Modelli Matematici

Carlo Bardaro

Capitolo 1

Serie di Fourier

1.1 Preliminari

Sia I un intervallo della retta reale. Denotiamo con $L^1(I)$ lo spazio delle funzioni $f : I \to \mathbb{C}$, $f(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in I$, tali che l'integrale

$$\int_I |f(t)|dt = \int_I \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}dt < +\infty.$$

Qui l'integrale può essere inteso nel senso di Lebesgue, ma ci limiteremo a considerare l'integrale nel senso di Riemann; la limitazione non è determinante perchè nelle applicazioni che seguiranno l'integrabilità alla Riemann è una assunzione soddisfatta.

Lo spazio $L^1(I)$ è uno spazio vettoriale, perchè è facile vedere che se $f, g \in L^1(I)$ e se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, allora $\alpha f + \beta g \in L^1(I)$ e risulta, come è noto,

$$\int_I [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_I f(t)dt + \beta \int_I g(t)dt.$$

Nello spazio $L^1(I)$ è possibile definire anche una nozione di distanza, introducendo la nozione di *norma* in $L^1(I)$, ponendo

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)|dt.$$

Allora la *distanza* tra due funzioni $f, g \in L^1(I)$ sarà data da

$$\|f - g\|_1 = \int_I |f(t) - g(t)|dt.$$

Le seguenti proprietà della norma giustificano la terminologia di distanza usata. Premettiamo che col termine *insieme trascurabile* intendiamo un insieme di punti tali che, alterando in essi il valore della funzione, l' integrale non cambia. Ad esempio sono trascurabili gli insiemi finiti e quelli costituiti da una infinità numerabile di punti. Si hanno:

1. $\|f\|_1 = 0$ se e solo se $f(t) = 0$, ad eccezione al più di un insieme di punti trascurabile.
2. $\|af\|_1 = |a|\|f\|_1$, per ogni costante $a \in \mathbb{C}$ e ogni funzione $f \in L^1(I)$.
3. $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$, per ogni coppia di funzioni $f, g \in L^1(I)$.

Denotiamo ora con $L^2(I)$ lo spazio funzionale costituito dalle funzioni $f : I \to \mathbb{C}$ tali che

$$\int_I |f(t)|^2 dt = \int_I \{u^2(t) + v^2(t)\} dt < +\infty.$$

Anche questo spazio è uno spazio vettoriale e qui la norma in $L^2(I)$ è definita ora dalla

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_I |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2}.$$

Così la distanza tra due funzioni in $L^2(I)$ è data dalla

$$\|f - g\|_2 = \left\{ \int_I |f(t) - g(t)|^2 dt \right\}^{1/2}.$$

In seguito faremo uso delle seguenti proprietà.

Proposizione 1 *Se I è un intervallo limitato allora $L^2(I) \subset L^1(I)$. Inoltre se $f, g \in L^2(I)$, si ha $fg, f\overline{g} \in L^1(I)$ e risulta*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2,$$

e una relazione analoga sussiste per il prodotto $f\overline{g}$.

Qui con $\overline{g(t)}$ abbiamo denotato il coniugato di $g(t)$, cioè se $g(t) = r(t) + is(t)$, $\overline{g(t)} = r(t) - is(t)$.

La proposizione enunciata ci permette di introdurre nello spazio $L^2(I)$ una nozione di ortogonalità tra funzioni di $L^2(I)$, definendo un *prodotto scalare* nel seguente modo:

$$< f, g >= \int_I f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Si osservi che , come accade nel caso classico degli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$, il prodotto scalare è compatibile con la norma nel senso che

$$< f, f >= \int_I f(t)\overline{f(t)}dt = \int_I |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2.$$

Sussistono le seguenti proprietà del prodotto scalare in $L^2(I)$.

Proposizione 2 *Se $f, g, h \in L^2(I), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, sussistono le seguenti proprietá:*

(i) $\overline{< g, f >} =< f, g >$

(ii) $< \alpha f + \beta g, h >= \alpha < f, h > +\beta < g, h >$

Dimostrazione. (i) Osserviamo anzitutto che se $f : I \to \mathbb{C}$ é una funzione integrabile, si ha:

$$Re \int_I f(x)dx = \int_I Re f(x)dx, \quad Im \int_I f(x)dx = \int_I Im f(x)dx.$$

Allora si ha:

$$\begin{aligned} \overline{< g, f >} = Re < g, f > -iIm < g, f >= \int_I \{Re(g\overline{f}) - iIm(g\overline{f})\}dx \\ = \int_I \overline{g\overline{f}}dx = \int_I \overline{g}f dx =< f, g > . \end{aligned}$$

La (ii) segue dalla proprietá di linearitá dell'integrale.

Corollario 1 *Se $f, g, h \in L^2(I), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha:*

$$< h, \alpha f + \beta g >= \overline{\alpha} < h, f > +\overline{\beta} < h, g > .$$

Dimostrazione. Usando la (i) e la (ii) si ha:

$$\begin{aligned} < h, \alpha f + \beta g > &= \overline{< \alpha f + \beta g, h >} = \overline{\alpha < f, h > +\beta < g, h >} \\ &= \overline{\alpha} < h, f > +\overline{\beta} < h, g > . \end{aligned}$$

Due funzioni $f, g \in L^2(I)$ si dicono *ortogonali* se $< f, g >= 0$. È chiaro che la funzione nulla $f(t) = 0$ è ortogonale ad ogni altra funzione (anche la funzione che è nulla quasi dappertutto, con ciò intendendo che è diversa da zero soltanto su un insieme trascurabile).

Un insieme di funzioni $S \subset L^2(I)$ si dice *ortogonale* se per ogni coppia di funzioni $f, g \in S$ risulta $< f, g >= 0$, se $f \neq g$, mentre $< f, f >= \|f\|_2^2 > 0$. L'insieme S si dice *ortonormale* se inoltre si ha $< f, f >= 1$.

È banale provare che un insieme S ortogonale è necessariamente costituito da funzioni linearmente indipendenti, nel senso che preso comunque un numero finito di funzioni $f_1, f_2 \ldots, f_k \in S$, e costanti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ tali che risulta

$$\alpha_1 f_1(t) + \ldots + \alpha_n f_n(t) = 0, \quad \text{per ogni } t \in I,$$

allora $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Nel paragrafo seguente individueremo un insieme infinito di funzioni, ortonormale. Ciò implicherà che lo spazio $L^2(I)$ è di dimensione infinita. Ci occuperemo pertanto della rappresentazione di una funzione $f \in L^2(I)$ in termini delle sue coordinate rispetto alla base ortonormale individuata.

