UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
del 08.09.2016

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan(3 - 2x^2)$$

determinando dominio, segno, asintoti, intersezioni con gli assi, massimi e minimi, flessi e disegnando alla fine il grafico.

2. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} f(n)$$

dove f é la funzione dell'esercizio 1.

3. Calcolare l'area della regione del piano delimitata dalla funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{2x}}$$

nell'intervallo $[0, \frac{e^2}{2}]$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é tutto l'asse reale $I\!R$, mentre il segno é dato da

$$\arctan(3-2x^2) > 0 \Leftrightarrow 3-2x^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} > x^2 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Inoltre $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, $f(0) = \arctan 3$. La funzione risulta essere pari. Per quanto riguarda gli asintoti si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

quindi la retta $y = -\frac{\pi}{2}$ é asintoto orizzontale, non ci sono quindi asintoti obliqui, né asintoti verticali essendo la funzione definita e continua in tutto l'asse reale.

Studiamo la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(3-2x^2)^2}(-4x) = \frac{-4x}{1+9+4x^4-12x^2} = \frac{-2x}{2x^4-6x^2+5}.$$

Quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ inoltre riguardo al segno si ha $f'(x) > 0 \leftrightarrow \frac{2x}{2x^4-6x^2+5} < 0$. Siccome facilmente si vede che il denominatore é sempre positivo, risulta $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ e quindi $x = 0$ é punto di massimo. Studiamo infine la derivata seconda. Si ha

$$f''(x) = -\frac{2(2x^4-6x^2+5) - 2x(8x^3-12x)}{(2x^4-6x^2+5)^2} = \frac{2(6x^4-6x^2-5)}{(2x^4-6x^2+5)^2}.$$

Quindi poiché il polinomio al numeratore é positivo per $x < -\sqrt{\frac{3+\sqrt{39}}{6}}$ e $x > \sqrt{\frac{3+\sqrt{39}}{6}}$ la funzione é convessa in questo insieme mentre é concava nel complementare, ci sono quindi due punti di flesso $x = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{39}}{6}}$.

2. Si ha che la serie é data da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \arctan(3-2n^2).$$

Poiché

$$|\frac{1}{n^2}\arctan(3-2n^2)| \leq \frac{1}{n^2}\frac{\pi}{2}$$

la serie é assolutamente convergente e quindi convergente.

3. Si ha, eseguendo la sostituzione $2x = t^2 \leftrightarrow dx = tdt$

$$\begin{aligned} & \int_0^{e^2/2} \frac{1}{1+\sqrt{2x}} dx = \int_0^e \frac{t}{1+t} dt \\ = & \int_0^e \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = [t - \log(t+1)]_0^e = e - \log(e+1). \end{aligned}$$