Elementi di Analisi di Fourier e di Teoria dell'Approssimazione in Spazi Funzionali

CARLO BARDARO

15.10.1997

Contents

Chapter 1

Serie di Fourier

1.1 Sistemi ortogonali in $L^2(I),\ I \subset \mathbb{R}$

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un generico intervallo che puó essere anche non limitato. Sia $f : I \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile (secondo Lebesgue) in I (cioé posto $f = u + iv$, le funzioni u, v sono misurabili in I). Diremo che f é integrabile secondo Lebesgue in I se lo é la funzione reale $\mid f \mid = (u^2 + v^2)^{1/2}$. Dato che $\mid u \mid \leq \mid f \mid$, and $\mid v \mid \leq \mid f \mid$, se f é integrabile in I, lo sono anche u e v. Con $L^2(I)$ indicheremo lo spazio di tutte le funzioni misurabili $f : I \to \mathbb{C}$ tali che $\mid f \mid^2 \in L^1(I)$. Come al solito noi penseremo gli elementi di $L^2(I)$ come a classi di equivalenza rispetto alla relazione di uguaglianza quasi ovunque. In tal modo $f = g$ in $L^2(I)$ significa $f(x) = g(x)$ quasi ovunque in I. Usando la disuguaglianza di Holder con $p = q = 2$, otteniamo che $f \cdot g \in L^1(I)$ ogniqualvolta $f, g \in L^2(I)$ e si ha:

$$\int_I \mid fg \mid dx \leq \sqrt{\int_I \mid f \mid^2 dx} \cdot \sqrt{\int_I \mid g \mid^2 dx} \tag{1.1}$$

relazione che sinteticamente scriveremo $\| fg \|_1 \leq \| f \|_2 \cdot \| g \|_2$.
Il funzionale $<,>: L^2(I) \times L^2(I) \to \mathbb{C}$ definito dalla:

$$< f, g >= \int_I f(x)\overline{g(x)}dx, f, g \in L^2(I), \tag{1.2}$$

é allora ben definito e si chiama *prodotto scalare* o *prodotto interno* in $L^2(I)$. Dalla (2) é facile vedere che $< f, f >^{1/2}$ é un numero reale non negativo e coincide con$\| f \|_2$.

La proposizione seguente mette in evidenza alcune proprietá fondamentali del prodotto scalare.

Proposizione 1 *Se* $f, g, h \in L^2(I), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *sussistono le seguenti proprietá:*

(i) $\overline{< g, f >} =< f, g >$

(ii) $< \alpha f + \beta g, h >= \alpha < f, h > + \beta < g, h >$

Dimostrazione. (i) Osserviamo anzitutto che se $f : I \to \mathbb{C}$ é una funzione integrabile, si ha:

$$Re \int_I f(x)dx = \int_I Ref(x)dx, Im \int_I f(x)dx = \int_I Imf(x)dx.$$

Allora si ha:

$$\begin{aligned}\overline{< g, f >} = Re < g, f > -iIm < g, f >= \int_I \{Re(g\overline{f}) - iIm(g\overline{f})\}dx \\ = \int_I \overline{g\overline{f}}dx = \int_I \overline{g}fdx =< f, g > .\end{aligned}$$

La (ii) segue dalla proprietá di linearitá dell'integrale di Lebesgue.

Corollario 1 *Se* $f, g, h \in L^2(I), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *si ha:*
$< h, \alpha f + \beta g >= \overline{\alpha} < h, f > + \overline{\beta} < h, g > .$

Dimostrazione. Usando la (i) e la (ii) si ha:

$$\begin{aligned}< h, \alpha f + \beta g >= \overline{< \alpha f + \beta g, h >} = \overline{\alpha < f, h > + \beta < g, h >} \\ = \overline{\alpha} < h, f > + \overline{\beta} < h, g > .\end{aligned}$$

Sia $N = \{\varphi\}_k, k = 0, \dots,$ un insieme numerabile di funzioni in $L^2(I)$ tale che :

$$< \varphi_n, \varphi_m >= 0, n \neq m, < \varphi_n, \varphi_n >= \|\varphi_n\|^2 > 0, n = 0, 1, \dots . \tag{1.3}$$

Diremo che N é un insieme di funzioni *ortogonale* in $L^2(I)$. Diremo poi che N é *ortonormale* se oltre alle (3) risulta anche $\|\varphi_n\|_2 = 1,$ per ogni $n = 0, 1 \dots .$
É facile verificare che se N é ortogonale allora per ogni fissato n, $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é linearmente indipendente. Infatti supponiamo che $c_o, \dots, c_n$ siano costanti

complesse tali che $\sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j = 0$, per quasi ogni $x \in I$. Allora per ogni $k = 0, \dots, n$ si ha:

$$0 =< \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j, \varphi_k >= \sum_{j=0}^{n} c_j < \varphi_j, \varphi_k >= c_k \|\varphi\|_2^2,$$

da cui essendo $\|\varphi_k\|_2 > 0$ segue $c_k = 0$.

Sia $S = \{e_o, e_1, e_2, \dots\} \subset L^2(I)$ un insieme tale che per ogni fissato n l'insieme $S_n = \{e_o, e_1, \dots, e_n\}$ é linearmente indipendente . É allora possibile costruire un insieme N ortonormale, $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \dots\}$ tale che per ogni fissato $n, N_n = \{\varphi_o, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ e S_n generano lo stesso sottospazio di $L^2(I)$. Il procedimento, noto come *processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt* consiste nel costruire $\{\varphi_o, \varphi_1, \dots\}$ ponendo successivamente:

$$\varphi_o = \frac{e_o}{\|e_o\|_2}, \ \varphi_k = \frac{e_k - \sum_{j=0}^{k-1} < e_k, \varphi_j > \varphi_j}{\|e_k - \sum_{j=0}^{k-1} < e_k, \varphi_j > \varphi_j\|_2}, \ k = 1, 2, \dots \tag{1.4}$$

Osserviamo che le funzioni $\varphi_k, k = 0, 1, \dots,$ sono ben definite a causa della lineare indipendenza del sistema $\{e_{o,}, e_1, \dots, e_n\}$, per ogni $n \in I\!N$. Inoltre non é difficile provare che $\{\varphi_o, \varphi_1, \dots\}$ é ortonormale in $L^2(I)$.

