UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 11.01.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la continuitá, l'esistenza del gradiente e la differenziabilitá nell'origine della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare l'integrale doppio

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

dove D é la parte di corona circolare di raggi 1 e 2 e centro nell'origine contenuta nel primo quadrante al di sotto della retta $y = x$.

3. Trovare una forma implicita del tipo $\Phi(x,y) = 0$ per la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\Big(1 + \dfrac{1}{y}\Big), \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Verificare poi che l'equazione $\Phi(x,y) = 0$ é esplicitabile in y come funzione di x in un intorno del punto $(0,1)$.

Svolgimento

1. Per la continuitá nell'origine passando in coordinate polari si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \rho^2(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta) = 0$$

e il limite é uniforme rispetto a θ. Infatti si ha, per ogni θ,

$$|\rho^2(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta)| \le 2\rho^2.$$

Pertanto f é continua nell'origine. Per quanto riguarda l'esistenza del gradiente nell'origine, ció é conseguenza immediata del fatto che i rapporti incrementali rispetto ad x e rispetto ad y sono nulli. Infatti, per ogni $h, k \in I\!R$, si ha

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0.$$

Pertanto $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Studiamo ora la differenziabilitá nell'origine. Se f fosse differenziabile si dovrebbe avere

$$f(h,k) = \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k),$$

dove ε é un infinitesimo per $(h,k)\to(0,0)$. Risulta

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta) = 0$$

e, come prima, il limite é uniforme rispetto a θ. Pertanto f é differenziabile nell'origine.

2. Si ha, usando le coordinate polari

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^2 \rho^3(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta)d\rho \\
&= \frac{1}{4}\left[\rho^4\right]_1^2 \int_0^{\pi/4} (\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta)d\theta \\
&= \frac{15}{4}\left\{\left[-\frac{1}{4}\cos^4\theta\right]_0^{\pi/4} - \left[\frac{1}{4}\sin^4\theta\right]_0^{\pi/4}\right\} \\
&= \frac{15}{4}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right] = \frac{15}{32}.
\end{aligned}$$

2. Si tratta di un'equazione a variabili separabili. Essa puó essere scritta nella forma

$$\frac{dy}{1+1/y} = xdx,$$

ed integrando

$$y - \log(1+y) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Imponendo il dato iniziale, si ha $C = 1 - \log 2$, e quindi la soluzione é scritta nella forma implicita

$$y - \log(1+y) = \frac{x^2}{2} + 1 - \log 2.$$

Da questa non si ricava l'espressione esplicita della soluzione, ma posto

$$\Phi(x,y) = y - \log(1+y) - \frac{x^2}{2} - 1 + \log 2,$$

si ha che $\Phi'_y(0,1) = 1/2$. Pertanto per il teorema di Dini sulle funzioni implicite, l'equazione $\Phi(x,y) = 0$ rappresenta localmente il grafico di una funzione $y = y(x)$ tale che $y(0) = 1$ e che é soluzione del problema di Cauchy.