UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 22.06.2017

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + (x-1)^2}{x-1},$$

specificando esattamente: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio delle derivate prima e seconda, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{f(n)}.$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} \int_2^x f(t)dt.$$

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é $D = I\!R \setminus \{1\}$. Inoltre $f(0) = -2$ e $f(x) > 0$ se $x > 1$ mentre $f(x) < 0$ se $x < 1$.

Per quanto riguarda gli asintoti si ha:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty,$$

e quindi la retta $x = 1$ é un asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Non esistono quindi asintoti orizzontali. Essendo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to +\infty} (f(x) - x) = -1,$$

la retta $y = x - 1$ é un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Lo stesso accade per $x \to -\infty$.

Valutiamo ora la derivata prima. Risulta

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}, \quad (x \neq 1)$$

che si annulla nei punti $x = 0$, $x = 2$. Inoltre $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e $x > 2$, mentre $f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$ e $1 < x < 2$. Quindi f é crescente sugli intervalli $]-\infty, 0]$ e $[2, +\infty[$, mentre é decrescente sugli intervalli $]0, 1[$ e $]1, 2[$.

Pertanto $x = 0$ é un punto di massimo relativo e $f(0) = -2$, mentre$x = 2$ é un punto di un minimo relativo e $f(2) = 2$.

Valutiamo ora la derivata seconda. Risulta:

$$f''(x) = \frac{2x - 2}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}, \quad (x \neq 1)$$

che nel suo dominio non si annulla mai, mentre $f''(x) < 0$ se $x < 1$ mentre $f''(x) > 0$ se $x > 1$. Quindi f é convessa per $x > 1$ e concava per $x < 1$.

Il grafico ora puó essere tracciato.

2. Essendo $f(n) > 0$, per ogni n, la serie é a segni alterni e dal grafico della funzione si deduce facilmente che la successione

$$a_n = \frac{1}{f(n)}$$

é infinitesima ed é decrescente. Pertanto per il criterio di Leibniz la serie é convergente. Analizziamo ora la convergenza assoluta. Le serie dei valori assoluti é data dalla

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{1+(n-1)^2}$$

ed usando il criterio degli infinitesimi con $p = 1$ si deduce subito che la serie é divergente. Pertanto la serie é semplicemente convergente.

3. Siccome per $x > 2$ la funzione f é crescente si ha immediatamente

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x f(t)dt = +\infty$$

e quindi usando la regola di De L'Hopital e il teorema fondamentale del Calcolo Integrale si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} \int_2^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+(x-1)^2}{2x(x-1)} = \frac{1}{2}.$$