UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 01.02.2018

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

dove $D = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x^2 + y^2 \geq 1\}$.

2. Determinare la lunghezza dell'arco di curva grafico della funzione $f(x) = x^{3/2}$ per $x \in [1, 4]$.

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y - e^x y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Svolgimento

1. Conviene spezzare il dominio in due parti $D = A \cup B$,

$$A = \{(x, y) \in D : y \leq x\}, \quad B = \{(x, y) \in D : y \geq x\}.$$

Utilizzando le simmetrie del dominio e della funzione stessa, il valore dell'integrale é esattamente il doppio del valore dell'integrale (per esempio) su A. Trasformando in coordinate polari l'insieme A si ottiene l'insieme sul piano polare

$$A' = \{(\theta, \rho) : \theta \in [0, \pi/4], \quad 1 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos\theta}\}.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^{1/\cos\theta} d\rho \\ = & \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{\cos\theta} - 1\right] d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos\theta} d\theta - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ora il primo integrale si puó calcolare utilizzando la sostituzione $t = \tan(\theta/2)$. Si ha, utilizzando le formule di bisezione per la tangente:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan^2(\theta/2)}{1-\tan^2(\theta/2)} d\theta \\ = & \ 2\int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{1}{1-t^2} dt = \int_0^{\tan(\pi/8)} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt \\ = & \left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\tan(\pi/8)} = \log\frac{1+\tan(\pi/8)}{1-\tan(\pi/8)} \\ = & \log\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Moltiplicando per due, otteniamo

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = 2\log\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}} - \frac{\pi}{2} = \log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}.$$

2. Indicata con L la lunghezza, si ha, ponendo $t = 1 + (9/4)x$,

$$\begin{aligned} L &= \int_1^4 \sqrt{1 + |f'(x)|^2}dt = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx \\ &= \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{t}dt = \frac{8}{27}\Big[t^{3/2}\Big]_{13/4}^{10} = \frac{8}{27}\Big[10^{3/2} - \frac{13^{3/2}}{8}\Big]. \end{aligned}$$

3. L'equazione é del tipo di Bernoulli. Ponendo $z = y^{-1}$ l'equazione si trasforma nell'equazione lineare del primo ordine

$$z' = -2z + e^x$$

Calcoliamo la funzione z. Si ha:

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\int 2dx}\left\{\int e^x e^{\int 2dx}dx + c\right\} \\ &= \frac{1}{3}e^x + ce^{-2x}. \end{aligned}$$

Dunque l'integrale generale dell'equazione é

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{3}e^x + ce^{-2x}}.$$

la soluzione del problema di Cauchy si ottiene ponendo $c = 2/3$.