UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 12.07.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega(x,y,z) = \sqrt{x+3}\,dx - \log y\,dy + \cos(2z)\,dz,$$

nel suo dominio di definizione e nel caso di esattezza determinare la famiglia delle primitive. Calcolare infine l'integrale curvilineo di ω lungo la circonferenza, contenuta nel piano (x,y), di centro $(1,2)$ e raggio 1.

2. Determinare il flusso del campo vettoriale $\Omega(x,y) = (2x^2y, 2xy^2)$ uscente dalla porzione D di corona circolare contenuta nel primo quadrante e delimitata dalle circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e 2 orientata positivamente.

3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

sull'intervallo $]0,1[$. Trovare infine, se esistono, tutte le soluzioni $y(x)$ per le quali si ha

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0.$$

(Suggerimento: per l'integrale generale, si trovi prima per tentativi una soluzione u_1 non nulla nell'intervallo considerato)

Svolgimento

1. Poniamo $X(x,y,z) = \sqrt{x+3}$, $Y(x,y,z) = -\log y$, $Z(x,y,z) = \cos(2z)$. La forma differenziale é definita in $D =]-3,+\infty[\times]0,+\infty[\times I\!R$ che é un insieme convesso dello spazio. Pertanto per studiare l'esattezza sará sufficiente studiare la chiusura. Banalmente, si ha:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,$$

pertanto la forma é chiusa e quindi esatta in D.

Determiniamo ora le primitive. Se $F(x,y,z)$ é un potenziale, dovrá essere

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = Z(x,y,z) = \cos(2z),$$

da cui

$$F(x,y,z) = \int Z(x,y,z)dz = \frac{1}{2}\sin(2z) + \xi(x,y).$$

Per determinare la funzione $\xi(x,y)$ imponiamo le altre condizioni $F_x = X$, $F_y = Y$. Si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,y) = \sqrt{x+3},$$

da cui si ha

$$\xi(x,y) = \frac{2}{3}(x+3)^{3/2} + g(y).$$

Inoltre,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = g'(y) = -\log y,$$

da cui $g(y) = -y\log y + y + c$. L'integrale generale é allora dato da:

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}\sin(2z) + \frac{2}{3}(x+3)^{3/2} - y\log y + y + c.$$

La circonferenza assegnata é tutta immersa in D e quindi, essendo una curva chiusa, l'integrale é nullo.

2. Per calcolare il flusso di Ω é conveniente utilizzare il teorema della divergenza. Si ha div$\Omega = 8xy$, e quindi

$$\begin{aligned} Flusso(\Omega) &= \iint_D 8xydxdy = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_1^2 8\rho^3 d\rho \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta \int_1^2 4\rho^3 d\rho = \Big[\rho^4\Big]_1^2 = 15. \end{aligned}$$

3. Si vede facilmente che la funzione $u_1(x) = x$ é una soluzione non nulla in $]0,1[$. Per determinare un'altra soluzione linearmente indipendente, utilizziamo la nota formula integrale, che nel nostro caso é data dalla:

$$u_2(x) = x\int \frac{\exp(\int \frac{2x}{1-x^2}dx)}{x^2}dx = x\int \frac{1}{x^2(1-x^2)}dx.$$

Si ha allora:

$$u_2(x) = x\int \left(\frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right)dx - 1 = \frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1.$$

L'integrale generale é allora dato da ($x \in]0,1[$):

$$y(x) = c_1 x + c_2\Big(\frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1\Big).$$

Infine per trovare lee soluzioni che tendono a zero per $x \to 0^+$ si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = -c_2,$$

e quindi dobbiamo assumere $c_2 = 0$. Le soluzioni sono allora date da $y(x) = cx$, con c costante arbitraria.