UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
del 07.02.2019

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$x^2y''(x) - x(x+2)y'(x) + (x+2)y(x) = 0$$

con $y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$

2. Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = xydx + \frac{x^2}{2}dy$$

studiarne l'esattezza ed in caso affermativo determinarne la primitiva F tale che $F(1,1) = 1$.

3. Determinare il baricentro del semicerchio

$$S = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}.$$

Svolgimento

1. Si tratta di un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine due. In questo caso si puó determinare facilmente una soluzione ad esempio $y_1 = x$. Una seconda soluzione si determina grazie alla formula

$$\begin{aligned} y_2 &= x\int \frac{e^{\int \frac{x+2}{x}dx}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{(1+2/x)}}{x^2}dx \\ &= x\int \frac{e^{x+2\log x}}{x^2}dx = x\int \frac{e^x x^2}{x^2}dx = x\int e^x dx = xe^x. \end{aligned}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni é dato da

$$y = C_1 x + C_2 x e^x.$$

Determiniamo la soluzione che verifica le condizioni. Si ha

$$y' = C_1 + C_2 e^x + C_2 x e^x.$$

Quindi

$$y(1) = C_1 + C_2 e = 0, \quad y'(1) = C_1 + C_2 e + C_2 e = 1$$

da cui

$$C_1 = -1, \quad C_2 = \frac{1}{e}.$$

2. La forma differenziale lineare é definita su tutto $\mathbb{R}^2$ che é un insieme convesso. Inoltre si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = x = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

quindi ω essendo chiusa su un convesso é anche esatta. Determiniamo ora le primitive F. Poiché $\frac{\partial F}{\partial x} = xy$ si ha

$$F = \int xy dx = y\frac{x^2}{2} + h(y)$$

Inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + h'(y) = \frac{x^2}{2} \leftrightarrow h(y) = K$$

quindi

$$F = y\frac{x^2}{2} + K.$$

Determiniamo la costante. Si ha $F(1,1) = 1 = \frac{1}{2} + K \Leftrightarrow K = \frac{1}{2}$.

3. L'area del semicerchio é data da $Area = \frac{R^2\pi}{2}$. Inoltre per simmetria il baricentro si deve trovare sull'asse y e quindi le componenti sono $(0, y_0)$. Determiniamo y_0, si ha

$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{2}{R^2\pi}\iint_S y\,dx\,dy = \frac{2}{R^2\pi}\int_{-R}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy \\
&= \frac{2}{R^2\pi}\int_{-R}^{R} dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2}{R^2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)dx = \frac{1}{R^2\pi}\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} \\
&= \frac{1}{R^2\pi}\left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}\frac{R^3}{R^2\pi} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}.
\end{aligned}$$