ESEMPI

(a) Consideriamo lo spazio $L^2[-1, 1]$ ed il sottoinsieme $S = \{e_o, e_1, \dots\}$ con $e_n(x) = x^n, \ n = 0, 1, \dots$. Il principio di identitá dei polinomi implica che ogni sottoinsieme finito di S é linearmente indipendente. Ortogonalizzando in $L^2[-1, 1]$ l'insieme S otteniamo un insieme ortonormale $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \dots\}$ i cui elementi sono polinomi detti *polinomi di Legendre*. Otteniamo per esempio $\varphi_o = \sqrt{2}/2, \varphi_1 = (\sqrt{3}/2)\ x$, etc...
Si puó dimostrare che i polinomi di Legendre possono essere ottenuti con la *formula di Rodrigues* :

$$\|\varphi_n\|_2 \varphi_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \ n = 0, 1, \dots . \tag{1.5}$$

L'espressione (5) puó essere ottenuta cercando le soluzioni polinomiali dell'*equazione differenziale di Legendre* :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + k(k + 1)y = 0, \ k \in I\!N$$

(b) Consideriamo lo spazio $L^2(I\!R)$ ed il sottoinsieme $S = \{e_o, e_1, \ldots\}$ con $e_n(x) = x^n e^{-x^2/2}$, $n = 0, 1, \ldots$. É facile mostrare che ogni sottoinsieme finito di S é linearmente indipendente. Ortogonalizzando in $L^2(I\!R)$ l'insieme S, otteniamo un insieme ortonormale N i cui elementi sono detti *funzioni di Hermite.*

(c) Ortogonalizzando in $L^2[0, +\infty[$ l'insieme $S = \{e_o, e_1, \ldots\}$ delle funzioni $e_n(x) = x^n e^{-x}$, si ottengono le *funzioni di Laguerre.*

(d) Nello spazio $L^2[-\pi, \pi]$ il sistema $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \ldots\}$, con

$$\varphi_o(x) = 1/\sqrt{2\pi}, \ \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ \varphi_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \tag{1.6}$$

per $n \in I\!N$ é un sistema ortonormale in $L^2[-\pi, \pi]$ detto *sistema trigonometrico reale.*
Un sistema ortonormale di funzioni a valori in $\mathbb{C}$ equivalente a (6) é dato dall'insieme $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{n \in Z}$, detto *sistema trigonometrico complesso.*
Lo studio del sistema trigonometrico occuperá gran parte di questo capitolo, perché é alla base della teoria delle Serie di Fourier.

1.2 Il problema della migliore approssimazione

Sia $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \ldots\}$ un sistema ortonormale in $L^2(I)$ e sia $f : I \to \mathbb{C}$ una funzione in $L^2(I)$. Posto $V^n = \{v_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x), q.o.x \in I : a_k \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \ldots, n\}$, il sottospazio generato da $\{\varphi_o, \varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$, il problema consiste nel minimizzare $\|f - v_n\|_2$ al variare di $v_n \in V^n$ cioé al variare della $(n+1)-$ upla $(a_o, a_1, \ldots, a_n) \in C^{(n+1)}$. Se esiste un'unica $\tilde{v_n} \in V^n$ tale che

$$min_{v_n \in V^n} \|f - v_n\|_2 = \|f - \tilde{v_n}\|_2$$

allora $\tilde{v_n}$ é detto *la proiezione di f su V^n.*
É ovvio che se $f \in V^n$ allora $\tilde{v_n} = f$ minimizza $\|f - v_n\|_2$ in V^n e che $min_{v_n \in V^n} \|f - v_n\|_2 = 0$.
Il teorema seguente mostra che per ogni $f \in L^2(I)$ esiste un'unica $\tilde{v_n} \in V^n$ tale che $\|f - \tilde{v_n}\|_2 = min_{v_n \in V^n} \|f - v_n\|_2$ cioé ogni $f \in L^2(I)$ possiede la proiezione sul sottospazio V^n. Tale proiezione é detta *combinazione lineare di migliore approssimazione ad f in V^n.*

Teorema 1 *Siano* $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \ldots\}$ *un sistema ortonormale in* $L^2(I)$ *ed* $f \in L^2(I)$. *Posto per ogni* $k \in I\!\!N$, $\hat{f}_k =< f, \varphi_k >$ *e, per ogni* $n \in I\!\!N$,

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k \varphi_k(x), \quad v_n(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

risulta:

$$\|f - s_n\|_2 \leq \|f - v_n\|_2 \tag{1.7}$$

per ogni $n \in I\!\!N$, *ed il segno di uguaglianza sussiste se e solo se* $a_k = \hat{f}_k$, *per ogni* $k = 0, 1, \ldots$.

Dimostrazione. Si tratta di provare che $min_{v_n \in V^n} \|f - v_n\|_2 = \|f - s_n\|_2$ cioé che la funzione delle $(n+1)-$ variabili complesse $\{a_o, a_1, \ldots, a_n\}$ definita dalla $F(a_o, a_1, \ldots, a_n) = \|f - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k\|_2$ ammette minimo assoluto e che tale minimo é assunto solo in $(\hat{f}_o, \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n)$.
Risulta anzitutto:

$$\begin{aligned} \|f - v_n\|_2^2 &=< f - v_n, f - v_n > \\ =< f, f > - < f, v_n > - < v_n, f > + < v_n, v_n > \\ = \|f\|_2^2 - < f, v_n > - \overline{< f, v_n >} + \|v_n\|_2^2. \end{aligned}$$

Applicando ora la proposizione 1 e il corollario 1, otteniamo

$$\|v_n\|_2^2 =< v_n, v_n >= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_k \overline{a_j} < \varphi_k, \varphi_j >= \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2$$

mentre $< f, v_n >= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} < f, \varphi_k >= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \hat{f}_k$. Pertanto:

$$\begin{aligned} \|f - v_n\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \hat{f}_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\hat{f}_k} + \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} (a_k - \hat{f}_k)(\overline{a_k} - \overline{\hat{f}_k}) \qquad (1.8) \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |a_k - \hat{f}_k|^2. \end{aligned}$$

Da questo segue che il minimo assoluto esiste ed é assunto se $a_k = \hat{f}_k$, per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$.

I coefficienti $\hat{f}_k =< f, \varphi_k >, k = 0,1,2,\ldots,$ che realizzano le migliori approssimazioni di f al sottospazio V^n , per ogni n, si chiamano *coefficienti di Fourier di* f *rispetto al sistema ortonormale* N e la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k(x)$, definita quasi ovunque, é detta *Serie di Fourier relativa ad* N. La notazione $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k(x)$, significa che la serie a destra é la serie di Fourier associata ad $f \in L^2(I)$ rispetto ad N e non implica alcuna proprietá di convergenza.

ESEMPIO Se N é il sistema trigonometrico reale (esempio d del par.1) la serie

$$\frac{1}{2}\hat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^{\infty}(\hat{f}_c(k)\cos kx + \hat{f}_s(k)\sin kx)$$

dove $\hat{f}_c(k)$, $\hat{f}_s(k)$, sono definiti dalle

$$\hat{f}_c(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx,\ k = 0,1,2,\ldots,\ \ \hat{f}_s(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx,\ k = 1,2,\ldots,$$

é la serie trigonometrica di Fourier generata da f o semplicemente la serie di Fourier di f.

