UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 13.07.2017

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{x}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^2}dy$$

dove $\gamma(t) = (t, \sin t)$ con $t \in [\pi, 2\pi]$.

2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{x}y + y^2 x \log x, \\ \\ y(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

3. Calcolare l'area dell'insieme

$$E = \{(x,y) \in R^2 : \quad 0 \le y \le 8, \quad \frac{y^2}{4} \le x \le 2y\}.$$

Svolgimento

1. Consideriamo la forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^2}dy.$$

Controlliamo la chiusura, si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{-4xy(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

quindi é chiusa e poiché é omogenea di grado $\alpha = -3$ risulta esatta e a famiglia delle primitive é data da

$$F(x,y) = -\frac{1}{2(x^2+y^2)} + K.$$

L'integrale curvilineo quindi si puó calcolare

$$\int_\gamma \omega = F(2\pi, 0) - F(\pi, 0) = \frac{3}{8\pi^2}.$$

2. Si tratta di un'equazione di Bernoulli. Dividendo tutto per y^2 si ottiene

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{x}y^{-1} + x\log x$$

e ponendo $z = \frac{1}{y} \to z' = -y^{-2}y'$ si ha l'equazione differenziale lineare

$$z' = \frac{1}{x}z - x\log x.$$

Dalla formula risolutiva abbiamo

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int -x\log x e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right] = x[\int -\log x dx + C] \\ &= x[-x\log x + \int dx + C] = -x^2\log x + x^2 + Cx = \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Quindi la soluzione é

$$y = \frac{1}{x^2 - x^2\log x + Cx}$$

e dalla condizione iniziale

$$y(1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+C} \Leftrightarrow C = 1$$

3. L'area é data da

$$\int\int_F dxdy = \int_0^8 dy \int_{y^2/4}^{2y} dx = \int_0^8 (2y - \frac{y^2}{4})dy = \Big[y^2 - \frac{y^3}{12}\Big]_0^8 = 64 - \frac{128}{3}$$