UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
del 23.06.2016

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$y''(x) + 4y(x) = \frac{1}{\cos^2(2x) + 1}$$

con $y(0) = 1$.

2. Calcolare l'area della regione del primo quadrante delimitata dalle rette $y = x$, $\quad y = \sqrt{3}x$ e dall'ellisse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \log(xy)\,dxdy$$

dove $D = \{(x, y) \in I\!R^2 \ : \ x^2 \leq y \leq 2, \ x \geq \frac{1}{2}\}$

Svolgimento

1. Si tratta di un'equazione differenziale a coefficienti costanti non omogenea. Consideriamo l'equazione omogenea associata $y'' + 4y = 0$ che ha come equazione caratteristica $\lambda^2 + 4 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda = \pm 2i$. Quindi l'insieme delle soluzioni é dato da

$$C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Determiniamo ora una soluzione particolare. La matrice Wronskiana ha come determinante 2. Dalle formule si ha

$$v_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{(\cos(2x))'}{\cos^2(2x)+1}dx$$

quindi ponendo $\cos(2x) = t$ si ha

$$v_1 = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\arctan t = \frac{1}{4}\arctan(\cos(2x))$$

e

$$v_2 = \frac{1}{2}\int \frac{\cos(2x)}{\cos^2(2x)+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{(\sin(2x))'}{2-\sin^2(2x)}dx$$

quindi ponendo $\sin(2x) = t$ si ha

$$v_2 = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{2-t^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(\sqrt{2}-t)(\sqrt{2}+t)} = \frac{1}{4}\frac{1}{2\sqrt{2}}\int (\frac{1}{\sqrt{2}-t} + \frac{1}{\sqrt{2}+t})dt$$
$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}(-\log|\sqrt{2}-t| + \log|\sqrt{2}+t|) = \frac{1}{8\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right| = \frac{1}{8\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}+\sin(2x)}{\sqrt{2}-\sin(2x)}\right|.$$

Quindi l'integrale particolare risulta

$$y = \frac{\cos 2x}{4}\arctan(\cos 2x) + \frac{\sin 2x}{8\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right|.$$

2. Utilizziamo la formula dell'area conseguenza delle formule di Green. Iniziamo con il determinare le intersezioni tra le due rette e l'ellisse. Risultano nel primo quadrante i due punti $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ e $(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}})$. Poniamo

$a = \frac{2}{\sqrt{13}}$ e $b = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e successivamente $A = \arcsin a$ e $B = \arcsin b$. La frontiera del dominio D risulta costituita da tre curve, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$: γ_1 é il segmento sulla bisettrice $y = x$ γ_2 é la curva sull'ellisse mentre γ_3 é il segmento sulla retta $y = \sqrt{3}x$. Usando la formula per l'area

$$|D| = -\int_{+FrD} y dx,$$

si ha:

$$|D| = -\left[\int_0^b t dt - \int_a^b \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} dt - \sqrt{3}\int_0^a t dt\right].$$

Posto nel secondo integrale entro le parentesi quadre $t/2 = \sin u$ si ottiene il risultato

$$|D| = B - A + \frac{1}{2}[\sin(2B) - \sin(2A)] + \frac{2\sqrt{3}}{13} - \frac{2}{5}.$$

3. Si ha, dal teorema di riduzione, che

$$\iint_D \log(xy) dx dy = \int_{1/2}^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2} \log(xy) dx dy = \int_{1/2}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{2} (y)' \log(xy) dy.$$

Poiché

$$\int_{x^2}^{2} (y)' \log(xy) dy = [y \log(xy)]_{x^2}^{2} - \int_{x^2}^{2} \frac{yx}{xy} dy = 2\log(2x) - x^2 \log(x^3) - 2 + x^2$$

l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
&\iint_D \log(xy) dx dy = \int_{1/2}^{\sqrt{2}} [2\log(2x) - x^2 \log(x^3) - 2 + x^2] dx \\
= \ & \Big[2x \log(2x)\Big]_{1/2}^{\sqrt{2}} - \int_{1/2}^{\sqrt{2}} 2 dx - \Big[\frac{x^3}{3} \log(x^3)\Big]_{1/2}^{\sqrt{2}} + \int_{1/2}^{\sqrt{2}} x^2 dx + \Big[-2x + \frac{x^3}{3}\Big]_{1/2}^{\sqrt{2}} \\
= \ & 2\sqrt{2}\log(2\sqrt{2}) - 2(\sqrt{2} - \frac{1}{2}) - \frac{(\sqrt{2})^3}{3} \log(\sqrt{2})^3 + \frac{1}{24} \log(\frac{1}{2})^3 + [\frac{x^3}{3}]_{1/2}^{\sqrt{2}} \\
- \ & 2\sqrt{2} + \frac{(\sqrt{2})^3}{3} + 1 - \frac{1}{24} \\
= \ & 2\sqrt{2}\log(2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2})^3 \log(\sqrt{2}) + \frac{1}{8} \log\frac{1}{2} + \frac{(\sqrt{2})^3}{3} - \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$