1.3 Proprietá principali dei coefficienti di Fourier

Sussiste il seguente teorema:

Teorema 2 *(Disuguaglianza di Bessel) Siano* $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \ldots\}$ *un sistema ortonormale in* $L^2(I)$, $f \in L^2(I)$. *Allora*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|_2^2. \tag{1.9}$$

Nella (9) vale il segno di uguaglianza se e solo se risulta:

$$\lim_{k\to\infty} \|f - s_k\|_2 = 0,$$

dove le funzioni s_k *sono le somme parziali della serie di Fourier di* f *relativa ad* N.

Dimostrazione Se nella (8) poniamo $a_k = \hat{f}_k$ otteniamo:

$$\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}_k|^2 = \|f - s_n\|_2^2 \geq 0,$$

per ogni $n \in I\!N$ e quindi la (9) segue immediatamente. Ancora con la sostituzione $a_k = \hat{f}_k$ nella (8) otteniamo:

$$\|f - s_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}_k|^2,$$

da cui segue l'asserto.

La relazione (9) nel caso dell'uguaglianza é detta *identitá di Parseval.*

Corollario 2 *Per ogni* $f \in L^2(I)$ *e per ogni sistema ortonormale* $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \ldots\}$, *la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}_k|^2$ *é convergente e quindi* $\lim_{k\to\infty} \hat{f}_k = 0$.

ESEMPIO Se N é il sistema trigonometrico reale in $L^2[-\pi, \pi]$ si ottiene

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \ \cos kx dx = \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \ \sin kx dx = 0.$$

Il seguente risultato dovuto a Riesz e Fischer stabilisce un inverso del teorema precedente.

Teorema 3 *Sia* $\{c_n\}_{n\in I\!N_o}$ *una successione di numeri complessi tale che* $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ *e sia* $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ *un sistema ortonormale in* $L^2(I)$. *Esiste una funzione* $f \in L^2(I)$ *tale che* $c_k = \hat{f}_k =< f, \varphi_k >, k = 0, 1, 2, \ldots$.

Dimostrazione Posto $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k$, si ha

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|_2^2 =< s_n - s_m, s_n - s_m > &= \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{j=n+1}^{m} c_k \overline{c_j} < \varphi_k, \varphi_j > \\ &= \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2. \end{aligned}$$

Dalla convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$, segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\overline{n}$ tale che per ogni $n, m > \overline{n}, \|s_n - s_m\|_2^2 < \varepsilon$. La successione $\{s_n\}$ é allora di Cauchy e siccome $L^2(I)$ é completo, esiste $f \in L^2(I)$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_2 = 0$. Resta da provare che $\hat{f}_k = c_k$. A tale scopo siano n, k con $n \geq k$. Usando l'ortonormalitá di N é facile vedere che $< s_n, \varphi_k >= c_k$ e quindi usando la disuguaglianza di Hölder, si ha:

$$\begin{aligned} |c_k - \hat{f}_k| &= | < s_n, \varphi_k > - < f, \varphi_k > | = | < s_n - f, \varphi_k > | \\ &\leq \|\varphi_k\|_2 \|s_n - f\|_2. \end{aligned}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo $|c_k - \hat{f}_k| = 0$, cioé l'asserto per l'arbitrarietá di k.

OSSERVAZIONE La funzione $f \in L^2(I)$ la cui esistenza é assicurata dal teorema di Riesz-Fischer é tale che

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}_k|^2.$$

Questa é una diretta conseguenza del teorema 2.

Sia $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \ldots\}$ un sistema ortonormale in $L^2(I)$. Se per ogni $f \in L^2(I)$ sussiste l'identitá di Parseval, diremo che N é un *sistema completo* o una *base* in $L^2(I)$. In tal caso, per il teorema 2, ogni $f \in L^2(I)$ é limite in $L^2(I)$ della successione delle somme parziali

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k \varphi_k(x), \quad x \in I$$

e viceversa. Se N é un sistema completo, scriveremo allora

$$f(x) =_2 \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k(x)$$

per denotare $\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_2 = 0$.

ESEMPIO Il sistema trigonometrico in forma reale o complessa é completo in $L^2([-\pi, \pi])$. Questo sará provato in parte dopo il teorema di Fejer.

1.4 Il sistema trigonometrico. La trasformata discreta di Fourier

Consideriamo lo spazio $L^2[-\pi, \pi]$ ed il sistema trigonometrico

$$N = \{\frac{1}{\sqrt{2}\pi}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\}_{n=1,2,\ldots}.$$

La corrispondente serie di Fourier di $f \in L^2[-\pi, \pi]$ si scrive allora

$$f \sim \frac{1}{2}\hat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^{\infty}(\hat{f}_c(k)\cos kx + \hat{f}_s(k)\sin kx),$$

dove

$$\hat{f}_c(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx,\ k = 0, 1, \ldots,\ \hat{f}_s(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, k = 1, 2, \ldots$$

Se scriviamo la serie di Fourier di f rispetto al sistema (trigonometrico) complesso $N = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}_{n\in\boldsymbol{Z}},$ otteniamo

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{ikx},$$

dove i coefficienti $\hat{f}_k$ sono dati dalle formule:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{1.10}$$

In generale una generica serie trigonometrica a coefficienti reali $\{a_k\},\ \{b_k\},$ definita dalla:

$$\frac{1}{2}a_o + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.11}$$

puó essere scritta nella forma complessa (almeno formalmente) usando le formule di Eulero:

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

e ponendo $a_{-k} = a_k,\ b_{-k} = -b_k,\ b_o = 0,\ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, k \in \boldsymbol{Z}.$

Con queste posizioni, otteniamo la serie:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \tag{1.12}$$

le cui somme parziali si scrivono $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$
Viceversa dalla (12) si puó ottenere la (10) ponendo

$$a_k = c_k + c_{-k},\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ b_k = i(c_k - c_{-k}),\ k = 1, 2, \ldots.$$

Queste posizioni giustificano la forma di $\hat{f}_k$ nella (10).

Ora osserviamo che i coefficienti $\hat{f}_c(k),\ \hat{f}_s(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ e $\hat{f}_k,\ k \in \boldsymbol{Z},$ hanno senso anche se $f \in L^1([-\pi, \pi]);$ infatti, per esempio,$|f(x)\cos kx| \leq$

$|f(x)|$, quasi ovunque in $[-\pi,\pi]$. Cosí ad ogni $f \in L^1([-\pi,\pi])$ puó essere associata la serie di Fourier rispetto al sistema trigonometrico (reale o complesso).
Se $f \in L^1([-\pi,\pi])$, la successione $\{\hat{f}_k\}_{k\in \mathbb{Z}}$ si chiama *trasformata discreta di Fourier di* f. La serie di Fourier di f in forma complessa:

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{ikx} \tag{1.13}$$

puó essere vista almeno formalmente, come una formula di inversione della trasformata discreta di Fourier; una formula cioé che consenta di ricostruire la f a partire dala successione $\{\hat{f}_k\}$. Il problema della ricostruzione di f a partire dai coefficienti $\hat{f}_k$ é di grande importanza nelle applicazioni, specie nella teoria dei segnali. Perció dovremo occuparci dello studio della convergenza delle serie di Fourier.

