UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 11.02.2016

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = |x|^3 e^x$$
specificando esattamente: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio delle derivate prima e seconda, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} f(nx).$$

3. Determinare l'area della regione del piano C definita dalla
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$
dove f é la funzione dell'esercizio 1.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é tutto l'asse reale $I\!R$. Inoltre, ovviamente la funzione é sempre non negativa e si annula soltanto per $x = 0$. Siccome $f(0) = 0$, possiamo subito dedurre che $x = 0$ é un punto di minimo assoluto.

Per quanto riguarda gli asintoti, osserviamo subito che non esistono asintoti verticali. Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Quindi la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e, come si vede facilmente, non c'é asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Valutiamo ora la derivata prima. Risulta

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 e^x (3 + x), & x > 0 \\ -x^2 e^x (3 + x), & x < 0 \end{cases}$$

Inoltre siccome é immediato verificare che $\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = 0$, si ha che f é derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 0$. Pertanto il campo di esistenza della derivata é tutto $I\!R$. Il punto $x = 0$, come abbiamo giá osservato, é un minimo assoluto.

Se $x > 0$, si ha $f'(x) > 0$ e quindi f é strettamente crescente per $x > 0$. Se invece $x < 0$, si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x < -3$ mentre $f'(x) < 0$ se e solo se $-3 < x < 0$, e quindi f é strettamente crescente in $]-\infty, -3]$ ed é strettamente decrescente in $[-3, 0]$. Dunque $x = -3$ é un massimo relativo con $f(-3) = 27e^{-3}$.

Valutiamo ora la derivata seconda. Risulta:

$$f''(x) = \begin{cases} x e^x (x^2 + 6x + 6), & x > 0 \\ -x e^x (x^2 + 6x + 6), & x < 0 \end{cases}$$

Inoltre ancora si vede facilmente che esiste la derivata seconda in $x = 0$ e vale 0. Pertanto anche il dominio di f'' é tutto $I\!R$. Se $x > 0$ la derivata seconda é sempre positiva, quindi la f é convessa in $[0, +\infty[$. Se $x < 0$ si ha che $f''(x) > 0$ per $x \in]-\infty, -3-\sqrt{3}]$ e in $[-3+\sqrt{3}, 0]$, e $f''(x) < 0$ se $x \in [-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}]$. Dunque f é convessa in $]-\infty, -3-\sqrt{3}]$ e in $[-3+\sqrt{3}, 0]$, mentre é concava in $[-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}]$. I punti $x = -3 \pm \sqrt{3}$ sono punti di flesso.

2. La serie da studiare é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |nx|^3 e^{nx}, \qquad x \in I\!R$$

che é a termini positivi, per ogni x. Se $x = 0$ ovviamente la serie converge con somma nulla. Sia allora $x \neq 0$. Se $x > 0$ il termine generale della serie non tende a zero (tende a $+\infty$), pertanto la serie diverge. Se invece $x < 0$, si ha facilmente che, ad esempio,

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 |nx|^3 e^{nx} = 0,$$

pertanto applicando il criterio degli infinitesimi, la serie é convergente.

3. Si tratta di calcolare il seguente integrale

$$A = \int_{-3}^{0} f(x)dx = -\int_{-3}^{0} x^3 e^x dx.$$

Valutando l'integrale indefinito integrando per parti tre volte, otteniamo la famiglia di primitive:

$$P(x) = e^x(-x^3 + 3x^2 - 6x + 6) + c,$$

e pertanto si ha

$$A = 6 - \frac{78}{e^3}.$$