UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 08.06.2017

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = (x^2 - 6x + 5)^4$$
specificando esattamente: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio delle derivate prima e seconda, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, studiare la convergenza delle due serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

3. Calcolare l'area della regione del piano sottesa dalla funzione
$$f(x) = \frac{\log x}{x^3}, \qquad x \in [1, e].$$

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é tutto l'asse reale $I\!R$. Inoltre, ovviamente la funzione é sempre non negativa e si annulla per $x = 1$ e $x = 5$. Inoltre $f(0) = 625$. Possiamo quindi subito dedurre che $x = 1$ e $x = 5$ sono punti di minimo assoluto.

Per quanto riguarda gli asintoti, osserviamo subito che non esistono asintoti verticali. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Essendo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty,$$

non esistono asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$.

Valutiamo ora la derivata prima. Risulta

$$f'(x) = 8(x-3)(x^2-6x+5)^3 = 8(x-3)(x-1)^3(x-5)^3$$

che si annulla nei punti $x = 1$, $x = 3$ e $x = 5$. Inoltre $f'(x) > 0$ per $x > 5$ e $1 < x < 3$, mentre $f'(x) < 0$ per $x < 1$ e $3 < x < 5$. Pertanto $x = 1$ e $x = 5$ sono minimi assoluti (come giá detto) e $x = 3$ é un massimo relativo con $f(3) = 256$.

Valutiamo ora la derivata seconda. Risulta:

$$f''(x) = 8(x^2-6x+5)^2(7x^2-42x+59),$$

che si annulla, oltre che nei punti $x = 1$ e $x = 5$, che peró non sono di flesso (sono minimi propri), anche nei punti $x_1 = 3 - \sqrt{28}/7$ e $x_2 = 3 + \sqrt{28}/7$. Inoltre $f''(x) < 0$ per $x \in]x_1, x_2[$ e $f''(x) > 0$ per valori esterni all'intervallo $[x_1, x_2]$. Pertanto, la funzione é concava in $[x_1, x_2]$ e convessa nel complementare. Quindi i punti x_1, x_2 sono punti di flesso.

Il grafico ora puó essere tracciato.

2. Entrambe le serie sono a termini positivi. Consideriamo la prima serie. Si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2-6n+1}{n^2}\right)^4.$$

Tale serie non converge perché il termine generale non tende a zero.

Per la seconda serie si ha, con facili calcoli,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-4n}{n^2}\right)^4 = \frac{(1-4n)^4}{n^8}$$

e quindi la serie é convergente per il criterio degli infinitesimi con $p = 4$.

3. Si tratta di calcolare il seguente integrale

$$A = \int_1^e \frac{\log x}{x^3} dx.$$

Si ha, posto $\log x = t$ e successivamente integrando per parti,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 te^{-2t} dt = \Big[-\frac{1}{2} te^{-2t} \Big]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2t} dt \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}. \end{aligned}$$