UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 13.07.2017

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = 3xe^{-x-2},$$
specificando esattamente: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio delle derivate prima e seconda, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(n).$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, calcolare l'area dell'insieme
$$E = \{(x,y) \in I\!R^2 : 2 \le x < +\infty, \quad 0 \le y \le f(x)\}.$$

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é $I\!R$. Inoltre $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ se $x > 0$ mentre $f(x) < 0$ se $x < 0$. Pertanto l'uncio punto di intersezioni con gli assi é l'origine.

Per quanto riguarda gli asintoti si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

e quindi la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale e non esistono asintoti verticali, essendo la funzione continua ovunque. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

e pertanto non esistono asintoti obliqui.

Valutiamo ora la derivata prima. Risulta

$$f'(x) = 3e^{-x-2}(1-x) \qquad (x \in I\!R)$$

che si annulla nel punto $x = 1$. Inoltre $f'(x) > 0$ per $x < 1$ e $f'(x) < 0$ per $x > 1$. Quindi f é crescente in $]-\infty, 1]$, mentre é decrescente in $[1, +\infty[$.

Pertanto $x = 1$ é un punto di massimo relativo (anzi assoluto) e $f(1) = 3e^{-3}$. Non esistono altri punti di estremo relativo.

Valutiamo ora la derivata seconda. Risulta:

$$f''(x) = 3e^{-x-2}(x-2) \qquad (x \in I\!R)$$

che si annulla nel punto $x = 2$. Inoltre $f''(x) > 0$ per $x > 2$ e $f''(x) < 0$ per $x < 2$. Pertanto f é convessa in $[2, +\infty[$ e concava in $]-\infty, 2]$. Il punto $x = 2$ é allora un punto di flesso e $f(2) = 6e^{-4}$. Il grafico ora puó essere tracciato.

2. Essendo $f(n) > 0$, per ogni n, la serie é a segni alterni e dal grafico della funzione si deduce facilmente che la successione

$$a_n = f(n)$$

é infinitesima ed é decrescente. Pertanto per il criterio di Leibniz la serie é convergente. Analizziamo ora la convergenza assoluta. Le serie dei valori assoluti é data dalla

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3ne^{-n-2} = 3e^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$$

ed usando il criterio degli infinitesimi, per esempio con $p = 2$, si deduce subito che la serie é convergente. Pertanto la serie di partenza é assolutamente convergente.

3. L'area dell'insieme assegnato si calcola con un integrale generalizzato, cioé:

$$\text{Area}(E) = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x 3te^{-t-2}dt = 3e^{-2} \lim_{x\to+\infty} \int_2^x te^{-t}dt.$$

Ora integrando per parti si ha facilmente

$$\int_2^x te^{-t}dt = 3e^{-2} - e^{-x} - xe^{-x},$$

e quindi moltiplicando per $3e^{-2}$ e successivamente passando al limite per $x \to +\infty$ si ottiene $\text{Area}(E) = 9e^{-4}$.