UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 13.09.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma y ds,$$

dove γ é il grafico della funzione $y = \sqrt{x}$ sull'intervallo $[1, 2]$.

2. Determinare l'integrale doppio

$$\iint_D (y^2 - x) dx dy$$

dove D é la parte dell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x\},$$

contenuta nel primo quadrante.

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y} \\ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Qual é il massimo intervallo di esistenza contenente il punto $x = 1$?

Svolgimento

1. Risulta facilmente

$$\begin{aligned}\int_\gamma y ds &= \int_1^2 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{4x+1}dx \\ &= \frac{1}{8}\int_1^2 \sqrt{4x+1}d(4x+1) = \frac{9^{3/2}-5^{3/2}}{12}\end{aligned}$$

2. Passando in coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned} & \iint_D (y^2-x)dxdy = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta \int_1^2 (\rho^3 \sin^2\theta - \rho^2\cos\theta)d\rho \\ =& \int_{\pi/6}^{\pi/3}\Big(\frac{15}{4}\sin^2\theta - \frac{7}{3}\cos\theta\Big)d\theta \\ =& \frac{15}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta - \frac{7}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos\theta d\theta \\ =& \frac{5\pi}{16}+\frac{7}{6}(1-\sqrt{3}).\end{aligned}$$

3. É una equazione di Bernoulli, con $s=-1$. Posto allora $z=y^2$, si ottiene l'equazione lineare

$$z' = \frac{z}{x} - x.$$

Tenendo conto che in un intorno del punto $x=1$ la soluzione dovrá essere positiva, si ottiene

$$z(x) = e^{\log x}\left\{-\int xe^{-\log x}dx + c\right\} = -x^2 + cx,$$

con c costante arbitraria. Da questo si ricava (dalla positivitá di y)

$$y(x) = \sqrt{cx - x^2}$$

ed imponendo il dato iniziale si trova $c=2$. La soluzione é data dunque dalla funzione

$$y(x) = \sqrt{2x-x^2},$$

che esiste nell'intorno del punto $x=1$ dato da $U=]0,2]$.