1.2 Serie di Fourier

Consideriamo qui $I = [-T/2, T/2]$, con $T > 0$. Sia $f \in L^2(I)$ una funzione estesa a tutto $\mathbb{R}$ con periodo $T > 0$. Consideriamo poi il seguente insieme di funzioni

$$S = \{e_n(t)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi n i t/T} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Questo insieme S è ortonormale perchè è facile vedere che

$$< e_n, e_m >= \frac{1}{T} \int_I e^{2\pi(n-m)it/T} dt = \delta_{n,m}$$

dove $\delta_{n,m}$ è il simbolo di Kronecker, cioè $\delta_{n,m} = 0$ se $n \neq m$ e $\delta_{n,n} = 1$. Esso viene detto *sistema trigonometrico complesso.*

Pertanto ogni sottoisieme finito di S è anche linearmente indipendente. Per ogni fissato $N \in \mathbb{N}$ denotiamo allora con V^N il sottospazio di $L^2(I)$ generato dall'insieme finito di funzioni $\{e_n(t)\}_{n=-N,\ldots,N}$. Ogni elemento di V^N sarà dato allora da una combinazione lineare delle funzioni e_n. Quindi se $g \in V^N$ si avrà

$$g(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(t), \quad t \in I.$$

Le funzioni $g \in V^N$ vengono chiamate *polinomi trigonometrici di grado* N. Data ora una funzione $f \in L^2(I)$ che non sia un polinomio trigonometrico, ci chiediamo se esiste un polinomio trigonometrico in V^N che disti il meno possibile da f nel senso della distanza in $L^2(I)$. Cioè ci chiediamo se esiste

$$\min_{g \in V^N} \|f - g\|_2.$$

Se questo polinomio esiste ed è unico, esso si chiamerà la *proiezione* di f sul sottospazio V^N. Questo concetto può essere visto come una generalizzazione della nozione di proiezione di un vettore su un sottospazio in uno spazio euclideo. Sussiste il seguente

Teorema 1 *Per ogni $f \in L^2(I)$ esiste ed è unica la proiezione su V^N. Denotata con $\widetilde{f}_N$ tale proiezione, risulta*

$$\widetilde{f}_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(t), \quad t \in I,$$

dove $c_n =< f, e_n >$, per ogni $n = -N, \ldots, N$.

Pertanto, per ogni N, il polinomio trigonometrico $\widetilde{f}_N$ che realizza la migliore approssimazione di f al sottospazio V^N è determinato dai coefficienti

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi n i t/T} dt,$$

per ogni $n = -N, \ldots, N$.

Al variare di N, otteniamo allora la successione di funzioni $\{\widetilde{f}_N\}_N$. Ciascuna funzione può essere vista come una somma parziale bilatera della serie di funzioni

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} < f, e_n > \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi n i t/T}, \quad t \in I.$$

Conglobando allora il fattore $1/\sqrt{T}$ nella definizione dei coefficienti possiamo porre

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi nit/T}dt.$$

I coefficienti c_n si chiamano i *coefficienti di Fourier* della funzione f, e vengono indicati con $\widehat{f}_n$ e la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{2\pi nit/T}$$

la serie di Fourier associata ad f. Le funzioni proiezioni costituiscono le somme parziali della serie di Fourier.

Cosa possiamo dire sulla convergenza della serie di Fourier di una funzione $f \in L^2(I)$? Questo equivale a chiedersi se le proiezioni $\widetilde{f}_N$ convergono in qualche senso a f al tendere di N all'infinito. Sussiste il seguente teorema.

Teorema 2 *Per ogni $f \in L^2(I)$ risulta*

$$\lim_{N\to+\infty} \|f - \widetilde{f}_N\|_2 = 0$$

ed inoltre vale il teorema di Pitagora (relazione di Parseval):

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} |\widehat{f}_n|^2.$$

Il teorema precedente ci dice allora che la serie di Fourier di f converge nella norma di $L^2(I)$ alla funzione f. Ciò si esprime anche dicendo che la serie di Fourier di f converge in media quadratica alla funzione f. Ciò implica quindi che le somme parziali della serie convergono nel senso di $L^2(I)$ alla funzione f. Si faccia attenzione al fatto che questo non implica convergenza puntuale della serie di Fourier. Per avere la convergenza puntuale della serie di Fourier alla funzione f occorrono ipotesi aggiuntive sulla funzione f. Per avare la convergenza uniforme occorrono poi condizioni di regolarità più forti. Accenneremo brevemente a questi risultati nel prossimo paragrafo.

Un caso particolarmente interessante è quando si ha $T = 2\pi$, cioè si considerano funzioni $f \in L^2([-\pi, \pi])$, periodiche di periodo 2π. Le funzioni del sistema trigonomerico assumono ora l'espressione

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

In tal caso l'espressione dei coefficienti di Fourier di f assume la forma

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt,$$

mentre la serie di Fourier di f assume la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_n e^{int}.$$

Tornando al caso generale delle funzioni periodiche di periodo T, se le funzioni sono a valori reali, tutta la teoria esposta fin qui continua a sussistere, rispetto al prodotto scalare in $L^2([-T/2, T/2])$, definito da

$$< f, g >= \int_I f(t)g(t)dt.$$

Usando le formule di Eulero, il sistema trigonometrico complesso, può essere in tal caso sostituito dal sistema ortonornale detto *trigonometrico reale*, costituito dalle funzioni

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2T}},\ \varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(\frac{2n\pi}{T}t),\ \psi_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(\frac{2n\pi}{T}t)\right\}_{n,m\in I\!N}.$$

In tal caso non è difficile provare che i coefficienti di Fourier (normalizzati) della funzione f sono dati dalle formule

$$\widehat{f}_c(n) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\frac{2n\pi}{T}t)dt,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\widehat{f}_s(n) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\frac{2n\pi}{T}t)dt,\ n = 1, 2, \ldots,$$

e la serie di Fourier di f si scrive nella forma

$$\frac{\widehat{f}_c(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{\widehat{f}_c(n)\ \cos(\frac{2n\pi}{T}\ t) + \widehat{f}_s(n)\ \sin(\frac{2n\pi}{T}\ t)\}.$$

Come nel caso complesso questa serie converge in media quadratica ad f.

Nel caso $T = 2\pi$ otteniamo le seguenti espressioni per i coefficienti

$$\widehat{f}_c(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\widehat{f}_s(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt, \;\; n = 1, 2, \ldots,$$

e la serie di Fourier assume la forma

$$\frac{\widehat{f}_c(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{\widehat{f}_c(n)\;\cos nt + \widehat{f}_s(n)\;\sin nt\}.$$

1.3 Convergenza puntuale delle serie di Fourier

Ci limiteremo qui ad assumere $T = 2\pi$ e prenderemo in esame le serie di Fourier di una funzione f in forma reale.

Osserviamo anzitutto che i coefficienti di Fourier della funzione f si possono scrivere anche per ogni funzione $f \in L^1([-\pi, \pi])$ perchè le funzioni seno e coseno sono limitate. Allora la serie di Fourier può essere formalmente scritta anche per tali funzioni. Ma a priori nulla si può dire in generale sul comportamento della serie di Fourier di f, in particolare sulla convergenza puntuale. Dato che le somme parziali di ogni serie trigonometrica sono funzioni periodiche di periodo 2π è allora chiaro che se esse convergono in ogni punto, la somma dovrà essere una funzione periodica di periodo 2π. La periodicità costituisce quindi una restrizione necessaria per una funzione f affinchè la sua serie di Fourier converga alla funzione stessa in tutto $\mathbb{R}$.

Tuttavia la serie di Fourier può convergere in un dato punto t_0 anche ad un valore diverso da $f(t_0)$. Prima di formulare un teorema di convergenza generale per le serie di Fourier di funzioni integrabili, premettiamo la seguente definizione. Una funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ si dice *regolare a tratti* se esiste un numero finito di punti $x_i \in [-\pi, \pi]$, $i = 1, 2, \ldots n$, tali che la restrizione della f su ogni sottointervallo $]x_i, x_{i+1}[$ è di classe $C^1(]x_i, x_{i+1}[)$ e la derivata f' si mantiene limitata in ciascuno degli intervalli detti.

Per esempio, ogni funzione a gradinata è una funzione regolare a tratti. Una tale funzione ha quindi al piú un numero finito di punti di discontinuità di prima specie (perchè?), è sempre derivabile ad eccezione di un numero finito di punti ed esiste un $M > 0$, tale che $|f'(t)| \leq M$, per ogni $t \in [-\pi, \pi]$, ad eccezione dei punti (in numero finito) ove non esiste.

