UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 23.11.2017

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare massimi e minimi relativi della seguente funzione

$$f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1).$$

2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + y = 0, \\ \\ y(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}) = 0, \quad y'(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}) = 1. \end{cases}$$

3. Calcolare l'area della regione delimitata dalla curva

$$\gamma(t) = (\cos t(1+\sin t), 1+\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Svolgimento

1. La funzione é continua e derivabile in tutto il piano. Quindi gli eventuali punti di massimo e di minimo si devono ricercare tra le soluzioni del gradiente uguagliato a zero. Si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2 - 1 + 2x(x-y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 - y^2 + 1 + 2y(x-y). \end{cases}$$

Consideriamo quindi il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - 2x(x-y) \\ x^2 + y^2 = 1 + 2y(x-y). \end{cases}$$

Si ottiene $1 - 2x(x-y) = 1 + 2y(x-y) \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = \pm x$. Sostituendo nella prima equazione $y = x$ si ha

$$2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1/2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Quindi i punti soluzione sono

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Sostituendo nella prima equazione $y = -x$ si ha

$$6x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1/6 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Quindi i punti soluzione sono

$$(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}).$$

Valutiamo l'Hessiano, si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y - 2x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x - 6y$$

Quindi poiché $H(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = H(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -8 < 0$ i due punti sono punti sella. Infine poiché $H(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = H(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = 64/\sqrt{6} > 0$ con $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = 8/\sqrt{6} > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = -8/\sqrt{6} < 0$ possiamo concludere che questi punti sono rispettivamente minimo e massimo relativi.

2. Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica é data da

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

L'integrale generale é allora

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}).$$

Determiniamo le costanti. Dalla condizione $y(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}) = 0$ si ha $-C_1 e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} = 0$ quindi $C_1 = 0$. Inoltre da $y = C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})$ si ha

$$y' = -\frac{C_2}{2} e^{-x/2} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} x) + \frac{\sqrt{3}C_2}{2} e^{-x/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} x)$$

quindi

$$y'(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}) = 1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} C_2 e^{-\pi/\sqrt{3}} = 1. \Leftrightarrow C_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\pi/\sqrt{3}}$$

Quindi la soluzione particolare é

$$y = -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\pi/\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}).$$

3. Come conseguenza delle formule di Green si ha che l'area é data da

$$\begin{aligned} Area &= \int_\gamma x dy = \int_0^{2\pi} \cos t (1 + \sin t) \cos t dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \cos^2 t \sin t) dt \\ &= \left[\frac{\sin t \cos t + t}{2}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos^2 t (-\sin t) dt \\ &= \pi - \int_0^{2\pi} \cos^2 t d \cos t = \pi - \left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned}$$