UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 07.09.2017

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$$

specificando esattamente: dominio, segno, eventuali intersezioni con assi, asintoti, dominio delle derivate prima e seconda, massimi e minimi, flessi e disegnando infine il grafico.

2. Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}+2}.$$

3. Determinare tutte le primitive della funzione

$$f(x) = x \log(x^2 + 1).$$

Determinare infine la primitiva che passa per il punto $(1, \log 2)$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é tutto l'asse reale $I\!R$ tranne l'origine quindi $x \neq 0$. Non ci sono intersezioni con gli assi. Inoltre, ovviamente la funzione é sempre positiva.

Per quanto riguarda gli asintoti si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

quindi la retta $x = 0$ é asintoto verticale sinistro. Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to -\infty} f(x).$$

Quindi la funzione non ammette asintoto orizzontale. Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ non esiste neppure l'asintoto obliquo.

Valutiamo ora la derivata prima. Risulta

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}(2x+1)$$

che si annulla in $x = -\frac{1}{2}$. Si ha che $f'(x) > 0$ per $x > -\frac{1}{2}$ e quindi la funzione é crescente nell'intervallo $f[-\frac{1}{2}, +\infty[$ mentre é decrescente sul resto del dominio. Il punto $-\frac{1}{2}$ é di minimo locale.

Valutiamo ora la derivata seconda. Risulta:

$$f"(x) = e^{-\frac{1}{x}}(\frac{2x^2+2x+1}{x^2}),$$

che si non annulla mai. Inoltre $f"(x) > 0$ sempre nel dominio. Pertanto, la funzione é sempre convessa.

2. La serie da studiare é a segni alterni. Utilizzando il criterio di Leibnitz si ha che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2} = 0$, inoltre poiché $\sqrt{n+1}+2 > \sqrt{n}+2$ risulta $\frac{1}{\sqrt{n+1}+2} < \frac{1}{\sqrt{n}+2}$ e dunque la successione é monotona decrescente. La serie allora converge semplicemente. Non converge assolutamente, infatti si ha $\frac{1}{\sqrt{n}+2} > \frac{1}{n+2}$ e per il criterio del confronto diverge essendo maggiorante di una serie armonica.

3. Si tratta di calcolare l' integrale indefinito di $f(x)$. Si ha integrando per parti due volte

$$\begin{aligned}\int x\log(x^2+1)dx &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C.\end{aligned}$$

Quindi l'insieme delle primitive é dato dalle funzioni

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C.$$

Infine determiniamo la costante C per cui $F(1) = \log 2$. Si ha

$$F(1) = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 + C = \log 2 - \frac{1}{2} + C = \log 2 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$