{3}\int \log(1+x^2)dx = \frac{1}{3}\int (x)' \log(1+x^2)dx \\
= \; & \frac{1}{3}\Big[x\log(1+x^2) - \int x\frac{2x}{1+x^2}dx\Big] = \frac{1}{3}\Big[x\log(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx\Big] \\
= \; & \frac{1}{3}x\log(1+x^2) - \frac{2}{3}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{1}{3}x\log(1+x^2) - \frac{2}{3}\int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx \\
= \; & \frac{1}{3}x\log(1+x^2) - \frac{2}{3}(x - \arctan x) + C.
\end{aligned}$$

Quindi l'area é data da

$$Area = \Big[\frac{1}{3}x\log(1+x^2) - \frac{2}{3}(x - \arctan x)\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\pi\log(1+\pi^2) - \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\arctan \pi.$$