UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 17.01.2019

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare il volume del solido che si trova nel primo ottante, dentro il cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e sotto il piano $z = y$.

2. Determinare gli eventuali punti di minino, massimo relativo e sella della funzione

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2.$$

Esistono punti di massimo e minino assoluti?

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2x^2y''' - xy'' - 2y' = 0 \\ y(1) = 8 \\ y'(1) = 5 \\ y''(1) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento

1. Si tratta di determinare l'integrale doppio

$$V = \iint_D y dx dy,$$

dove $D = \{(x,y) \in I\!R^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$. Utilizzando le coordinate polari, si ha:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^2 \rho^2 \sin\theta d\rho = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

2. Determiniamo i punti critici della funzione. Il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ diventa

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ 6y - 6x = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni i punti $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (1,1)$, che sono quindi gli unici punti critici. Si vede subito che P_1 é un punto di sella. Infatti $f(0,0) = 0$ mentre la restrizione della f all'asse delle x é $f(x,0) = 2x^3$ che é una funzione strettamente crescente di x su tutto l'asse x. Quindi $f(x,0) < 0$ per ogni $x < 0$ e $f(x,0) > 0$ per ogni $x > 0$. Per quanto riguarda il punto $(1,1)$, determiniamo l'Hessiano della f in tale punto. Si ha anzitutto:

$$f''_{xx}(x,y) = 12x,\ f''_{yy}(x,y) = 6,\ f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -6.$$

Pertanto $H(1,1) = 36 > 0$ ed inoltre $f''_{xx}(1,1) = 12 > 0$. Il punto $(1,1)$ é allora un punto di minimo relativo e risulta $f(1,1) = -1$. Non ci sono altri punti di estremo e la funzione non é limitata. Infatti $\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \pm\infty$. Non ci sono quindi estremi assoluti.

3. Possiamo limitarci a studiare l'equazione con $x > 0$. Essa si riconduce subito ad una equazione di Eulero omogenea del secondo ordine, ponendo $z = y'$. Con tale sostituzione, si ha l'equazione

$$2x^2 z'' - xz' - 2z = 0,$$

che ha le soluzioni indipendenti $u_1(x) = x^2$ e $u_2(x) = x^{-1/2}$. L'integrale generale dell'equazione in z é allora dato da

$$z(x) = C_1x^2 + C_2x^{-1/2}.$$

Imponendo ora le condizioni iniziali, si ha $z(1) = 5$ e $z'(1) = 0$ da cui si ottiene la soluzione $(x > 0)$

$$z(x) = x^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}.$$

Ora per ottenere la soluzione del problema originale, é sufficiente calcolare l'integrale indefinito

$$y(x) = \int z(x)dx = \frac{x^3}{3} + 8\sqrt{x} + c.$$

Imponendo la condizione $y(1) = 8$, si ottiene $c = -1/3$ e quindi l'unica soluzione del problema é:

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + 8\sqrt{x} - \frac{1}{3}.$$