Sussiste il seguente teorema

Teorema 3 *Se* $f : [-\pi, \pi] \rightarrow I\!R$ *è regolare a tratti allora la serie di Fourier di* f *converge in ogni punto di* $[-\pi, \pi]$. *Precisamente, se* f *è continua in un punto* t_0 *interno, allora la serie converge ad* $f(t_0)$; *se la* f *è discontinua in un punto interno* t_0 *la serie converge al valore* $[f(t_0+) + f(t_0-)]/2$, *media aritmetica tra il limite destro e sinistro della* f *in* t_0. *Infine in ciascuno degli estremi la serie converge al valore* $[f(-\pi+) + f(\pi-)]/2$.

Se la funzione f è inizialmente definita sull'intervallo chiuso $[-\pi, \pi]$ allora essa può esser prolungata con periodicità 2π a tutto l'asse reale, a patto di modificare eventualmente il valore assunto da f nel punto π, in modo da ottenere $f(\pi) = f(-\pi)$. La funzione cosí ottenuta verrà nel seguito indicata con $f^\sharp$. Se la funzione f è continua in $[-\pi, \pi]$ e se $f(\pi) = f(-\pi)$ allora la funzione $f^\sharp$ è continua e $2\pi-$periodica su tutto $I\!R$. Se poi la f è anche regolare a tratti, allora la serie di Fourier di f converge in ogni punto di $I\!R$ alla funzione $f^\sharp$.

Se $f : [-\pi, \pi] \rightarrow I\!R$ è una funzione pari, cioè $f(x) = f(-x)$, allora i coefficienti di Fourier $\widehat{f}_s(n)$, con $n = 1, 2, \ldots$, sono tutti nulli. Infatti la funzione $f(x) \sin nx$ è dispari, (cioè $f(-x) \sin(-nx) = -f(x) \sin nx$) e pertanto il suo integrale su $[-\pi, \pi]$ è nullo. La serie di Fourier di una funzione pari si riduce pertanto ad una *serie di soli coseni*, del tipo:

$$\frac{\widehat{f}_c(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_c(n) \cos nx,$$

dove i coefficienti $\widehat{f}_c(k)$ possono essere scritti nella forma:

$$\widehat{f}_c(n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Analogamente se la funzione f è dispari, allora saranno nulli i coefficienti $\widehat{f}_c(n)$ mentre per i coefficienti $\widehat{f}_s(n)$ valgono le formule:

$$\widehat{f}_s(n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Infatti in tal caso la funzione $f(x) \sin nx$ è pari. La serie di Fourier diventa quindi una *serie di soli seni*, del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_s(n) \sin nx.$$

Tutto quanto detto sopra sussiste anche per funzione di periodo generico $T > 0$, utilizzando le definizioni dei coefficienti di Fourier e della serie di Fourier che abbiamo visto nel paragrafo precedente. Mostriamo qui di seguito due esempi.

1. Scriviamo la serie di Fourier della funzione $f : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 2 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

La funzione è estendibile a tutto $\mathbb{R}$ con periodicità $T = 2$. È allora sufficiente calcolare a_n, b_n. Si ha facilmente $\widehat{f_c}(n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $\widehat{f_c}(0) = 3$ e $\widehat{f_s}(n) = [1 - (-1)^n]/n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$. Pertanto si ottiene:

$$f \sim \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{2n-1}$$

In base al teorema di convergenza, la serie di Fourier converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ e la sua somma è data da $f(x)$ per ogni $x \notin \mathbb{Z}$, mentre in ogni intero la somma è $3/2$.

2. Sviluppiamo in serie di coseni la funzione $f(x) = x$, $x \in [0,1]$. Prolunghiamo in modo pari la f a tutto $[-1,1]$, cioè poniamo $\widetilde{f} = |x|$, $x \in [-1,1]$; la $\widetilde{f}$ è poi prolungabile a tutto $\mathbb{R}$ con periodo $T = 2$. Risulta allora $\widetilde{f_s}(n) = 0$, per ogni $n = 1, 2, \ldots$. Inoltre

$$\widehat{f_c}(n) = \int_{-1}^{1} |x| \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1], \; n = 1, 2, \ldots,$$

mentre per $n = 0$ otteniamo $\widehat{f_c}(0) = 1$. Pertanto la serie di Fourier è data dalla:

$$\frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]\cos(n\pi x),$$

che si può scrivere anche nella forma

$$\frac{1}{2} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2\pi^2} \cos((2n-1)\pi x).$$

Per quanto riguarda la convergenza uniforme sussiste il seguente teorema.

Teorema 4 *Sia $f : [-\pi, \pi] \to I\!R$ una funzione di classe $C^1([-\pi, \pi])$, con $f(-\pi) = f(\pi)$ ed estesa a tutto $I\!R$ con periodicità 2π. Allora la serie di Fourier della funzione f converge assolutamente e uniformemente in tutto $I\!R$ alla funzione f.*

Concludiamo questo paragrafo, con il seguente teorema che fornisce una sorprendente proprietà delle serie di Fourier.

Teorema 5 *Sia f una funzione continua e periodica (ad esempio di periodo 2π). Allora la serie di Fourier di f può essere integrata termine a termine, cioè per ogni $x \in I\!R$ si ha:*

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &= \frac{\widehat{f}_c(0)}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \{\widehat{f}_c(n)\cos nt + \widehat{f}_s(n)\sin nt\}dt \\ &= \frac{\widehat{f}_c(0)}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_c(n)\sin nx + \widehat{f}_s(n)(1-\cos nx)}{n}.\end{aligned}$$

Si osservi che la suddetta proprietà sussiste indipendentemente dalla convergenza o meno della serie ad f.

1.4 La trasformata discreta di Fourier

Posto $I = [-T/2, T/2]$ ed una funzione $f : I \to \mathbb{C}$ (estesa con periodo T a tutto $I\!R$), nello spazio $L^1(I)$, si chiama *trasformata discreta di Fourier* di f la successione $\{\widehat{f}_n\}_{n\in \boldsymbol{Z}}$ dei suoi coefficienti di Fourier, defniti dalla

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi nit/T}dt, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Occupiamoci ora del caso particolare in cui $T = 2\pi$. Come abbiamo visto, i coefficienti di Fourier ora assumono la forma

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Elenchiamo ora alcune semplici proprietá della trasformata discreta di Fourier.

Proposizione 3 *Se* $f, g \in L^1([-\pi,\pi])$ *si hanno le seguenti proprietá:*

(i) Posto, per ogni $h \in I\!R$, $\tau_h f(t) = f(t+h)$, *si ha* $(\widehat{\tau_h f})_n = e^{ihn}\hat{f}_n$;

(ii) Posto $g(t) = e^{iht}f(t)$, $g \in L^1([-\pi,\pi])$, *si ha* $\hat{g_n} = \widehat{f_{h+n}}$, $h \in \boldsymbol{Z}$.

(iii) Posto $(\tau_- f)(t) = \overline{f(-t)}$, *si ha* $(\widehat{\tau_- f})_n = \overline{\hat{f}_n}$;

(iv) $(\widehat{f+g})_n = \hat{f}_n + \hat{g_n}$, $(\widehat{cf})_n = c\hat{f}_n$, *per* $c \in \boldsymbol{C}$;

(v) $\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}_n = 0$.

Dimostrazione Le proprietà (i), (ii), (iii), (iv) sono semplici conseguenze delle definizioni. Osserviamo soltanto che nella (i) la f è prolungata con periodicità 2π a tutto $I\!R$.
La (v) è una conseguenza del Teorema 2, nel caso $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Nel caso generale è possibile fornire una prova diretta facendo uso del seguente lemma del quale non riportiamo la dimostrazione:

Lemma 1 *Se* $f \in L^1([-\pi,\pi])$ *allora*

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_1 = 0$$

dove $(\tau_h f)(t) = f(t+h)$, *ed* f *è estesa con periodicità* 2π *fuori dell'intervallo* $[-\pi,\pi]$.

