UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 11.01.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{|e^x - 1|}{1+x}$$
specificando esattamente: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio delle derivate prima e seconda, massimi e minimi ed eventuali flessi. Disegnare infine il grafico.
(Suggerimento: per la derivata seconda studiare l'esistenza degli eventuali flessi con il teorema degli zeri).

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, utilizzando lo studio effettuato nell'esercizio 1, studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. Se f é l funzione dell'esercizio 1, calcolare l'area della regione del piano sottesa dalla funzione
$$f(x) = (1+x)^2 f(x),$$
sull'intervallo $[0, \log 4]$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é $I\!R \setminus \{-1\}$. Inoltre $f(x) \geq 0$ se e solo se $x > -1$ e $f(0) = 0$, mentre $f(x) < 0$ se e solo se $x < -1$. Il punto $(0,0)$ é l'unica intersezione con gli assi.

Determiniamo ora gli asintoti. Si ha

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty,$$

cioé $x = -1$ é un asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

e quindi la retta $x = 0$ é un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Essendo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

non esistono asintoti obliqui.

Calcoliamo ora la derivata prima. Intanto riscriviamo la funzione nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{1+x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1-e^x}{1+x}, & x < 0, x \neq -1. \end{cases}$$

Se $x > 0$, si ha quindi

$$f'(x) = \frac{xe^x + 1}{(1+x)^2},$$

e pertanto $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$. La f é dunque crescente in $[0, +\infty[$. Inoltre é facile vedere che $f'_+(0) = 1$.

Se $x < 0$, con $x \neq -1$, la derivata ha la stessa espressione soltanto cambiata di segno, cioé

$$f'(x) = -\frac{xe^x + 1}{(1+x)^2},$$

e quindi f risulta decrescente in $]-\infty, -1[$ e in $]-1, 0]$. Infine $f'_-(0) = -1$. Dallo studio segue che la derivata non esiste per $x = 0$ e che $x = 0$

é punto di minimo relativo con $f(0) = 0$. Non ci sono altri punti di massimo o di minimo.

Valutiamo ora la derivata seconda. Se $x > 0$, si ha, dopo facili calcoli,

$$f''(x) = \frac{e^x + x^2 e^x - 2}{(1+x)^3}.$$

Posto $g(x) = e^x + x^2 e^x - 2$, si ha $g(0) = -1 < 0$ mentre $g(1) = 2e - 2 > 0$. Dunque esiste un punto $x_0 \in]0,1[$ tale che $f''(x_0) = 0$. Inoltre $f''(x) > 0$ se $x > x_0$ e $f''(x) < 0$ se $x \in]0, x_0[$. La funzione é dunque convessa in $]x_0, +\infty[$ ed é concava in $[0, x_0]$.

Se invece $x < 0$ con $x \neq -1$ si ha:

$$f''(x) = -\frac{e^x + x^2 e^x - 2}{(1+x)^3}.$$

Se $x < -1$ si vede facilmente che $f''(x) < 0$ mentre se $x \in]-1, 0]$ si ha $f''(x) > 0$. Pertanto f risulta concava in $]-\infty, -1[$ e convessa in $]-1, 0]$. Lo studio é completo e il grafico puó ora essere tracciato.

2. La serie é data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} (e^{1/n} - 1).$$

Dallo studio del grafico della funzione si ha che $f(1/n) > 0$ per ogni n e la successione $f(1/n)$ é decrescente a zero. Pertanto la serie é a segni alterni e dal criterio di Leibnitz, segue la convergenza. Tuttavia la serie non é assolutamente convergente. Infatti la serie assoluta é data dalla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (e^{1/n} - 1)$$

e ricordando il limite notevole

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1,$$

segue che

$$\lim_{n \to +\infty} n \frac{n}{n+1} (e^{1/n} - 1) = 1.$$

Utilizzando allora il criterio degli infinitesimi con $p = 1$ segue la divergenza della serie assoluta. La serie risulta dunque semplicemente convergente.

3. L'integrale da calcolare é il seguente

$$A = \int_0^{\log 4} (1+x)(e^x - 1)dx.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\log 4} (e^x - 1)dx + \int_0^{\log 4} x(e^x - 1)dx \\ &= 4 - \log 4 - 1 + \int_0^{\log 4} xe^x dx - \int_0^{\log 4} xdx \\ &= 4 - \log 4 - 1 + 4\log 4 - 3 - \frac{\log^2 4}{2} = 3\log 4 - \frac{\log^2 4}{2}. \end{aligned}$$