UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 14.07.2016

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_T \frac{xy^2}{x^2+y^2}dxdy,$$

dove $T = \{(x,y) \in I\!R^2 : y \geq x, \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

2. Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = f(x,y)dx + xydy,$$

dterminare tutte le funzioni $f \in C^1(I\!R^2)$ per le quali ω risulta esatta in $I\!R^2$. Calcolare poi i potenziali.

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$xy' + y(1-xy^3) = 0,$$

con $y(1) = 1$.

Svolgimento

1. Utilizzando le coordinate polari si ha che l' insieme T dove si integra si trasforma nell'insieme D del piano (ρ, t) definito dalle $1 \leq \varrho \leq 2$, $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$ e si ottiene

$$\begin{aligned} & \iint_T \frac{xy^2}{x^2+y^2} dxdy = \iint_D \frac{\varrho \cos t \varrho^2 \sin^2 t}{\varrho^2} \varrho d\rho dt \\ = & \int_1^2 \varrho^2 d\varrho \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos t \sin^2 t dt \\ = & \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_1^2 \left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = -\frac{7\sqrt{2}}{18}. \end{aligned}$$

2. Poiché per ogni $f \in C^1(I\!R^2)$ il dominio é tutto il piano, che é un insieme convesso, per avere l'esattezza é sufficiente verificare la chiusura. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = y \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = y$$

e quindi le funzioni $f \in C^1(I\!R^2)$ richieste sono date dalla:

$$f(x,y) = \int y dy = \frac{y^2}{2} + h(x),$$

dove $h(x)$ é un'arbitraria funzione di classe $C^1(I\!R)$. Dunque la forma

$$\omega = (\frac{y^2}{2} + h(x))dx + xydy$$

é esatta per ogni funzione $h \in C^1(I\!R)$. Determiniamo ora le primitive $F(x,y)$. Si ha:

$$F(x,y) = \int (\frac{y^2}{2} + h(x))dx = \frac{y^2}{2}x + H(x) + g(y),$$

dove H é una qualsiasi primitiva di h. Inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = xy = xy + g'(y) \Leftrightarrow g'(y) = 0 \Leftrightarrow g(y) = K.$$

Dunque la famiglia delle primitive é data dalla

$$F(x, y) = \frac{y^2}{2} x + H(x) + K,$$

con H un'arbitraria funzione di classe $C^2(I\!R)$ e k un'arbitraria costante.

3. Si tratta di un'equazione di Bernoulli della forma:

$$y'(x) = -\frac{1}{x} y + y^4.$$

Ponendo $z = y^{-3}$ si ha

$$z' = \frac{3}{x} z - 3$$

e dalla formula risolutiva per le equazioni lineari si ottiene

$$z = e^{\int 3/x dx} [\int -3e^{-\int 3/x dx} dx + C] = \frac{3}{2} x + Cx^3$$

e quindi

$$y^3 = \frac{1}{\frac{3}{2} x + Cx^3}.$$

Poiché dalla condizione iniziale si ha $C = -1/2$ la soluzione é

$$y = \sqrt[3]{\frac{2}{3x - x^3}}.$$