Proviamo ora la (v). Per ogni $n \in \boldsymbol{Z}$ con $n \neq 0$ risulta:

$$\begin{aligned} 2\pi|\hat{f}_n| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\frac{\pi}{k})e^{-ikt}dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f(t+\frac{\pi}{n})|dt. \end{aligned}$$

Dato che $\pi/n \to 0$ per $|n| \to \infty$, l'asserto segue dal Lemma precedente.

Osserviamo che dalla definizione di $\widehat{f_n}$ segue anche che $|\widehat{f_n}| \leq (2\pi)^{-1}\|f\|_1$ per ogni $f \in L^1([-\pi,\pi])$ e quindi la successione dei coefficienti di Fourier è limitata.

Il risultato seguente esprime la trasformata di Fourier della derivata di una funzione periodica f di classe C^1, in termini di quella di f stessa:

Proposizione 4 *Sia f di classe C^1 in $[-\pi, \pi]$ e periodica di periodo 2π. Allora:*

$$\widehat{f'_n} = (in)\widehat{f_n}, \quad n \in \boldsymbol{Z}. \tag{1.1}$$

Dimostrazione Poichè f è di classe C^1, f' è integrabile in $[-\pi, \pi]$. Inoltre, integrando per parti:

$$2\pi\widehat{f'_n} = [f(t)e^{-int}]_{-\pi}^{\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = 2\pi in\widehat{f_n},$$

e quindi l'asserto.

La formula (11) può essere generalizzata in questo modo: se f è di classe C^k ed è periodica di periodo 2π allora

$$\widehat{f_n^{(k)}} = (in)^k\widehat{f_n}, \quad n \in \boldsymbol{Z}. \tag{1.2}$$

Questo può essere dimostrato usando il principio di induzione. Se nella formula precedente prendiamo i moduli, otteniamo $|\widehat{f_n^{(k)}}| = |n|^k|\widehat{f_n}|$ e poichè $|\widehat{f_n^{(k)}}|$ tende a 0 quando $|n| \to \infty$, si ottiene:

$$|\widehat{f_n}| = o(|n|^{-k}), \quad |n| \to \infty. \tag{1.3}$$

Questo mette in evidenza che più è regolare la f, maggiore diventa l'ordine di infinitesimo della successione $\{\widehat{f_n}\}$.

Concludiamo il paragrafo con una proprietà importante dei coefficienti di Fourier. Premettiamo la nozione di prodotto di convoluzione e alcune sue proprietà.

Date due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $2\pi-$ periodiche, definiamo *convoluzione tra f e g*, che denotiamo con $f \star g$, l'integrale

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si dimostra che se $f, g \in L^1([-\pi, \pi])$ allora risulta anche $f \star g \in L^1([-\pi, \pi])$. Inoltre è ovvio che $(f \star g)(x)$ rappresenta una funzione periodica col periodo 2π.

La proposizione seguente mette in luce alcune semplici proprietà del prodotto di convoluzione.

Proposizione 5 *Se* $f, g, h \in L^1([-\pi, \pi])$, *si hanno le seguenti proprietà:*

(i) $f \star g = g \star f$

(ii) $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$

(iii) $(f + g) \star h = (f \star h) + (g \star h)$.

La dimostrazione è una semplice conseguenza della definizione.

Il teorema seguente rappresenta una proprietà fondamentale della trasformata discreta di Fourier: questa trasforma il prodotto di convoluzione $f \star g$ nel prodotto (usuale) delle trasformate $\widehat{f_n}, \widehat{g_n}$.

Teorema 6 *Se* $f, g \in L^1([-\pi, \pi])$ *allora:*

$$(\widehat{f \star g})_n = \widehat{f_n} \cdot \widehat{g_n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.4}$$

dove f, g *sono estese con periodicità* 2π *a tutto* $\mathbb{R}$.

Capitolo 2

La trasformata di Fourier

2.1 Definizione e prime proprietà

Nel Capitolo I abbiamo visto come una funzione periodica possa essere, in taluni casi, sviluppata in serie di Fourier, nel senso della convergenza puntuale. Siccome le somme parziali di una serie trigonometrica rappresentano funzioni periodiche, è chiaro che per avere la convergenza puntuale, in tutto l'asse reale, della serie di Fourier di una funzione $f : I\!R \to I\!R$ alla funzione f stessa, occorre partire da una funzione periodica e dello stesso periodo. Cosí se la funzione f non è periodica, possiamo avere la sviluppabilità soltanto in intervali di lunghezza pari al periodo. Se ad esempio la funzione f è di classe $C^1(I\!R)$, cioè ammette derivata continua in ogni punto di $I\!R$, la sua serie di Fourier converge puntualmente in $I\!R$ non alla f ma alla funzione $f^\sharp$, estensione periodica di f fuori di un intervallo di ampiezza pari al periodo delle somme parziali della serie (ad eccezione degli estremi di tale intervallo).

Tuttavia è molto utile avere a disposizione una rappresentazione di una funzione f non periodica, analoga alla somma di una serie trigonometrica. Ciò è possibile se sostituiamo alla serie un integrale, ottenendo cosí una rappresentazione non discreta di f. In tale rappresentazione il ruolo dei coefficienti di Fourier di f è ora giocato dall'integrale:

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx, \tag{2.1}$$

dove $\lambda \in I\!R$.

La funzione $\widehat{f} : I\!R \to C\!\!\!\!C$ definita dalla (2.1) si chiama *trasformata di Fourier di* f. Occorre dare un senso all'integrale espresso dalla (2.1), cioè occorre introdurre delle ipotesi per le quali (2.1) esista come integrale generalizzato in $I\!R$. Per far ciò sarà sufficiente assumere che f sia assolutamente integrabile in $I\!R$, cioè che esista finito l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Indichiamo con $L^1(I\!R)$ lo spazio di tutte le funzioni f assolutamente integrabili in $I\!R$. Nel prossimo paragrafo ci occuperemo delle proprietà della funzione $\widehat{f}$. Per il momento anticipiamo il fatto che pur essendo $\widehat{f}$ sufficientemente regolare, essa non risulta in generale assolutamente integrabile in $I\!R$, come funzione di λ. Vale tuttavia il seguente:

Teorema 1 *Se $f \in L^1(I\!R)$ è continua e $\widehat{f}$ è assolutamente integrabile in $I\!R$, allora si ha:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \tag{2.2}$$

per ogni $x \in I\!R$.

La formula espressa dal teorema precedente ricostruisce la funzione f a partire dalla funzione $\widehat{f}$, allo stesso modo che la serie di Fourier di f ricostruisce una funzione periodica a partire dai suoi coefficienti di Fourier. La ricostruzione di una funzione dalla sua trasformata di Fourier è di fondamentale importanza nelle applicazioni.

Sussiste il seguente teorema, del quale non daremo la dimostrazione.

Teorema 2 *Sia $f \in L^1(I\!R)$. Allora la funzione $\widehat{f}$ è continua in $I\!R$ ed inoltre:*

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} |\widehat{f}|(\lambda) = 0.$$

Posto

$$C_0(I\!R) = \{f : I\!R \to \mathbb{C} : f \text{ è continua e } \lim_{|x|\to+\infty} |f|(x) = 0\},$$

il teorema precedente afferma che $\widehat{f} \in C_0(I\!R)$, per ogni funzione assolutamente integrabile f.