Se ad esempio sapessimo che $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_k| < +\infty$, allora la serie (13) convergerebbe uniformemente ad una funzione g continua e periodica di periodo 2π in $[-\pi,\pi]$. Ma questo non risolve ancora il nostro problema. Dopo il teorema di Fejer proveremo che, nelle ipotesi dette, $f = g$ q.o. in $[-\pi,\pi]$.

Per il momento limitiamoci ad elencare alcune semplici proprietá della trasformata discreta di Fourier.

Proposizione 2 *Se $f, g \in L^1([-\pi,\pi])$ si hanno le seguenti proprietá:*

(i) *Posto, per ogni $h \in \mathbb{R}$, $\tau_h f(x) = f(x+h)$, si ha $(\widehat{\tau_h f})_k = e^{ihk}\hat{f}_k$;*

(ii) *Posto $g(x) = e^{ihx} f(x)$, $g \in L^1([-\pi,\pi])$, si ha $\hat{g}_k = \widehat{f_{h+k}}$, $h \in \mathbb{Z}$.*

(iii) *Posto $(\tau_- f)(x) = \overline{f(-x)}$, si ha $(\widehat{\tau_- f})_k = \overline{\hat{f}_k}$;*

(iv) $(\widehat{f+g})_k = \hat{f}_k + \hat{g}_k$, $(\widehat{cf})_k = c\hat{f}_k$, *per $c \in \mathbb{C}$;*

(v) $\lim_{|k|\to\infty} \hat{f}_k = 0$.

Dimostrazione Le proprietá (i), (ii), (iii), (iv) sono semplici conseguenze delle definizioni. Osserviamo soltanto che nella (i) la f é prolungata con periodicitá 2π a tutto $\mathbb{R}$.
La (v) é una conseguenza del corollario 2, nel caso $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Nel caso generale é possibile fornire una prova diretta facendo uso del seguente lemma del quale non riportiamo la dimostrazione:

Lemma 1 *Se* $f \in L^1([-\pi, \pi])$ *allora*

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_1 = 0$$

dove $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$, *ed* f *é estesa con periodicitá* 2π *fuori dell'intervallo* $[-\pi, \pi]$.

Proviamo ora la (v). Per ogni $k \in \boldsymbol{Z}$ con $k \neq 0$ risulta:

$$\begin{aligned} 2\pi|\hat{f}_k| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \frac{\pi}{k}) e^{-ikx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x + \frac{\pi}{k})| dx. \end{aligned}$$

Dato che $\pi/k \to 0$ per $|k| \to \infty$, l'asserto segue dal Lemma precedente.

Concludiamo questo paragrafo osservando che dalla definizione di $\hat{f}_k$ segue anche che $|\hat{f}_k| \leq (2\pi)^{-1}\|f\|_1$ per ogni $f \in L^1(I\!R)$. Viceversa é possibile dimostrare che esistono successioni $\{a_k\}, k \in \boldsymbol{Z}$, con $|a_k| \leq M$, per ogni $k \in \boldsymbol{Z}$ ed un fissato M e tali che $\lim_{|k| \to \infty} a_k = 0$, ma che non sono la trasformata di alcuna funzione $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Un esempio é dato dalla serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$ dove a_k é la successione definita dalla:

$$a_k = \begin{cases} 1/\log k & \text{se } k = 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{altrove in } \boldsymbol{Z} \end{cases}$$

Il risultato seguente esprime la trasformata di Fourier della derivata di una funzione f assolutamente continua in termini di quella di f stessa:

Proposizione 3 *Sia* f *assolutamente continua in* $[-\pi, \pi]$. *Allora:*

$$\widehat{f'_k} = (ik)\hat{f}_k, \quad k \in \boldsymbol{Z}. \tag{1.14}$$

Dimostrazione Poiché f é assolutamente continua, f' esiste quasi ovunque ed é sommabile in $[-\pi, \pi]$. Inoltre, integrando per parti:

$$2\pi\widehat{f'_k} = [f(x)e^{-ikx}]_{-\pi}^{\pi} + ik \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = 2\pi i k \hat{f}_k,$$

e quindi la (14).

La formula (14) puó essere generalizzata in questo modo: se $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$, $n > 1$, esistono e sono assolutamente continue in $[-\pi, \pi]$, allora esiste quasi ovunque $f^{(n)}$, é sommabile in $[-\pi, \pi]$ e risulta:

$$\widehat{f_k^{(n)}} = (ik)^n \hat{f}_k \quad k \in \boldsymbol{Z}. \tag{1.15}$$

La (15) puó essere dimostrata, a partire dalla (14), usando il principio di induzione. Se nella (15) prendiamo i moduli, otteniamo $|\widehat{f_k^{(n)}}| = |k|^n |\hat{f}_k|$ e poiché $|\widehat{f_k^{(n)}}|$ tende a 0 quando $|k| \to \infty$, si ottiene:

$$|\hat{f}_k| = o(|k|^{-n}), \quad |k| \to \infty. \tag{1.16}$$

Questo mette in evidenza che piú é regolare la f, maggiore diventa l'ordine di infinitesimo della successione $\{\hat{f}_k\}$.

É possibile mostrare anche un "viceversa": se $f \in L^1([-\pi, \pi])$ é tale che esistono un intero $n \in I\!N$ ed una funzione $g \in L^1([-\pi, \pi])$ con $(ik)^n \hat{f}_k = \hat{g}_k$, allora f é quasi ovunque uguale ad una funzione φ tale che $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}$ sono assolutamente continue in $[-\pi, \pi]$. Cioé maggiore é l'ordine di infinitesimo di $\hat{f}_k$, maggiore é il grado di regolaritá della f.

Chapter 2

Convoluzioni in $I\!\!R$

2.1 Notazioni e risultati preliminari

Denoteremo con $\mathcal{C}$ lo spazio di tutte le funzioni $f : I\!\!R \rightarrow I\!\!R$ uniformemente continue e limitate in $I\!\!R$, con la norma usuale:

$$\|f\|_{\mathcal{C}} = \sup_{x \in I\!\!R} |f(x)|. \tag{2.1}$$

Con L^p, $1 \leq p < +\infty$, denoteremo lo spazio di tutte le funzioni $f : I\!\!R \rightarrow I\!\!R$ tali che $|f|^p$ sia integrabile secondo Lebesgue su $I\!\!R$.

