UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 14.07.2016

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

2. Studiare il grafico della seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x-1},$$

specificando in particolare dominio, segno, asintoti, derivate prima e seconda, massimi, minimi, flessi e tracciare infine il grafico.

3. Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\cos x \sin x}{(1+\cos^2 x)(1+\cos x)} dx.$$

Svolgimento

1. La serie é a termini positivi e possiamo studiarla con il criterio del rapporto. Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{2(n+1)}}\frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}}$$

perció

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{e^2} < 1$$

e quindi la serie converge.

2. Il dominio della funzione é dato dall'insieme $x \neq 1$. Inoltre la funzione é positiva se $x < 0$ e $x > 1$ mentre é negativa se $0 < x < 1$. La funzione interseca gli assi soltanto nell'origine, cioé $f(0) = 0$. Per quanto riguarda gli asintoti si ha

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$

e quindi $x = 1$ é asintoto verticale, mentre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

e quindi non ci sono asintoti orizzontali e facilmente si vede che non ci sono neppure quelli obliqui. Calcoliamo la derivata prima Si ha

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

e pertanto $f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 0,\ x = 3/2$ e $f'(x) > 0 \leftrightarrow x > 3/2$ e quindi la funzione é crescente per $x > 3/2$ e decrescente per $x < 3/2$. La funzione presenta quindi un punto di minimo relativo in $x = 3/2$ e risulta $f(3/2) = 27/4$. Non ci sono altri punti di massimo o minimo.

Per quanto riguarda la derivata seconda si ha facilmente

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(6x^2-6x)(x-1)^2 - (2x^3-3x^2)2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(6x^2-6x)(x-1) - 2(2x^3-3x^2)}{(x-1)^3} = \frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

e pertanto si ha che $f''(x) > 0$ se $x < 0$ e $x > 1$ e $f''(x) < 0$ se $0 < x < 1$ la funzione f é dunque convesa per $x < 0$ e $x > 1$ e concava se $0 < x < 1$. Il punto $x = 0$ é pertanto un flesso orizzontale. Il grafico ora puó essere facilmente tracciato.

3. Effettuando la sostituzione $\cos x = t \leftrightarrow dt = -\sin x dx$ si ottiene l'integrale

$$-\int \frac{tdt}{(1+t^2)(1+t)}.$$

Con la formula di Hermite si ha

$$\frac{tdt}{(1+t^2)(1+t)} = \frac{A}{(1+t)} + \frac{Bt+C}{(1+t^2)}$$

da cui $A = -1/2, B = C = 1/2$ quindi

$$\begin{aligned}
-\int \frac{tdt}{(1+t^2)(1+t)} &= -\int \Big(-\frac{1}{2(t+1)} + \frac{t+1}{2(t^2+1)} \Big) dt \\
= & \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1} dt - \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{t^2+1} dt \\
= & \frac{1}{2}\log|t+1| - \frac{1}{4}\log(t^2+1) - \frac{1}{2}\arctan t + C \\
= & \frac{1}{2}\log|\cos x + 1| - \frac{1}{4}\log(\cos x^2 + 1) - \frac{1}{2}\arctan \cos x + C.
\end{aligned}$$