Il seguente teorema esprime la proprietà di linearità dell'operatore trasformata di Fourier:

Teorema 3 *Se $f, g \in L^1(I\!R)$, e $\alpha, \beta \in C\!\!\!\!C$, risulta:*

$$\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}.$$

ESEMPI (a) Sia $f(t) = e^{-\gamma|t|}, \quad \gamma > 0$. Si ha:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|t|} e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\gamma t} cos(\lambda t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\gamma}{\lambda^2 + \gamma^2}. \end{aligned}$$

(b) Sia

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

con $a > 0$. Si ha:

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-i\lambda t} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{sin(\lambda a)}{\lambda}.$$

Osserviamo che in tal caso $\widehat{f} \notin L^1(I\!R)$, perchè la funzione $\sin(\lambda a)/\lambda$ non è assolutamente integrabile in $I\!R$.

(c) Sia $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}, \quad a > 0$.
In tal caso utilizzando la teoria delle funzioni di variabile complessa, si ha:

$$\widehat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a|\lambda|}, \quad \lambda \in I\!R.$$

(d) Sia $f(t) = e^{-at^2}, \quad a > 0$.
In tal caso, si dimostra che $\widehat{f}$ é l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + (t/2a)y = 0 \\ y(0) = 1/\sqrt{2a}, \end{cases}$$

Da questo, risolvendo l'equazione, segue che

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\lambda^2/4a}.$$

2.2 Proprietà fondamentali della trasformata di Fourier

In questo paragrafo trattiamo delle principali proprietá della trasformata di Fourier in $I\!R$.

Teorema 4 *Sia* $\{f_n\}_n$ *una successione di funzioni in* $L^1(I\!R)$ *convergente in* $L^1(I\!R)$ *ad una funzione* $f \in L^1(I\!R)$, *cioè*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)|dt = 0.$$

Allora:

$$\max_{\lambda\in I\!R} |\widehat{f_n}(\lambda) - \widehat{f}(\lambda)| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Dimostrazione È conseguenza immediata della linearità della trasformata di Fourier e della relazione:

$$\max_{\lambda\in I\!R} |\widehat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt,$$

per ogni f assolutamente integrabile in $I\!R$.

Il teorema seguente è la versione della Proposizione 4 del Cap. I, per la trasformata di Fourier.

Teorema 5 *Sia* $f \in L^1(I\!R) \cap C^1(I\!R)$ *e* $f' \in L^1(I\!R)$. *Allora:*

$$\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda\widehat{f}(\lambda), \quad \lambda \in I\!R. \tag{2.3}$$

(Cioè la trasformata di Fourier trasforma la derivazione nel prodotto per $i\lambda$*).*

Dimostrazione Dall'ipotesi, usando la formula fondamentale del Calcolo Integrale, possiamo scrivere:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(v)dv, \quad t \in I\!R.$$

Dato che $f' \in L^1(I\!R)$, si ha $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$.
Integrando per parti,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\widehat{f'}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}dt \\
&= i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt \\
&= \sqrt{2\pi}(i\lambda)\widehat{f}(\lambda).
\end{aligned}$$

Osservazione. In generale se $f \in L^1(I\!\!R) \cap C^k(I\!\!R), \quad k \in I\!\!N, \quad k \geq 2$, e se $f^{(j)} \in L^1(I\!\!R)$, per ogni $j = 1, \dots, k,$ si ha :

$$\widehat{f^{(k)}}(\lambda) = (i\lambda)^k \widehat{f}(\lambda). \tag{2.4}$$

Corollario 2 *Se* $f \in L^1(I\!\!R) \cap C^k(I\!\!R), \ k \in I\!\!N,$ *e se* $f^{(j)} \in L^1(I\!\!R), \quad j = 1, \dots, k,$ *si ha:*

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} |\lambda|^k |\widehat{f}(\lambda)| = 0. \tag{2.5}$$

Dimostrazione Dalla (2.4), e dal fatto che $\widehat{f^{(k)}}(\lambda) \to 0, \quad |\lambda| \to +\infty$, segue l'asserto.

In particolare se $f \in C^2(I\!\!R) \cap L^1(I\!\!R)$ e $f', f'' \in L^1(I\!\!R)$, si ottiene $\widehat{f} \in L^1(I\!\!R)$.

Il Corollario 1 mette in luce che quante piú derivate ha la f, tanto piú rapidamente $\widehat{f}$ tende a 0, per $|\lambda| \to +\infty$.

Il teorema seguente, del quale non riportiamo la dimostrazione, mostra che la trasformata di Fourier è iniettiva.

Teorema 6 *Sia* $f \in L^1(I\!\!R)$ *una funzione continua. Se* $\widehat{f}(\lambda) = 0,$ *per ogni* $\lambda \in I\!\!R$, *si ha* $f(t) = 0$ *per ogni* $t \in I\!\!R$.

In particolare, se f, g sono funzioni continue e se $\widehat{f}(\lambda) = \widehat{g}(\lambda)$ per ogni $\lambda \in I\!\!R$, si ha $f = g$.

Teorema 7 *(Formula di Parseval). Se* $f, g \in L^1(I\!\!R)$, *si ha:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) g(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\lambda) f(\lambda) d\lambda. \tag{2.6}$$

Un' altra proprietà importante è legata al *prodotto di convoluzione* di due funzioni f, g assolutamente integrabili in $I\!\!R$. Questo prodotto è definito ora dalla formula:

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t) g(t) dt. \tag{2.7}$$

Si può dimostrare che $f \star g$ è ben definito e risulta:

$$\|f \star g\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Inoltre, sussiste il seguente importante:

Teorema 8 *(Teorema di Convoluzione) Per $f, g \in L^1(I\!R)$, si ha:*

$$\widehat{f \star g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda), \quad \lambda \in I\!R. \tag{2.8}$$

Corollario 3 *Siano $f, g \in L^1(I\!R)$, due funzioni continue. Se $\widehat{g} \in L^1(I\!R)$, si ha:*

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda)\ e^{i\lambda x} d\lambda, \tag{2.9}$$

per ogni $x \in I\!R$.

2.3 Altre definizioni di Trasformata di Fourier

In molti testi nei quali viene applicata la trasformata di Fourier, questa viene definita in un modo del tutto equivalente ponendo, per ogni funzione f assolutamente integrabile in $I\!R$

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt,$$

con $\nu \in I\!R$. La motivazione è che λ viene interpretato come una pulsazione $\lambda = 2\pi/T$, e allora si pone $\nu = 1/T$, che viene interpretata come una frequenza. Se f viene interpretato come un segnale, la funzione $\widehat{f}(\nu)$ rappresenta lo spettro delle frequenze del segnale f. Una parte importante della teoria analitica dei segnali fa uso della ricostruzione del segnale f a partire dalla conoscenza dello spettro. Questo è in sostanza il succo del Teorema 1 (formula di inversione).

La teoria della trasformata di Fourier, in relazione alla ricostruzione completa di un segnale, opportunamente campionato, è applicata soprattutto a quei segnali detti *a banda limitata*, cioè quei segnali tali che $\widehat{f}(\nu) = 0$, per ogni $|\nu| > \Omega$, dove Ω è una costante fissata. Qui la costante Ω rappresenta la *larghezza di banda.*

Nella ricostruzione di immagini, è più adatta la teoria della trasformata di Fourier in un assetto multidimensionale. Ci limitiamo qui a definire la trasformata di Fourier di una funzione f definita in tutto lo spazio euclideo $I\!R^N$, assolutamente integrabile in $I\!R^N$, cioè

$$\int_{I\!R^N} |f(\mathtt{x})| d\mathtt{x} < +\infty,$$

dove qui l'integrale è un integrale multiplo e $d\mathtt{x}$ è la misura di Peano-Jordan (o Lebesgue).

