UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 14.06.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}}$$
specificando: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio della derivata prima, massimi e minimi e disegnando infine il grafico. (Si puó tralasciare lo studio della derivata seconda). Esistono massimi e/o minimi assoluti?

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, discutere la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(1-(f(n)^2\Big).$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare l'area della regione del piano individuata del grafico di $g(x) = (f(x))^2$ sull'intervallo $[1, 2]$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é l'insieme $D = \{x \in I\!R : x \geq A, \quad x \leq B\}$, con $A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $B = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La funzione é sempre non negativa, e $f(x) = 0$ se e solo se $x = A$ e $x = B$. Pertanto i punti estremi del dominio $x = A$ e $x = B$ sono minimi assoluti. Non ci sono intersezioni con l'asse y. Per quanto riguarda gli asintoti,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 = \lim_{x\to-\infty} f(x),$$

pertanto la retta $y = 1$ é un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. Non ci sono altri asintoti.

Valutiamo ora la derivata prima. Si ha, per $x \in D$, $x \neq A, B$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+x-1}}\frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-1}(x^2+x+1)^{3/2}}.$$

Essendo

$$\lim_{x\to B^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to A^+} f'(x) = +\infty,$$

$x = B$, $x = A$ sono semirette tangenti al grafico di f. Siccome $f'(x) > 0$ per ogni $x > A$, la f é crescente in $[A, +\infty[$. Analogamente, $f'(x) < 0$ per $x < B$ e quindi f é decrescente in $]-\infty, B]$. Non esistono altri punti di estremo oltre ai punti A, B e la funzione non ammette massimo assoluto. Il grafico puó essere ora tracciato facilmente.

2. La serie da studiare é

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^2+n+1},$$

che é una serie a segni alterni. La serie assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+n+1},$$

é convergente, pertanto la serie data é assolutamente convergente e quindi convergente.

3. Occorre determinare l'integrale definito

$$I = \int_1^2 \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Si ha:

$$I = \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x^2 + x + 1}\right) dx = 1 - 2 \int_1^2 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Per l'ultimo integrale, completando il quadrato, otteniamo:

$$\begin{aligned} & 2 \int_1^2 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = 2 \int_1^2 \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ = & \left[\frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right]_1^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{5}{\sqrt{3}} - \arctan \sqrt{3} \right). \end{aligned}$$