Per $f \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$, definiamo:

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|^p du \right\}^{1/p} \tag{2.2}$$

Con L^∞ denotiamo lo spazio di tutte le funzioni misurabili secondo Lebesgue ed essenzialmente limitate, con la norma:

$$\|f\|_\infty = \text{ess.sup}_{x \in I\!\!R} |f(x)|. \tag{2.3}$$

Il fattore $1/\sqrt{2\pi}$ nella (2) é molto conveniente nell'analisi di Fourier; esso é tuttavia omesso in molte trattazioni.

Lo spazio NL^1 é l'insieme delle funzioni $f \in L^1$ che sono *normalizzate* cioé tali che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = \sqrt{2\pi}.$$

Accanto alle note proprietá degli spazi L^p, per le quali si rimanda il lettore ad un testo di *Analisi Reale*, menzioniamo qui un teorema fondamentale per quanto seguirá. Con $X(\mathbb{R})$ denoteremo uno degli spazi $L^p,\ 1 \leq p < +\infty$, o $\mathcal{C}$.

Teorema 1 *(Minkowski) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile in $\mathbb{R}^2$. Se la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definita dalla:*

$$y \longmapsto \|f(\cdot, y)\|_{X(\mathbb{R})}$$

é in L^1, allora:

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\cdot, y) dy \right\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(\cdot, y)\|_{X(\mathbb{R})} dy. \tag{2.4}$$

Dimostrazione Omessa. Osserviamo soltanto che la (4) non é altro che una estensione della classica disuguaglianza di Minkowski.

ESEMPIO Sia $X(\mathbb{R}) = L^1$. In tal caso la funzione g é definita dalla:

$$g(y) = \|f(\cdot, y)\|_{X(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dx.$$

Pertanto la (4) si scrive:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right| dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dx \right\} dy.$$

Anche il prossimo teorema esprime un risultato di grande importanza.

Teorema 2 *(continuitá in media) Se $f \in X(\mathbb{R})$, segue che:*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{X(\mathbb{R})} = 0.$$

Dimostrazione Omessa. Osserviamo che il teorema 2 **non sussiste** in generale per lo spazio L^∞.

2.2 Convoluzioni in $I\!R$

Siano f, g due funzioni definite su $I\!R$ e misurabili su $I\!R$. L'espressione:

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\ g(u) du \tag{2.5}$$

é detta *convoluzione* di f e g.

Teorema 3 *Sia $f \in L^p$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $g \in L^{p'}$, con $p^{-1} + p'^{-1} = 1$. Allora $f \star g \in \mathcal{C}$ e risulta:*

$$\|f \star g\|_{\mathcal{C}} \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \tag{2.6}$$

Inoltre, se $1 < p < +\infty$, $f \star g \in \mathcal{C}_0$, cioé $f \star g \in \mathcal{C}$ e $\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} (f \star g)(x) = 0$. Se $g \in \mathcal{C}_0$, lo stesso vale per $p = 1$.

Dimostrazione Sia $1 \leq p < +\infty$. Poiché, in virtú della disuguaglianza di Hölder, $|(f \star g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$, la convoluzione $f \star g$ esiste per ogni $x \in I\!R$. Inoltre:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2\pi}|(f \star g)(x+h) - (f \star g)(x)| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h-u)\ g(u) du - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\ g(u) du \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h-u) - f(x-u)|\ |g(u)| du \\
&\leq \sqrt{2\pi} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p\ \|g\|_{p'},
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato nuovamente la disuguaglianza di Hölder. Dunque in virtú del teorema 2, applicato con $X(I\!R) = L^p$, segue $(f \star g) \in \mathcal{C}$. É ovvio inoltre che sussiste la (6). Se $p = +\infty$, i ruoli di f, g possono essere scambiati. Sia ora $1 < p < +\infty$. Dato $\varepsilon > 0$ esiste un $a > 0$ tale che:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|u| \geq a} |f(u)|^p\ du \leq \varepsilon^p, \\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|u| \geq a} |g(u)|^{p'}\ du \leq \varepsilon^{p'}.
\end{aligned}$$

Se $x \in I\!R$ é tale che $|x| > 2a$, allora $[x-a, x+a] \subset \{u : |u| > a\}$ e quindi:

$$
\begin{aligned}
&|(f \star g)(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-a}^{a} + \int_{|u|>a} \right\} |f(x-u)\ g(u)| du \\
&\leq \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} |f(x-u)|^p du \right\}^{1/p} \|g\|_{p'} + \|f\|_p \ \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|u|>a} |g(u)|^{p'}\ du \right\}^{1/p'} \\
&\leq \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-a}^{x+a} |f(u)|^p du \right\}^{1/p} \|g\|_{p'} + \varepsilon \|f\|_p \\
&\leq \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|u|>a} |f(u)|^p du \right\}^{1/p} \|g\|_{p'} + \varepsilon \|f\|_p \\
&\leq (\|g\|_{p'} + \|f\|_p)\ \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ció implica che $\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} |(f \star g)(x)| = 0$, cioé $f \star g \in \mathcal{C}_0$.
La dimostrazione é analoga nel caso $p = 1,\ g \in \mathcal{C}_0$.

Un altro risultato é fornito dal seguente teorema del quale non riportiamo la dimostrazione che, peraltro, é sostanzialmente analoga a quella del teorema 3.

Teorema 4 *Sia $f \in X(I\!R)$ e $g \in L^1$. Allora $(f \star g)(x)$ esiste finito, $f \star g \in X(I\!R)$ e :*

$$
\|f \star g\|_{X(I\!R)} \leq \|f\|_{X(I\!R)} \|g\|_1. \tag{2.7}
$$

Riportiamo ora alcune proprietá interessanti dell'operazione di convoluzione. Siano $f, g, h \in L^1$. Risulta:

(i) $f \star g = g \star f$, (il prodottto di convoluzione é commutativo).

(ii) $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$, (il prodotto di convoluzione é distributivo rispetto alla somma).

(iii) $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$, (sussiste la proprietá associativa).

(iv) Se T_a definisce l'operatore di traslazione con $a \in I\!R$, cioé $(T_a f)(x) = f(x + a)$, allora $T_a(f \star g) = T_a f \star g$, (la convoluzione é invariante per traslazioni).

Le dimostrazioni sono semplici conseguenze della definizione. Osserviamo soltanto che nella (iii) il prodotto $(f \star g) \star h$ é ben definito poiché essendo $f, g \in L^1$, anche $f \star g \in L^1$ (teorema 4).

2.3 Funzioni periodiche e loro convoluzioni

Una funzione $f : I\!\!R \rightarrow I\!\!R$ si dice $2\pi-$*periodica* se per ogni $x \in I\!\!R$, $f(x+2\pi) = f(x)$. Se f é definita su un intervallo finito $[a, b[$, attraverso una sostituzione lineare é possibile ottenere una funzione definita in $[-\pi, \pi[$, che puó essere estesa a tutto $I\!\!R$ con periodicitá 2π.