Indicando con $\cdot$ il prodotto scalare tra due vettori di $I\!R^N$, possiamo definire la trasformata di Fourier nel seguente modo:

$$\widehat{f}(\mathtt{y}) = \int_{I\!R^N} f(\mathtt{x}) e^{-i2\pi \mathtt{x}\cdot\mathtt{y}} d\mathtt{x}.$$

Per la trasformata di Fourier multidimensionale sussistono proprietà analoghe a quelle viste in precedenza. In particolare, la funzione $\widehat{f}$ è una funzione continua ed inoltre

$$\lim_{|\mathtt{y}|\to+\infty} \widehat{f}(\mathtt{y}) = 0.$$

Anche il teorema sul prodotto di convoluzione sussiste inalterato.

Per esempio nel caso $N = 2$ la trasformata di Fourier di una funzione assolutamente integrabile in $I\!R^2$ è definita da

$$\widehat{f}(\xi, \eta) = \int_{I\!R^2} f(x, y) e^{-i2\pi[\xi x + \eta y]} dx dy.$$

Introdurremo ora un altro tipo di trasformata definita per funzioni assolutamente integrabili definite in $I\!R^n$, che ha rilevanza in tomografia e che è strettamente collegata con la trasformata multidimensionale di Fourier. Illustreremo brevemente qui il caso $n = 2$. Prenderemo quindi in considerazione funzioni $f : I\!R^2 \to I\!R$. Questa trasformata è associata al problema della ricostruzione di f attraverso i valori dei suoi integrali curvilinei su fasci di rette.

Sia dunque $f : I\!R^2 \to I\!R$ una funzione in $L^1(I\!R^n)$ che supporremo continua. Posto

$$\Gamma = \{(x, y) \in I\!R^2 : \lambda_1 x + \lambda_2 y = c\},$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in I\!R^2$ non entrambi nulli e $c \in I\!R$, definiamo *Trasformata di Radon* di f la funzione

$$\mathcal{R}f(\lambda_1, \lambda_1; c) = F(\lambda_1, \lambda_1; c) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \int_\Gamma f(x, y) ds,$$

dove l' integrale curvilineo su Γ è fatto rispetto alla lunghezza d'arco ds.

Se consideriamo ora una retta passante per un fissato punto (x_0, y_0) di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \lambda_1 t \\ y(t) = y_0 + \lambda_2 t, \end{cases}$$

con $t \in I\!R$, allora, tenendo conto che $ds = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} dt$, si ha facilmente

$$F(\lambda_1, \lambda_1; c) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0 + \lambda_1 t, y_0 + \lambda_2 t) dt.$$

In tomografia si considera un fascio di rette parallele, orientate, che formano un angolo θ con con l'asse y. Sia $(x_0, y_0) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$ un punto a distanza r dall'origine e consideriamo la retta di parametri direttori $(-\sin\theta, \cos\theta)$ passante per (x_0, y_0). Le equazioni parametriche di tale retta sono date da $(t \in I\!R)$

$$\begin{cases} x(t) = r \cos\theta - t \sin\theta \\ y(t) = r \cos\theta + t \cos\theta \end{cases}$$

mentre l'equazione cartesiana è data da $\cos\theta \; x - \sin\theta \; y = r$. La trasformata di Radon assume allora la forma

$$F(\lambda_1, \lambda_2; c) \equiv p(r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r \cos\theta - t \sin\theta, r \sin\theta + t \cos\theta) dt.$$

La funzione p si chiama *sinogramma* di f e ha le seguenti proprietà:

1. $p(r, \theta) = p(r, \theta + 2\pi)$, per ogni fissato r.
2. $p(r, \theta) = p(-r, \theta \pm \pi)$.

Il problema fondamentale è ora quello di ricostruire f a partire dalla sua trasformata di Radon, cioè disporre di una formula di inversione del tipo

$$f(x, y) = \mathcal{R}^{-1}[p(r, \theta)],$$

che permetta di ricostruire f dal suo sinogramma p. Ciò è possibile farlo, utilizzando il Teorema di proiezione che ora illustreremo.

A tale scopo sia $\widehat{f}(\xi,\eta)$ la trasformata di Fourier (2-dimensionale) di f. Fissato poi $\theta \in [0,2\pi]$, posto $p_\theta(r) = p(\theta,r)$, denotiamo con $\widehat{p_\theta}(u)$ la trasformata (uno-dimensionale) di Fourier di p_θ nella forma

$$\widehat{p_\theta}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(r) e^{-2\pi i u r} dr.$$

Allora il teorema della proiezione stabilisce che, facendo variare θ,

$$\widehat{p_\theta}(|z|) = \widehat{p}(|z|,\theta) = \widehat{f}(z\cos\theta, z\sin\theta),$$

cioè la trasformata di Fourier (uno-dimensionale) della trasformata di Radon di f coincide con la trasformata di Fourier (bidimensionale) di f.

Usando la formula precedente, possiamo utilizzare il seguente algoritmo per il calcolo di $f(x,y)$:

(a) Calcolare la trasformata di Fourier di $p_\theta(r)$, per ogni fissato valore di θ.

(b) Calcolare la trasformata inversa di Fourier (2-dimensionale), che denotiamo con $\mathcal{F}^{-1}$ di $\widehat{f} = \widehat{p_\theta}$, cioè

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(\xi,\eta)] = f(x,y),$$

sotto le ipotesi per le quali la trasformata inversa è integrabile.

Una volta calcolata la trasformata di Fourier in (a), occorre poi calcolare, per interpolazione, la trasformata 2-dimensionale $\widehat{p}(|z|,\theta)$.

Un' altra formula di ricostruzione, evita l'uso dell'interpolazione, scrivendo in forma polare la trasformata di Fourier 2-dimensionale, ottenendo (la dimostrazione è omessa):

$$f(x,y) = \int_0^\pi p^*(r,\theta) d\theta$$

dove

$$p^*(r,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P^*(z,\theta) e^{2\pi i z r} dz$$

e $P^*(z,\theta) = \widehat{p}(z,\theta)|z|$. Pertanto la funzione $f(x,y)$ può essere ricostruita dalla trasformata (uno-dimesnionale) inversa di Fourier della funzione $p^*(z,\theta)$. Il procedimento ha un senso se tutte le operazioni fatte sono ovviamente possibili, in particolare se $P^*(\cdot,\theta)$ è assolutamente integrabile come funzione di z.

2.4 Il Teorema di Campionamento

Sia $f : I\!R \to I\!R$ una funzione continua assegnata. Il problema di cui ci occupiamo in questo paragrafo è quello della ricostruzione della f a partire da certi valori campionati $f_n = f(nT),\ n \in \boldsymbol{Z}$, con $T > 0$ opportuno.

Questo problema è di fondamentale importanza nella teoria dei segnali, perchè è la base teorica su cui si fonda la ricostruzione di segnali. Supponiamo che $f \in L^1(I\!R)$ sia a banda limitata, cioè la sua trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si annulla al di fuori di un intervallo compatto. In simboli $\widehat{f}(\lambda) = 0$ per ogni $|\lambda| > \lambda_0$. In queste ipotesi è chiaro che $\widehat{f} \in L^1(I\!R)$ e quindi sussiste la formula di inversione

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda,$$

per ogni $t \in I\!R$.

