UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 10.06.2016

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = x^2 e^{2x}$$
specificando esattamente: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio delle derivate prima e seconda, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

2. Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^{-n} \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^n.$$

3. Calcolare l'area della regione del piano sottesa dalla funzione f dell'esercizio 1 nell'intervallo $[0, 1]$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é tutto l'asse reale $I\!R$. Inoltre, ovviamente la funzione é sempre non negativa e si annula soltanto per $x = 0$. Siccome $f(0) = 0$, possiamo subito dedurre che $x = 0$ é un punto di minimo assoluto.

Per quanto riguarda gli asintoti, osserviamo subito che non esistono asintoti verticali. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Quindi la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e, come si vede facilmente, non c'é asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Valutiamo ora la derivata prima. Risulta

$$f'(x) = 2e^{2x}(x + x^2)$$

che si annulla nei punti $x = 0$ e $x = -1$. Come giá detto $x = 0$ é un punto di minimo assoluto mentre poiché $f'(x) > 0$ per $x < -1$ e $x > 0$ e $f'(x) < 0$ per $-1 < x < 0$, $x = -1$ é un punto di massimo relativo e $f(-1) = e^{-2}$.

Valutiamo ora la derivata seconda. Risulta:

$$f"(x) = 2e^{2x}(2x^2 + 4x + 1),$$

che si annulla nei punti $x = (-2 \pm \sqrt{2})/2$. Inoltre $f"(x) > 0$ per valori esterni alle due radici e negativa per queli interni. Pertanto, la funzione é convessa in $]-\infty, -(2 + \sqrt{2})/2]$ e $[(-2 + \sqrt{2})/2, +\infty[$ e concava nel complementare. Quindi i punti $(-2 \pm \sqrt{2})/2$ sono punti di flesso.

2. La serie da studiare é a termini positivi, per ogni x. Immediatamente si ha che per ogni $x \in I\!R$,

$$0 \le n^2 2^{-n} \left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)^n \le n^2 2^{-n},$$

e quindi siccome la serie di termine generale $n^2 2^{-n}$ converge per il criterio del rapporto, la serie data risulta convergente per ogni $x \in I\!R$.

3. Si tratta di calcolare il seguente integrale

$$A = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

Integrando per parti due volte

$$\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2 - 1}{4}.$$