UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 13.09.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{3}(x-4)^3$$

specificando: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio della derivata prima, massimi e minimi, dominio della derivata seconda, flessi e disegnando infine il grafico. Esistono massimi e/o minimi assoluti?

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\Big(-\frac{1}{n}\Big).$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare l'area della regione determinata dal grafico della funzione $g(x) = f(x)/x$ sull'intervallo $[4, 5]$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é tutto l'asse reale. Per il segno, si ha che $f(x) < 0$ se e solo se $0 < x < 4$ mentre $f(x) > 0$ se e solo se $x < 0$ o $x > 4$. Inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $x = 4$, pertanto il grafico della funzione interseca l'asse delle x nei punti $x = 0$ e $x = 4$ ed interseca l'asse y nell'origine.

Per quanto riguarda gli asintoti, non esistono asintoti verticali e risulta

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

e quindi non esistono asintoti orizzontali. Verifichiamo l'esistenza di asintoti obliqui. Facilmente si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

e pertanto non esistono asintoti obliqui.

Valutiamo ora la derivata prima. Si ha, per $x \in I\!R$,

$$f'(x) = \frac{1}{3}\Big((x-4)^3 + 3x(x-4)^2\Big) = \frac{4}{3}(x-4)^2(x-1).$$

La derivata é non negativa per ogni $x > 1$ e in tale intervallo si annulla soltanto nel punto $x = 4$. Per il test di stretta monotonia, la f é dunque strettamente crescente per $x > 1$. Analogamente risulterá strettamente decrescente per $x < 1$. Dunque il punto $x = 1$ é un punto di minimo relativo e si ha $f(1) = -9$. Il punto $x = 1$ é anche un punto di minimo assoluto.

Per la derivata seconda, si ha, per ogni $x \in I\!R$,

$$f''(x) = 4(x^2 - 6x + 8).$$

Risulta quindi $f''(x) > 0$ per $x < 2$ ed $x > 4$, mentre $f''(x) < 0$ se $2 < x < 4$. I punti $x = 2$ e $x = 4$ sono punti di flesso e risulta $f(2) = -16/3$ e, come giá osservato, $f(4) = 0$.

Il grafico puó ora essere tracciato facilmente.

2. La serie da studiare é

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\Big(-\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1+4n)^3}{n^4}.$$

che é una serie a segni alterni. Dallo studio del grafico della funzione, si vede subito che il termine generale (in valore assoluto) della serie tende a zero in modo decrescente. Quindi per il criterio di Leibniz la serie é convergente. Tuttavia non é assolutamente convergente (si applichi il criterio degli infinitesimi alla serie assoluta con $p = 1$). La serie é quindi semplicemente convergente.

3. Occorre determinare l'integrale

$$A = \int_4^5 \frac{f(x)}{x}dx.$$

Si ha immediatamente

$$A = \frac{1}{3}\int_4^5 (x-4)^3 dx = \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{4}(x-4)^4\Big]_{x=4}^{x=5} = \frac{1}{12}.$$