Infine supponiamo che $\widehat{f}$ sia sviluppabile in serie di Fourier sull'intervallo $[-\lambda_0, \lambda_0]$, prolungando a tutto $I\!R$ la f con periodicità $2\lambda_0$. Sotto le suddette ipotesi sussiste il seguente sviluppo (teorema di campionamento):

Teorema 9 *Sia $T = \pi/\lambda_0$. Per ogni $t \in I\!R$ risulta*

$$f(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin(\lambda_0 t - n\pi)}{\lambda_0 t - n\pi}.$$

Dimostrazione. Scrivendo la serie di Fourier della $\widehat{f}$ in forma complessa risulta:

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{in\pi\lambda/\lambda_0},$$

dove

$$A_n = \frac{1}{2\lambda_0} \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \widehat{f}(\lambda) e^{-in\pi\lambda/\lambda_0} d\lambda, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Sostituendo nella formula di inversione, otteniamo

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{in\pi\lambda/\lambda_0} \right] e^{i\lambda t} d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} e^{i(\lambda_0 t + n\pi)\lambda/\lambda_0} d\lambda \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \left[\frac{e^{i(\lambda_0 t + n\pi)\lambda/\lambda_0}}{i(\lambda_0 t + n\pi)/\lambda_0} \right]_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \\
&= \lambda_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{\sin(\lambda_0 t + n\pi)}{\lambda_0 t + n\pi}.
\end{aligned}
$$

Sempre dalla formula di inversione ponendo $t = nT$, $n \in \boldsymbol{Z}$, si ha:

$$
f_n = f(nT) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \widehat{f} e^{in\lambda T} d\lambda,
$$

mentre scrivendo i coefficienti di Fourier di $\widehat{f}$ cambiando n in $-n$ si ottiene

$$
A_{-n} = \frac{1}{2\lambda_0} \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \widehat{f} e^{in\pi\lambda/\lambda_0} d\lambda.
$$

Scegliendo allora $T = \pi/\lambda_0$ si ha

$$
f_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_0 A_{-n}.
$$

Sostituendo nella serie otteniamo quindi

$$
f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{-n} \frac{\sin(\lambda_0 t + n\pi)}{\lambda_0 t + n\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\sin(\lambda_0 t - n\pi)}{\lambda_0 t - n\pi},
$$

cioè l'asserto.

Ponendo

$$
sinc(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}
$$

la formula espressa dal teorema di campionamento si scrive

$$
f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \; sinc(\lambda_0 t - n\pi).
$$

Questa formula fornisce una rappresentazione di $f(t)$ del tipo

$$
f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \varphi_n(t),
$$

dove $f_n = f(nT)$ sono i valori campionati ugualmente spaziati sull'asse reale e le funzioni φ_n non dipendono da f. Si osservi che la scelta del valore di T è fondamentale perchè in tal caso è possibile ricostruire completamente $f(t)$ a partire dai valori f_n. Se invece $T < \pi/\lambda_0$ parte dell'informazione disponibile è ridondante (oversampling), mentre se $T > \pi/\lambda_0$ le informazioni date sono insufficienti e si perviene ad un segnale diverso da $f(t)$, cioè ad una distorsione del segnale stesso.

2.5 Serie sampling generalizzate e la predizione di un segnale

In questo paragrafo interpreteremo una funzione f, continua in $I\!R$, come un *segnale.* In tal caso $\hat{f}$ può essere riguardata come la *funzione frequenza* del segnale f. Essa rappresenta il cosiddetto *spettro* di f.

Ricordiamo che un segnale f si dice *a banda limitata* in un intervallo $[-a, a]$, $a > 0$, se $\widehat{f}(\lambda) = 0$ per $|\lambda| > a$, cioè l'insieme delle frequenze di f è limitato.
Sia $w \in I\!R^+$ un numero fissato e sia f un segnale a banda limitata in $[-\pi w, \pi w]$. Il classico *Sampling Theorem* può essere riletto nei seguenti termini: il segnale f puó essere ricostruito completamente usando i valori campione $f(k/w)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, calcolati nei nodi k/w ugualmente spaziati sull'intero asse reale, attraverso la formula:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/w) sinc[\pi(wt - k)], \quad t \in I\!R, \tag{2.10}$$

dove $sinc\ t = (sint)/t$.

Questo risultato è di fondamentale importanza nella teoria dei segnali, anche se da certi punti di vista non sembra di grande utilità. Ad esempio, la (10) mette in evidenza che per ricostruire il segnale f all'istante t_o, occorre conoscere valori campione $f(k/w)$ non soltanto nel passato, ma anche nel futuro, cosicchè nella predizione dei segnali, questa formula appare del tutto inefficace. Un'altra restrizione è costituita dal fatto che la (10) sussiste per segnali a banda limitata, anche se nella pratica questa assunzione é normalmente utilizzata, senza compromettere la validitá dei modelli matematici.

Tratteremo qui una impostazione generale del problema della ricostruzione dei segnali, non necessariamente a banda limitata, che è stata introdotta recentemente da P.L.Butzer. In questo assetto la (10) sarà verificata in un senso approssimato, ma utilizzando di fatto un *numero finito* di campioni. Il trucco sta nel sostituire la funzione sinc con altre che abbiano un supporto compatto.

Indicheremo qui con $C(I\!\!R)$ lo spazio di tutte le funzioni $f : I\!\!R \to I\!\!R$ uniformemente continue e limitate. Per $f \in C(I\!\!R)$ poniamo $\|f\|_\infty = sup_{t\in I\!\!R}|f(t)|$. Indicheremo poi con $C^{(r)}(I\!\!R)$ lo spazio delle funzioni $f \in C(I\!\!R)$ tali che esiste la derivata r-esima, $r \in I\!\!N$, e $f^{(r)} \in C(I\!\!R)$. Infine indicheremo con $C_c(I\!\!R)$ e $C_c^{(r)}(I\!\!R)$, $r \in I\!\!N$, i sottospazi di $C(I\!\!R)$ e $C^{(r)}(I\!\!R)$ costituiti dalle funzioni a supporto compatto.

Se $\varphi \in C_c(I\!\!R)$ ed $f \in C(I)$, poniamo:

$$(S_w^\varphi f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/w)\varphi(wt-k), \quad t \in I\!\!R, \quad w > 0. \tag{2.11}$$

Osserviamo che poichè φ ha supporto compatto, c'è un intervallo $[-a, a]$ tale che $\varphi(t) = 0$ se $|t| > a$. Questo implica che la serie nella (11) ha solo un numero finito di termini diversi da zero, quelli per i quali $wt - k$ appartiene al supporto di φ. Questo implica anche che $S_w^\varphi \in C(I\!\!R)$, per ogni $w > 0$; inoltre:

$$\|S_w^\varphi\|_\infty \leq m_o(\varphi)\|f\|_\infty, \tag{2.12}$$

dove $m_o(\varphi) = sup_{u\in I\!\!R} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi(u-k)| < +\infty$.

ESERCIZIO Provare la (12) e dimostrare che $m_o(\varphi) < +\infty$.

Sussiste il seguente:

Teorema 10 *Sia $\varphi \in C_c(I\!\!R)$ tale che:*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(u-k) = 1, \quad u \in I\!\!R. \tag{2.13}$$

Se $f : I\!\!R \to I\!\!R$ è una funzione continua in $t_o \in I\!\!R$, allora:

$$\lim_{w\to+\infty} (S_w^\varphi f)(t_o) = f(t_o). \tag{2.14}$$

Se $f \in C(I\!\!R)$, *allora:*

$$\lim_{w \to +\infty} \|S_w^{\varphi} f - f\|_{\infty} = 0, \tag{2.15}$$

cioè S_w^{φ} *è uniformemente convergente ad* f *per* $w \to +\infty$.