Senza perdita di generalitá, quando si estende f a tutto $I\!\!R$, si puó assumere $f(-\pi) = f(\pi)$.

Denotiamo con $\mathcal{C}_{2\pi}$ lo spazio di tutte le funzioni $2\pi-$ periodiche, continue. Si pone:

$$\|f\|_{\mathcal{C}_{2\pi}} = \sup_{|x| \leq \pi} |f(x)|. \tag{2.8}$$

Ovviamente $\mathcal{C}_{2\pi} \subset \mathcal{C}$ e $\|f\|_{\mathcal{C}_{2\pi}} = \|f\|_{\mathcal{C}}, \quad \forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

La stessa osservazione si applica alla classe $L^{\infty}_{2\pi}$ cioé l'insieme di tutte le funzioni $2\pi-$ periodiche, misurabili secondo Lebesgue, tali che:

$$\|f\|_{L^{\infty}_{2\pi}} = \text{ess.sup}_{|x| \leq \pi} |f(x)| < +\infty. \tag{2.9}$$

La situazione é molto differente per le classi $L^p_{2\pi}$ $1 \leq p \leq +\infty$, di tutte le funzioni $2\pi-$ periodiche, la cui p-esima potenza é integrabile secondo Lebesgue su $[-\pi, \pi]$, con:

$$\|f\|_{L^p_{2\pi}} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|^p du \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{2.10}$$

Prescindendo dalle funzioni quasi ovunque nulle, si ha $L^p \cap L^p_{2\pi} = \emptyset$, $1 \leq p < +\infty$. Per semplicitá di scrittura porremo: $\|f\|_{L^p_{2\pi}} = \|f\|_p$.

Poiché l'integrale in (10) é esteso ad un intervallo finito, si ha $L^p_{2\pi} \subset L^q_{2\pi}$, per ogni $p > q$. In particolare $L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$, per ogni $p > 1$.

Inoltre si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u) du = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(u) du, \tag{2.11}$$

per ogni $a \in I\!R$. Infatti, posto $u = v + 2\pi,$ si ha:

$$\int_{\pi}^{a+\pi} f(u)du = \int_{-\pi}^{a-\pi} f(v)dv$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(u)du &= \left\{ \int_{a-\pi}^{-\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{a+\pi} \right\} f(u)du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(u)du. \end{aligned}$$

Inversamente, é possibile dimostrare che se (11) vale per ogni $a \in I\!R$, allora f é $2\pi-$ periodica.

Nel seguito $X_{2\pi}$ denoterá sempre uno degli spazi $\mathcal{C}_{2\pi},\ L^p_{2\pi},\ 1 \leq p < +\infty$.

Ovviamente sussistono gli analoghi dei teoremi visti in precedenza. In particolare si ha:

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0, \quad \forall f \in X_{2\pi}.$$

Se f, g sono due funzioni $2\pi-$ periodiche definiamo la loro *convoluzione* ponendo:

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\ g(u)du \tag{2.12}$$

Sussiste il seguente:

Teorema 5 *(i) Sia* $f \in L^p_{2\pi},\ 1 \leq p < +\infty, \quad g \in L^{p'}_{2\pi},\ p^{-1} + p'^{-1} = 1$. *Allora* $(f \star g)(x)$ *esiste quasi ovunque,* $f \star g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, *e*

$$\|f \star g\|_{\mathcal{C}_{2\pi}} \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

(ii) Sia $f \in X_{2\pi},\ g \in L^1_{2\pi}$. *Allora* $(f \star g)(x)$ *esiste quasi ovunque,* $f \star g \in X_{2\pi}$ *e*

$$\|f \star g\|_{X_{2\pi}} \leq \|f\|_{X_{2\pi}} \|g\|_1.$$

Il teorema seguente rappresenta una proprietá fondamentale della trasformata discreta di Fourier: questa trasforma il prodotto di convoluzione $f \star g$ nel prodotto (usuale) delle trasformate $\widehat{f},\ \widehat{g}$.

Teorema 6 *Se $f, g \in L^1([-\pi, \pi])$ allora:*

$$(\widehat{f \star g})_k = \widehat{f}_k \; \widehat{g}_k, \quad k \in \boldsymbol{Z}, \tag{2.13}$$

dove f, g sono estese con periodicit 2π a tutto $I\!R$.

Dimostrazione Usando il teorema 5(ii), $f \star g \in L^1([-\pi, \pi])$ e risulta, per ogni $k \in \boldsymbol{Z}$:

$$\begin{aligned}
(\widehat{f \star g})_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \star g)(x) \; e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) g(u) du \right\} e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) e^{-iku} f(x-u) e^{-ik(x-u)} du \right\} dx.
\end{aligned}$$

Applicando ora il teorema di Fubini-Tonelli, otteniamo:

$$(\widehat{f \star g})_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) e^{-iku} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) e^{-ik(x-u)} dx \right\} du.$$

Operando la sostituzione $x - u = t$ nell'integrale interno e tenendo conto della periodicitá di $f(x)e^{-ikx}$ si ottiene la (13).

2.4 Due teoremi di Analisi Funzionale

Si presuppongono noti gli elementi di base della teoria degli spazi di Banach.

Sia $\{T_n\}$ una successione di operatori lineari continui $T_n : X \rightarrow Y$, con X, Y spazi di Banach. Diciamo che T_n *converge fortemente* ad un operatore $T : X \rightarrow Y$, se risulta:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|T_n f - T f\|_Y = 0, \tag{2.14}$$

per ogni $f \in X$.

Analogamente diciamo che $\{T_n\}$ é *fortemente di Cauchy* se risulta:

$$\lim_{m,n \longrightarrow +\infty} \|T_n f - T_m f\|_Y = 0, \tag{2.15}$$

per ogni $f \in X$.

Se indichiamo con $\mathcal{L}(X,Y)$ la classe di tutti gli operatori lineari continui $T : X \rightarrow Y$, definiamo la norma di $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ponendo:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{f\neq 0} \frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X} = \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|T\|_Y.$$

La successione $\{T_n\}$ *converge uniformemente* a T in $\mathcal{L}(X,Y)$ se

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0.$$

Un sottoinsieme $A \subset X$ si dice *denso* in X se per ogni $f \in X$ ed $\varepsilon > 0$, esiste $g \in A$ tale che $\|f - g\|_X < \varepsilon$.

L'insieme $A \subset X$ si dice *fondamentale* in X se la varietá lineare generata da A (cioé l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite di elementi di A) é densa in X.

