UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 12.07.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x-3}$$

specificando: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio della derivata prima, massimi e minimi, derivata seconda e punti di flesso e disegnando infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(-n).$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare l'area della regione del piano individuata del grafico di $g(x) = (x^2 - 3x)f(x)$ sull'intervallo $[0, 1]$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é l'insieme $D = I\!R \setminus \{3\}$. Inoltre $f(x) > 0$ se $x > 3$ mentre $f(x) < 0$ se $x < 3$. Inoltre $f(0) = -1/3$. Non ci sono altre intersezioni con gli assi.

Determiniamo gli eventuali asintoti: si ha

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty,$$

pertanto la retta $x = 3$ é un asintoto verticale. Inoltre:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

pertanto la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Valutiamo ora l'esistenza di eventuali asintoti obliqui per $x \to +\infty$. Essendo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

non ci sono asintoti obliqui.

Valutiamo ora la derivata prima. Si ha, per $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(2x - 7)}{(x - 3)^2}.$$

Risulta dunque $f'(x) > 0$ se $x > 7/2$, mentre $f'(x) < 0$ se $x < 7/2$, con $x \neq 3$. Quindi la funzione é crescente se $x > 7/2$ e decrescente negli intervalli $]-\infty, 3[$ e $]3, 7/2]$. Il punto $x = 7/2$ é dunque un minimo relativo e $f(7/2) = 2e^7$. Non ci sono altri punti di estremo.

Valutiamo ora derivata seconda. Risulta, per $x \in D$,

$$f''(x) = \frac{2e^{2x}(2x^2 - 14x + 25)}{(x - 3)^3}.$$

Pertanto, siccome il numeratore é sempre positivo, $f''(x) < 0$ per $x < 3$, mentre $f''(x) > 0$ per $x > 3$. La funzione é quindi concava per $x < 3$ e convessa per $x > 3$. Non ci sono punti di flesso. Il grafico puó ora essere tracciato facilmente.

2. La serie da studiare é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n}}{-(n+3)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n}}{(n+3)}.$$

Pertanto se la seconda serie é convergente, anche la serie di partenza sará convergente. La seconda serie é a termini positivi e risulta

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{e^{-2n}}{n+3} = 0.$$

Per il criterio degli infinitesimi la serie assegnata e' dunque convergente assolutamente e quindi convergente.

3. Occorre determinare l'integrale definito

$$A = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 xe^{2x}dx.$$

Integrando per parti, si ha

$$A = \left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2+1}{4}.$$