Dimostrazione Proviamo la (14). Dato $\varepsilon > 0$, per la continuità di f in t_o, esiste $\delta > 0$ tale che :

$$|f(t_o) - f(k/w)| < \varepsilon,$$

se $|t_o - k/w| < \delta$. Se $w > 0$, scriviamo, per la (13):

$$\begin{aligned} |f(t_o) - (S_w^{\varphi})(t_o)| &= |\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t_o)\varphi(wt_o - k) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/w)\varphi(wt_o - k)| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(t_o) - f(k/w)||\varphi(wt_o - k)| \\ &= (\sum_{(1)} + \sum_{(2)})|f(t_o) - f(k/w)||\varphi(wt_o - k)| \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

dove $\sum_{(1)}$ è la sommatoria estesa a tutti i $k \in \boldsymbol{Z}$ tali che $|wt_o - k| < \delta w$, mentre $\sum_{(2)}$ è estesa ai $k \in \boldsymbol{Z}$ tali che $|wt_o - k| \geq \delta w$.
Ora $I_1 < \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi(wt_o - k)| \leq \varepsilon\ m_o(\varphi)$. Inoltre tenendo fissato il $\delta > 0$, possiamo scegliere $w > 0$ così grande che il supporto di φ sia contenuto in $[-\delta w, \delta w]$. In tal modo $I_2 = 0$ e da questo segue la (14).
La (15) segue in modo analogo, tenendo conto del fatto che essendo $f \in C(I\!\!R)$, il δ può essere scelto indipendentemente da t.

Corollario 4 *Supponiamo che sussistano le condizioni del Teorema 10. Se, in più,* φ *ha supporto compatto in* $]0, +\infty[$, *allora, in ogni punto* t_o *di continuità di* f *risulta:*

$$\begin{aligned} \lim_{w \to +\infty} (S_w^{\varphi})(t_o) &= \lim_{w \to +\infty} \sum_{(k/w) < t_o} f(k/w)\varphi(wt_o - k) \\ &= f(t_o). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Nella (16) la sommatoria è ora estesa a tutti i k *tali che* $k < t_o w$.

Dimostrazione Dato che il supporto di φ è contenuto in $]0,+\infty[$, $\varphi(wt_o - k) = 0$ se $k/w \geq t_o$. Pertanto:

$$(S_w^{\varphi})(t_o) = \sum_{k/w<t_o} f(k/w)\varphi(wt_o - k).$$

L'asserto segue dal Teorema 10.

La (16) è importante poichè consente di *predire* il segnale in t_o usando solo un numero finito di campioni scelti nel passato di t_o. Osserviamo anche che la (13) è necessaria per la (15), nel senso che se vale la (15) per ogni $f \in C(\mathbb{R})$, allora sussiste la (13). Pertanto è utile avere a disposizione alcune condizioni sulla φ, in modo che valga la (13) e, soprattutto, siano agevoli da controllare. A tale scopo enunciamo il seguente:

Teorema 11 *Se $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, la condizione (13) è equivalente alla:*

$$\sqrt{2\pi}\hat{\varphi}(2\pi k) = \begin{cases} 1 & se\ k = 0 \\ 0 & se\ k \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\} \end{cases} \tag{2.17}$$

Dimostrazione È omessa. Essa si basa sulla *formula di Poisson* :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(u-k) \cong \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(2\pi k)e^{i2\pi k},$$

dove $\cong$ significa che la seconda serie è la serie di Fourier della funzione (1-periodica) a sinistra.

ESEMPIO Se $n \in \mathbb{N}$, definiamo le funzioni *central B-splines*, ponendo:

$$M_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{n}{j} \left(\frac{n}{2} + t - j\right)_+^{n-1},$$

dove, se $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$, abbiamo posto $x_+^r = max\{x^r, 0\}$.
Se $n = 2$, otteniamo per esempio la funzione:

$$M_2(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 0 \end{cases}$$

mentre, se $n = 3$,:

$$M_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(|t| + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(|t| + \frac{1}{2}\right)^2, & |t| \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left(-|t| + \frac{3}{2}\right)^2, & \frac{1}{2} < |t| \le \frac{3}{2} \\ 0, & |t| > \frac{3}{2} \end{cases}$$

È possibile mostrare che per $n \geq 3$ vale la formula ricorsiva:

$$M_n(t) = \frac{((n/2)+t)M_{n-1}(t+1/2) + ((n/2)-t)M_{n-1}(t-1/2)}{n-1}.$$

Inoltre risulta:

$$\widehat{M_n}(\lambda) = \left[\frac{sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right]^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.18}$$

e quindi si ha:

$$\widehat{M_n}(2\pi k) = 0, \quad k \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}, \quad \widehat{M_n}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Allo scopo di studiare l'ordine di approssimazione nella (15), introduciamo la notazione seguente: se $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, poniamo:

$$m_r(\varphi) = sup_{u\in\mathbb{R}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u-k|^r |\varphi(u-k)|,$$

dove $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$.

sussiste il seguente:

Teorema 12 *Sia $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$. Supponiamo che per qualche $r \in \mathbb{N}$ risulti:*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (u-k)^j \varphi(u-k) = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & j = 1, 2, \ldots, r-1 \end{cases} \tag{2.19}$$

per ogni $u \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\|f - S_w^{\varphi}\|_{C(\mathbb{R})} \leq \frac{m_r(\varphi)}{r!} \|f^{(r)}\|_{C(\mathbb{R})} w^{-r}, \tag{2.20}$$

per $f \in C^{(r)}(\mathbb{R})$, $w > 0$.

Dimostrazione Applichiamo alla f la formula di Taylor con il resto integrale d'ordine r :

$$f(u) = \sum_{h=0}^{r-1} \frac{f^{(h)}(t)}{h!}(u-t)^h + \frac{1}{(r-1)!}\int_t^u f^{(r)}(y)(u-y)^{r-1}dy$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}(S_w^{\varphi})(t) - f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/w)\varphi(wt-k) - f(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=0}^{r-1} \frac{f^{(h)}(t)}{h!}((k/w)-t)^h \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r-1)!}\left\{\int_t^{k/w} f^{(r)}(y)((k/w)-y)^{r-1}dy\right\}\varphi(wt-k) - f(t).\end{aligned}$$

per ogni $t \in I\!R$. Da questo segue la (20).

Osserviamo che una condizione equivalente alla (19) per funzioni $\varphi \in C_c(I\!R)$, è espressa dalla seguente:

$$\hat{\varphi}^{(j)}(2\pi k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2\pi}, & k = j = 0 \\ 0, & k \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}, \quad j = 0 \\ 0, & k \in \boldsymbol{Z}, \quad j = 1, 2, \ldots, r-1 \end{cases} \tag{2.21}$$

ESEMPIO Se $r = 2$, il nucleo:

$$\varphi_2(t) = 3M_2(t-2) - 2M_2(t-3),$$

verifica (19). Inoltre, in tal caso, $m_r(\varphi_2)/r! \leq 15$, e:

$$\|f - S_w^{\varphi_2} f\|_{C(I\!R)} = O(w^{-2}), \quad w \to +\infty.$$

Se $r = 3$, possiamo prendere:

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{8}\{47M_3(t-2) - 62M_3(t-3) + 23M_3(t-4)\}.$$

In tal caso, $m_r(\varphi_3)/r! \leq 54$, e:

$$\|f - S_w^{\varphi_3} f\|_{C(I\!R)} = O(w^{-3}), \quad w \to +\infty.$$

La costruzione di tali funzioni si basa sulla risoluzione di sistemi lineari in campo complesso la cui formulazione esula dalla trattazione presente.