UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 11.02.2016

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $D = \{(x,y) \in I\!R^2 : y \geq x, \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

2. Assegnato il campo vettoriale $\Omega(x,y) = (xy, x^2/2), \quad (x,y) \in I\!R^2$, dire se esso é conservativo e in caso affermativo determinare la famiglia dei potenziali. Infine determinare quel potenziale che assume il valore 1 nell'origine.

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1-x^2)y' - xy - xy^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento

1. Passando a coordinate polari, il dominio D si scrive:

$$D=\{(\rho,\theta):\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4},\quad 1\le\rho\le 2\}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4}\cos\theta\sin^2\theta d\theta\int_1^2\rho^2 d\rho=\frac{7}{3}\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\cos\theta\sin^2\theta d\theta \\ &= \frac{7}{9}\left[\sin^3\theta\right]_{\pi/4}^{5\pi/4}=-\frac{7}{18}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. É immediato verificare che la forma differenziale associata é chiusa in $I\!R^2$ e siccome ovviamente $I\!R^2$ é convesso, la forma é esatta, e quindi Ω é conservativo. Per il calcolo dei potenziali, scriviamo

$$F(x,y)=\int xydx+\psi(y)=\frac{1}{2}x^2y+\psi(y).$$

Dalla $F'_y(x,y)=x^2/2$ segue poi $\psi'(y)=0$ da cui $\psi(y)=c$, con c costante. Dunque la famiglia delle primitive é

$$F(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+c.$$

Imponendo la condizione $F(0,0)=1$ si ottiene $c=1$.

3. L'equazione é del tipo di Bernoulli. Ponendo $z=y^{-1}$ l'equazione si trasforma nell'equazione lineare del primo ordine

$$z'=-\frac{x}{1-x^2}z-\frac{x}{1-x^2}.$$

Per ottenere la soluzione, per $x\in]-1,1[$, si ha:

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\int\frac{x}{1-x^2}dx}\left\{-\int\frac{x}{1-x^2}e^{\int\frac{x}{1-x^2}dx}dx+c\right\} \\ &= \sqrt{1-x^2}\left\{-\int\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}+c\right\} \\ &= c\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}dx \\ &= c\sqrt{1-x^2}-1. \end{aligned}$$

Dunque l'integrale generale dell'equazione é

$$y(x) = \frac{1}{c\sqrt{1-x^2}-1}.$$

la soluzione del problema si ottiene ponendo $c = 2$.