UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
del 12.04.2017

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Assegnata la funzione

$$f(x) = \left(5 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{8}{x^3}$$

determinare il dominio, gli eventuali asintoti, crescenza, decrescenza, massimi, minimi relativi, concavitá e convessitá, flessi e tracciare infine un grafico approssimativo.

2. Studiare convergenza semplice ed assoluta della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{n^3+1} - n).$$

(Suggerimento: utilizzare la formula elementare $(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+b^2+ab)$.)

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare l'area della regione del piano determinata dal grafico della funzione

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(1/x) + 8x^3}},$$

sull'intervallo $[1, \sqrt{5}]$.

Svolgimento

1. Studio della funzione.

(a) Il dominio della funzione é l'insieme $D = I\!\!R \setminus \{0\}$.

(b) Asintoti. L'asse delle y é un asintoto verticale, infatti si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty,$$

(per calcolare il limite destro conviene scrivere la funzione in forma di rapporto di polinomi). Inoltre,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 25,$$

pertanto la retta $y = 25$ é un asintoto orizzontale.

(d) Con facili calcoli, la derivata prima puó essere scritta nella forma:

$$f'(x) = -\frac{4}{x^5} - \frac{20}{x^3} + \frac{24}{x^4} = -\frac{4}{x^5}(5x^2 - 6x + 1).$$

Ora, $f'(x) > 0$ se $x < 0$ e $1/5 < x < 1$, pertanto in questi intervalli la f é crescente, mentre decresce se $0 < x < 1/5$ e $x > 1$. Il punto $x = 1/5$ é quindi un punto di minimo relativo (anzi assoluto) e si ha $f(1/5) = -100$ e $x = 1$ é un punto di massimo relativo (ma non assoluto) e $f(1) = 28$.

(e) La derivata seconda é data da

$$f''(x) = \frac{4}{x^6}(15x^2 - 24x + 5)$$

e quindi la funzione é convessa se $x < 0$, se $0 < x < (12 - \sqrt{69})/15$ e se $x > (12 + \sqrt{69})/15$. I punti $x = (12 \pm \sqrt{69})/15$ sono quindi dei punti di flesso.

Il grafico ora puó essere tracciato in modo sufficientemente preciso.

2. Comportamento della serie.

La serie é a segni alterni. Studiamo quindi intanto la convergenza assoluta. Utilizzando la formula della differenza tra i due cubi, posto $a = \sqrt[3]{n^3+1}$ e $b = n$ si ha

$$\sqrt[3]{n^3+1} - n = \frac{1}{(n^3+1)^{2/3} + n^2 - n\sqrt[3]{n^3+1}}.$$

pertanto la serie si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^3+1)^{2/3} + n^2 - n\sqrt[3]{n^3+1}},$$

e tale serie é convergente per il criterio degli infinitesimi con $p = 2$. La serie iniziale é dunque assolutamente convergente e dunque anche convergente.

3. L'integrale da calcolare é il seguente

$$I = \int_1^{\sqrt{5}} g(x)dx = \int_1^{\sqrt{5}} \frac{1}{5+x^2}dx.$$

Si ha facilmente

$$I = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}}\right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$