UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 22.11.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 - \log(x^2 - 1)$$

specificando: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio delle derivate prima e seconda, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico. Esistono massimi e/o minimi assoluti?

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{f(n)}$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare tutte le primitive della funzione f per $x > 1$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é l'insieme $D = \{x \in I\!R : |x| > 1\}$, La funzione é sempre strettamente positiva perché, come é noto, $\log(x-1) < x$ per ogni $x > 1$. Non esistono quindi intersezioni con gli assi. La funzione é pari, quindi puó essere studiata soltanto per $x > 1$. Si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Infatti, per esempio,

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - \log(x^2-1)) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{\log(x^2-1)}{x^2}\right) = +\infty.$$

Dunque la retta $x = 1$ é un asintoto verticale, mentre non esiste l'asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Essendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

non esiste nemmeno l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Simmetricamente, la retta $x = -1$ é anche un asintoto verticale ed inoltre non esistono asintoti per $x \to -\infty$.

Valutiamo ora la derivata prima. Risulta, con facili calcoli,

$$f'(x) = 2x\left(1 - \frac{1}{x^2-1}\right) = 2x\frac{x^2-2}{x^2-1}, \quad x \in D.$$

Essendo $f'(x) > 0$ se $x > \sqrt{2}$ e $f'(x) < 0$ se $1 < x < \sqrt{2}$, la funzione é crescente in $[\sqrt{2}, +\infty[$ e decrescente in $]1, \sqrt{2}]$. Pertanto $x = \sqrt{2}$ é un punto di minimo relativo e $f(\sqrt{2}) = 2$. Simmetricamente, la funzione é decrescente in $]-\infty, -\sqrt{2}]$ ed é crescente in $[-\sqrt{2}, -1[$ e il punto $x = -\sqrt{2}$ é un punto di minimo relativo con $f(-\sqrt{2}) = 2$.

Valutiamo ora la derivata seconda. Si ha:

$$f''(x) = 2\frac{x^4 - x^2 + 2}{(x^2-1)^2}.$$

Questa derivata é sempre positiva perché il numeratore é sempre positivo. Dunque la funzione é convessa in $]-\infty, -1[$ e in $]1, +\infty[$. Non esistono quindi punti di flesso. Dallo studio si ricava che i punti $x = \pm\sqrt{2}$ sono minimi assoluti, mentre la funzione non ha massimo assoluto.

Il grafico ora puó essere tracciato agevolmente.

2. La serie da studiare é

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2-\log(n^2-1)}.$$

Tale serie risulta a segni alterni. Siccome la seie assoluta é data da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\log(n^2-1)},$$

utilizzando il criterio degli infinitesimi con $p=2$, si ha subito la convergenza assoluta. Pertanto la serie converge anche semplicemente.

3. Occorre determinare l'integrale indefinito $(x>1)$

$$I=\int(x^2-\log(x^2-1))dx$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}
I &= \int x^2dx-\int\log(x^2-1)dx=\frac{x^3}{3}-x\log(x^2-1)+2\int\frac{x^2}{x^2-1}dx \\
&= \frac{x^3}{3}-x\log(x^2-1)+2x+2\int\frac{1}{x^2-1}dx \\
&= \frac{x^3}{3}-x\log(x^2-1)+2x+\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \frac{x^3}{3}-x\log(x^2-1)+2x+\log\frac{x-1}{x+1}+c.
\end{aligned}$$