UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
del 10.06.2016

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$x^2y'' + 3xy' - 3y = x^2 \log x,$$

con i dati iniziali $y(1) = y'(1) = 1$.

2. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{z} + y^2 z\right)dx + \left(2xyz + \frac{z}{y^2}\right)dy + \left(xy^2 - \frac{x}{z^2} - \frac{1}{y}\right)dz$$

lungo la curva di equazione $\varphi(t) = (1 + \sin t, \cos t + \sin t, 1 + \cos t)$ con $t \in [0, \pi/2]$.

3. Data la funzione

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2),$$

determinare i punti critici e studiarne la natura.

Svolgimento

1. Si tratta di una equazione di Eulero completa. L'equazione omogenea associata possiede le soluzioni indipendenti ($x > 0$): $u_1(x) = x, \quad u_2(x) = x^{-3}$. L'integrale generale dell'equazione omogenea risulta quindi

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \qquad x > 0.$$

Il determinante della matrice wronskiana delle soluzioni u_1, u_2 é $\det W(x) = -4x^{-3}$. Pertanto una soluzione particolare dell'equazione completa é del tipo

$$\overline{y}(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x),$$

dove, utilizzando le note formule,

$$v_1(x) = -\int \log x u_2(x)(\det W(x))^{-1} dx = \frac{1}{4}\int \log x dx = \frac{x}{4}\log x - \frac{x}{4},$$

$$v_2(x) = \int \log x u_1(x)(\det W(x))^{-1} dx = -\frac{1}{4}\int x^4 \log x dx = -\frac{x^5}{20}\log x + \frac{x^5}{100}.$$

Quindi,

$$\overline{y}(x) = \frac{x^2}{5}\log x - \frac{6x^2}{25}.$$

L'integrale generale dell'equazione assegnata é allora

$$Y(x) = c_1 x + c_2 x^{-3} + \frac{x^2}{5}\log x - \frac{6x^2}{25}.$$

Sostituendo ora i dati iniziali si ricava $c_1 = 5/4$ e $c_2 = -1/100$. La soluzione richiesta é allora

$$u(x) = \frac{5}{4}x - \frac{1}{100}x^{-3} + \frac{x^2}{5}\log x - \frac{6x^2}{25}.$$

2. Il modo piú semplice per il calcolo dell'integrale I é osservare intanto che il campo vettoriale da integrare é chiuso nell'insieme convesso $A = \{(x, y, z) : x \in I\!R, y > 0, z > 0\}$. Siccome la curva assegnata é tutta immersa in A, é sufficiente determinare un potenziale della forma differenziale associata ed applicare la formula fondamentale del calcolo integrale. Una famiglia di potenziali é data da:

$$F(x, y, z) = \int (\frac{1}{z} + y^2 z)dx + \xi(y, z) = \frac{x}{z} + y^2 zx + \xi(y, z).$$

Per determinare la funzione ξ dalla uguaglianza $F'_y(x,y,z) = 2xyz + z/y^2$ ricaviamo $\xi'_y(y,z) = z/y^2$ da cui si ha $\xi(y,z) = -z/y + \eta(z)$. Infine, dalla uguaglianza $F'_z(x,y,z) = xy^2 - (x/z^2) - (1/y)$ otteniamo $\eta'(z) = 0$, da cui $\eta(z) = k$, con k costante. Quindi la famiglia dei potenziali é data da:

$$F(x,y,z) = xy^2z + \frac{x}{z} - \frac{z}{y} + k.$$

Ora la curva ha come punto iniziale, per $t = 0$, il punto $(1,1,2)$ e come punto finale, per $t = \pi/2$, il punto $(2,1,1)$. Il valore dell'integrale é allora $I = F(2,1,1) - F(1,1,2) = 5/2$.

3. La funzione é di classe C^1 e le sue derivate parziali sono date da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6xy + 8x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 3x^2.$$

Pertanto il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ ammette l'unica soluzione l'origine. Considerando che l'Hessiano si annulla in $(0,0)$, lo studio della natura del punto critico si effettua direttamente con lo studio del segno. La funzione risulterá negativa nella parte di piano compresa tra le due parabole $y = x^2$ e $y = 2x^2$, mentre altrove é positiva. Siccome $f(0,0) = 0$ e ogni intorno dell'origine contiene punti che appartengono alla regione compresa tra le due parabole, il punto risulterá di sella.