UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 14.06.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**_________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

studiare:

(a) la continuitá di f in ogni punto $(0, y_0)$ con $y_0 \in I\!R$,

(b) l'esisitenza del gradiente di f in ogni punto $(0, y_0)$, $y_0 \in I\!R$,

(c) la differenziabilitá di f nei suddetti punti,

(d) la derivata direzionale (se esiste) di f nell'origine rispetto alla direzione della retta tangente al grafico della funzione $g(x) = x^2 + x + 1$ nel punto $x = 0$.

2. Determinare l'integrale curvilineo

$$I = \int_{\mathcal{C}} (\sin y + y\cos x)dx + (x\cos y + \sin x)dy,$$

dove $\mathcal{C}$ é il grafico della funzione $g(x) = x\arctan x$ sull'intervallo $[0, \pi/4]$ percorsa nel senso delle x crescenti.

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy = x^3y^3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento

1. Per la continuitá deve risultare, per $y_0 \in I\!R$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = 0.$$

Ora, risulta

$$|f(x,y)| \leq \frac{\pi}{2}x^2,$$

e quindi facilmente si deduce che il suddetto limite é nullo per ogni y_0. Pertanto la funzione é continua in ogni punto.

Per il gradiente, si ha intanto

$$\frac{f(t,y_0) - f(0,y_0)}{t} = t^2 \arctan\left(\frac{y_0}{t}\right),$$

e quindi analogamente alla continuitá, maggiorando l'arcotangente con $\pi/2$, si ottiene $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = 0$. Infine é ovvio dalla definizione di f che $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = 0$. Pertanto $\nabla f(0,y_0) = (0,0)$ per ogni valore di y_0.

Per la differenziabilitá, essendo $f(0,y_0) = 0$ e $\nabla f(0,y_0) = 0$, dalla definizione si deve avere

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,y_0+k) - f(0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Ora:

$$\left|\frac{f(h,y_0+k) - f(0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\left|\arctan\frac{y_0+k}{h}\right| \leq \frac{\pi}{2}|h|,$$

e quindi segue subito l'asserto.

Infine il versore relativo alla direzione della tangente al grafico della funzione g nel punto zero (che é la retta $y = x$), é dato da $\mathtt{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Dalla differenziabilitá otteniamo dunque

$$\frac{\partial f}{\partial \mathtt{v}}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot \mathtt{v} = 0.$$

2. Il calcolo diretto dell'integrale curvilineo utilizzando la definizione non é agevole. Osserviamo tuttavia che la forma differenziale

$$\omega(x,y) = X(x,y)dx + Y(x,y)dy = (\sin y + y\cos x)dx + (x\cos y + \sin x)dy,$$

che é definita in tutto il piano, é chiusa. Infatti, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \cos y + \cos x.$$

Dunque essendo $\mathbb{R}^2$ ovviamente un insieme convesso, la forma é esatta. Determiniamo quindi una primitiva. Se $F(x,y)$ é una primitiva, si deve avere

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \int X(x,y)dx + \varphi(y) = \int (\sin y + y\cos x)dx + \varphi(y) \\ &= x\sin y + y\sin x + \varphi(y). \end{aligned}$$

Dalla

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Y(x,y) = x\cos y + \sin x$$

deduciamo subito che deve essere $\varphi'(y) = 0$, cioé $\varphi(y) = k$, con k costante arbitraria. La famiglia dei potenziali é allora data da

$$F(x,y) = x\sin y + y\sin x + k.$$

Infine, per il calcolo dell'integrale scegliamo un potenziale (per esempio poniamo $k = 0$) e otteniamo

$$I = F(\pi/4, \pi/4 \arctan \pi/4) - F(0,0) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

3. L'equazione é del tipo di Bernoulli. Ponendo $z = y^{-2}$ l'equazione si trasforma nell'equazione lineare del primo ordine

$$z' = 2xz - 2x^3.$$

Calcoliamo la funzione z. Si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{x^2}\left\{\int -2x^3 e^{-x^2} + c\right\} \\ &= e^{x^2}\left\{x^2 e^{-x^2} - \int 2xe^{-x^2}dx + c\right\} = e^{x^2}(x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + c) \\ &= x^2 + ce^{x^2} + 1. \end{aligned}$$

L'integrale generale dell'equazione originale é allora dato dalla

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 + ce^{x^2} + 1}}.$$

Siccome ora $y(1) = 1$, scegliamo il segno $+$ e otteniamo

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + ce^{x^2} + 1}}.$$

Sostituendo i dati iniziali otteniamo $c = -1/e$. La soluzione é allora

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - e^{x^2-1} + 1}}.$$