Sussiste il seguente teorema:

Teorema 7 *(Principio della limitatezza unforme) Sia $\{T_n\}$ una successione di operatori lineari limitati di uno spazio di Banach X in uno spazio normato Y. Se $\{\|T_nf\|_Y\}$ é una successione limitata per ogni $f \in X$, separatamente, cioé per ogni $f \in X$ esiste una costante M_f tale che per ogni $n \in I\!N$, risulta:*

$$\|T_n\|_Y \leq M_f, \tag{2.16}$$

allora la successione $\{\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\}$ é limitata, cioé esiste una costante M tale che:

$$\|T_n\|_Y \leq M\|f\|_X, \quad \forall n \in I\!N, \ \forall f \in X.$$

Il seguente teorema é di grande importanza:

Teorema 8 *(Banach - Steinhaus)*

(a) *Una successione $\{T_n\}$ di operatori lineari limitati di uno spazio di Banach X in uno spazio di Banach Y converge fortemente a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se e solo se* **(i)** *esiste una costante $M > 0$ tale che $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M$ per ogni $n \in I\!N$;* **(ii)** *esiste un sottoinsieme denso $A \subset X$ tale che $\{T_n\}$ é fortemente di Cauchy su A.*

(b) Sia X uno spazio di Banach, $\{T_n\}$ una succesione di operatori lineari continui di X in sé. Allora per ogni $f \in X$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|T_n f - f\|_X = 0, \tag{2.17}$$

se e solo se **(i)** *esiste $M > 0$ tale che $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;* **(ii)** *esiste un sottoinsieme $A \subset X$ denso, tale che (17) vale per ogni $g \in A$.*

2.5 Integrali singolari di funzioni periodiche

Sia ρ un parametro che varia in un insieme $\boldsymbol{A}$ che é o un intervallo (a, b), $0 \leq a < b \leq +\infty$, oppure l'insieme $\mathbb{N}$, e sia ρ_0 uno dei punti $a, b, +\infty$.

Un insieme di funzioni $\{\chi_\rho(x)\}$ é detto *nucleo* se $\chi_\rho \in L^1_{2\pi}$ per ogni $\rho \in \boldsymbol{A}$ e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(u) du = 2\pi. \tag{2.18}$$

Noi diciamo che $\{\chi_\rho(x)\}$ é *limitato* se $\chi_\rho \in L^\infty_{2\pi}$; *continuo* se $\chi_\rho \in \mathcal{C}_{2\pi}$; *pari* se $\chi_\rho(x) = \chi_\rho(-x)$, quasi ovunque; *positivo* se $\chi_\rho(x) \geq 0$ quasi ovunque; tutte le definizioni poste devono essere valide per ogni $\rho \in \boldsymbol{A}$.

Sia $f \in X_{2\pi}$ e $\{\chi_\rho\}$ un nucleo. L'operatore integrale della forma:

$$I_\rho(f; x) = (f \star \chi_\rho)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - u)\ \chi_\rho(u) du \tag{2.19}$$

si dice un *integrale singolare (periodico).*

Diciamo che I_ρ é positivo (continuo), se il corrispondente nucleo χ_ρ é positivo (continuo).

Sussiste il seguente:

Teorema 9 *Se $f \in X_{2\pi}$ e $\{\chi_\rho(x)\}$ é un nucleo, allora $I_\rho(f; x) \in X_{2\pi}$ per ogni $\rho \in \boldsymbol{A}$ e:*

$$\|I_\rho(f; \cdot)\|_{X_{2\pi}} \leq \|\chi_\rho\|_1\ \|f\|_{X_{2\pi}}. \tag{2.20}$$

Inoltre se il nucleo é limitato, $I_\rho(f; x)$ é continuo in x cioé appartiene a $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Dimostrazione É una conseguenza del teorema 5.

Ponendo $I_\rho(f;x) = [I_\rho f](x)$, $\rho \in \boldsymbol{A}$, gli integrali (19) definiscono un operatore lineare $I_\rho : X_{2\pi} \longrightarrow X_{2\pi}$.

Ci proponiamo ora di studiare la convergenza forte degli operatori I_ρ. Di fondamentale importanza, a questo proposito, é la seguente definizione: un nucleo $\{\chi_\rho(x)\}$ si dice *identitá approssimata (periodica)* se, per qualche $M > 0$ risulta:

(+) $\|\chi_\rho\|_1 \leq M, \quad \forall \rho \in \boldsymbol{A}$.

(++) Per ogni $0 < \delta < \pi$ si ha:

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} |\chi_\rho(u)| du = 0.$$

Da quanto precede si ricavano le definizioni di identitá approssimata positiva, pari, limitata, continua.

Teorema 10 *Se il nucleo dell'operatore integrale (19) é una identitá approssimata, allora per ogni $f \in X_{2\pi}$, risulta:*

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \|I_\rho(f;\cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0. \tag{2.21}$$

Dimostrazione A causa della (20) e della (+), l'insieme degli operatori $\{I_\rho\}$, é uniformemente limitato rispetto a ρ. Dalla (18) si ha:

$$I_\rho(f;x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-u) - f(x)]\ \chi_\rho(u) du. \tag{2.22}$$

Se $X_{2\pi} = \mathcal{C}_{2\pi}$, per ogni $0 < \delta < \pi$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \|I_\rho(f;\cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} |\chi_\rho(u)| du \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{|u|\leq\delta} + \int_{\delta\leq|u|\leq\pi}\right\} \|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} |\chi_\rho(u)| du \\ &\equiv I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Poiché f é uniformemente continua, ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un $\delta > 0$ tale che $\|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} \leq \varepsilon$, per ogni $|u| \leq \delta$. Questo implica $I_1 \leq \varepsilon M$. Fissiamo ora δ. Allora:

$$I_2 \leq 2\|f\|_{X_{2\pi}} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} |\chi_\rho(u)| du.$$

In virtú della (++), $I_2 \longrightarrow 0,\ \rho \longrightarrow \rho_0$. Pertanto la (21) vale nel caso $X_{2\pi} = \mathcal{C}_{2\pi}$. Sia ora $X_{2\pi} = L^p_{2\pi},\ 1 \leq p < +\infty$. In tal caso applicando il teorema 1, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\|I_\rho(f;\cdot) - f(\cdot)\|_p &= \left\| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(\cdot - u) - f(u)]\ \chi_\rho(u) du \right\|_p \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|(f(\cdot - u) - f(\cdot))\ \chi_\rho(u)\|_p du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_p |\chi_\rho(u)| du \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{ \int_{|u|\leq\delta} + \int_{|u|>\delta} \right\} \|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_p |\chi_\rho(u)| du \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

In virtú del teorema 2, $I_1 \leq \varepsilon M$, mentre:

$$I_2 \leq 2\|f\|_p \int_{\delta\leq|u|\leq\pi} |\chi_\rho(u)| du$$

da cui l'asserto.

