UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 08.06.2017

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la differenziabilitá nell'origine della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Risolvere l'equazione differenziale

$$x^2y'' - 2y = 3x^2 - \log x, \quad x > 0.$$

3. Calcolare il volume del solido

$$E = \{(x,y,z) \in R^3 : \quad (x+1)^2 + y^2 \leq z \leq 2x + 5\}.$$

Svolgimento

1. Iniziamo dallo studio della continuitá in $(0,0)$. Si deve calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}.$$

Procedendo per maggiorazioni elementari si ha

$$0 \le \left|\frac{x^2y^3}{x^4+y^4}\right| = |y|\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \le \frac{1}{2}|y|$$

(si osservi che $(x^2-y^2)^2 = x^4+y^4-2x^2y^2 \ge 0$). Quindi il limite é zero e la funzione é globalmente continua nell'origine.

Per quanto riguarda le derivate parziali, anche queste valgono zero visto che la funzione é identicamente nulla sugli assi.

Studiamo infine la differenziabilitá. Deve risultare

$$\frac{x^2y^3}{x^4+y^4} = \sqrt{x^2+y^2}\varepsilon(x,y) \Rightarrow \varepsilon(x,y) = \frac{x^2y^3}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

con ε un infinitesimo. Calcoliamo quindi il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Se cosideriamo la restrizione $y=x$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{2x^4\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to} \frac{x}{2\sqrt{2}|x|} = \nexists$$

perché i limiti destro e sinistro sono diversi. La funzione non é quindi differenziabile.

2. Si tratta di una equazione equidimensionale di Eulero con $x>0$. Consideriamo l'equazione omogenea associata $x^2y''-2y=0$. Dalla sostituzione $x=e^z$ si ottiene l'equazione $y''-y'-1=0$ da cui le soluzioni $y=e^{-z}$ e $y=e^{2z}$ cioé $y=\frac{1}{x}$ e $y=x^2$. La soluzione generale dell'equazione omogenea é quindi

$$C_1\frac{1}{x}+C_2x^2.$$

Consideriamo l'equazione completa normalizzata

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = 3 - \frac{1}{x^2}\log x.$$

Posto $y_1 = \frac{1}{x}$ e $y_2 = x^2$ il determinante della matrice Wronskiana risulta essere 3. Quindi si ottiene

$$v_1(x) = \int -\frac{x^2}{3}(3 - \frac{1}{x^2}\log x)dx = -\frac{x}{3} + \frac{x}{3}\log x - \frac{x^3}{3}$$

e

$$v_2(x) = \int \frac{1}{3x}(3 - \frac{1}{x^2}\log x)dx = \log x + \frac{1}{6x^2}\log x + \frac{1}{12x^2}.$$

La soluzione particolare dell'equazione completa é allora

$$y_1v_1 + y_2v_2 = -\frac{x^2}{3} + \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4} + x^2\log x.$$

L'integrale generale é allora

$$\eta(x) = C_1\frac{1}{x} + C_2x^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4} + x^2\log x.$$

3. L'insieme di cui si deve calcolare il volume é delimitato dal piano $z = 2x + 5$ e dal paraboloide con vertice in $(-1, 0, 0)$ $z = (x + 1)^2 + y^2$. Per determinare l'insieme del piano dove si deve integrare consideriamo la relazione $(x + 1)^2 + y^2 \leq 2x + 5$ da cui si ricava

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 \leq 2x + 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Quindi il volume é dato da, ponendo $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ e passando a coordinate polari

$$\int\int_D (2x + 5 - ((x + 1)^2 + y^2)))dxdy = \int\int_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$$

$$= \int_0^2 d\varrho \int_0^{2\pi} (4 - \varrho^2)\varrho dt = 2\pi \int_0^2 (4\varrho - \varrho^3)d\varrho = 2\pi\Big[4\frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^4}{4}\Big]_0^2 = 8\pi.$$