Nel caso in cui $X_{2\pi}$ é sostituito da $L^\infty_{2\pi}$ il teorema 9 non sussiste in generale. Abbiamo invece il seguente:

Teorema 11 *Sia $f \in L^\infty_{2\pi}$. Se il nucleo dell'integrale (19) é una identitá approssimata, allora per ogni $s \in L^1_{2\pi}$, si ha:*

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \int_{-\pi}^{\pi} [I_\rho(f;x) - f(x)]\ s(x) dx = 0. \tag{2.24}$$

La dimostrazione é omessa.

ESEMPIO **Le medie integrali**

Esse sono definite dalla:

$$\mathcal{A}_h(f;x) = \frac{1}{h}\int_{x-h/2}^{x+h/2} f(u) du = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} f(x-u) du. \tag{2.25}$$

Qui $h \in (0, 2\pi)$ e tende a 0^+. Ponendo $\rho = h$, e:

$$\chi_\rho(x) = \frac{2\pi}{h}\tau_{[-h/2,h/2]}(x), \tag{2.26}$$

avendo indicato con τ_A la funzione caratteristica dell'insieme A, l'integrale (25) é del tipo (19). Il nucleo (26) é una identitá approssimata e quindi si ha:

Corollario 1 *Sia $f \in X_{2\pi}$. Allora $\mathcal{A}_h(f;\cdot) \in X_{2\pi} \cap \mathcal{C}_{2\pi}$, é tale che*

$$\|\mathcal{A}_h(f;\cdot)\|_{X_{2\pi}} \leq \|f\|_{X_{2\pi}},$$

per ogni $h \in (0, 2\pi)$. Inoltre risulta:

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|\mathcal{A}_h(f;\cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0.$$

Cosí, ad esempio, ogni funzione integrabile f puó essere approssimata in media da funzioni continue.

Chapter 3

Applicazioni alle serie trigonometriche di Fourier

3.1 Alcune relazioni preliminari

I seguenti teoremi di carattere elementare sono molto utili nello studio delle proprietá di convergenza delle serie di Fourier.

Teorema 1 *Per ogni reale* $x \neq 2m\pi,\ m \in \boldsymbol{Z}$*, risulta:*

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} &= e^{ix}\ \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} \qquad (3.1)\\
&= \frac{sin(nx/2)}{sin(x/2)}\ e^{i(n+1)x/2}
\end{aligned}
$$

Dimostrazione La prima uguaglianza é banale; per la seconda si osservi che, mediante le formule di Eulero, si ha:

$$
\begin{aligned}
e^{ix}\ \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} &= \frac{e^{inx/2}-e^{-inx/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}\ e^{i(n+1)x/2}\\
&= \frac{sin(nx/2)}{sin(x/2)}\ e^{i(n+1)x/2}.
\end{aligned}
$$

Prendendo nella (1) le parti reale ed immaginaria, si ha:

$$
\sum_{k=1}^{n} cos(kx) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ \frac{sin((2n+1)x/2)}{sin(x/2)} \qquad (3.2)
$$

$$\sum_{k=1}^{n} sin(kx) = \frac{sin(nx/2)\ sin((n+1)x/2)}{sin(x/2)} \tag{3.3}$$

Come semplice corollario si ha il seguente:

Teorema 2 *Per ogni* $x \neq 2m\pi, \quad m \in \boldsymbol{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{n} cos(2k-1)x = \frac{sin(2nx)}{2sinx} \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} sin(2k-1)x = \frac{sin^2(nx)}{sinx} \tag{3.5}$$

Dimostrazione Basta osservare che per il teorema 1 risulta:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)x} &= e^{-ix} \sum_{k=1}^{n} e^{ik(2x)} \\ &= \frac{sin(nx)}{sinx}\ e^{inx} \end{aligned}$$

e prendere le parti reale ed immaginaria.

Teorema 3 *Se* $a_1, \ldots, a_n \in I\!R$, *allora:*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_j = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\ a_k \tag{3.6}$$

Dimostrazione Se $n = 1$ la (6) é ovvia. Se é vera la (6), cambiando n con $n+1$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{k} a_j &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_j + \sum_{j=1}^{n+1} a_j = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\ a_k + \sum_{j=1}^{n+1} a_j \\ &= \sum_{k=1}^{n} (n+2-k)\ a_k + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (n+2-k)\ a_k. \end{aligned}$$

Teorema 4 *Se* $0 < r < 1$, *risulta:*

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k\ cos(kx) = \frac{1-r^2}{1-2rcosx+r^2} \tag{3.7}$$

Dimostrazione É noto che se $z \in \mathbb{C}$ é tale che $|z| < 1$, si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1-z}$$

pertanto :

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{1+z}{1-z}$$

Posto $z = re^{ix}$, $0 < r < 1$, e prendendo nella precedente relazione le parti reale ed immaginaria, si ha la (7).

3.2 Serie di Fourier

Un *polinomio trigonometrico* di grado $n \in \mathbb{N}$ é un'espressione del tipo:

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k\ cos(kx) + b_k\ sin(kx)\} \tag{3.8}$$

dove $a_k,\ b_k \in \mathbb{C}$.
La classe di tutti i polinomi di grado n é denotata con $\mathcal{T}_n$.

La serie:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_k\ cos(kx) + b_k\ sin(kx)\} \tag{3.9}$$

é detta *serie trigonometrica.*

Applicando le formule di Eulero, le somme parziali si (9) si scrivono:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\ \sum_{k=1}^{n} \{(a_k - ib_k)\ e^{ikx} + (a_k + ib_k)\ e^{-ikx}\}.$$

Definendo $a_k,\ b_k,\ k \in \mathbb{Z}$, con le posizioni:

$$a_{-k} = a_k, \quad b_{-k} = -b_k, \quad b_0 = 0,$$
$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

otteniamo:

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\ e^{ikx},$$

che é la somma parziale *simmetrica* o *bilatera* della serie:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_k \; e^{ikx}. \tag{3.10}$$

La (10) é la forma complessa della serie trigonometrica (9).

Sia $f \in L^1_{2\pi}$. Se la serie (8) converge uniformemente ad f in $[-\pi, \pi]$, attraverso un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, otteniamo:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \; cosku \; du, \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \; sinku \; du, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Una serie trigonometrica generata in questo modo da una funzione $f \in L^1_{2\pi}$, si dice *serie di Fourier* di f.

Per ogni $f \in L^1_{2\pi}$, i coefficienti a_k, b_k della serie di Fourier di f si chiamano i *coefficienti di Fourier di f in forma reale* e vengono denotati con $\widehat{f}_c(k)$ e $\widehat{f}_s(k)$ rispettivamente. I numeri:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \; e^{-iku} du, \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

si dicono *coefficienti di Fourier di f in forma complessa.*
Le corrispondenti serie trigonometriche:

$$f \sim \frac{1}{2} \; \widehat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \widehat{f}_c(k) \; coskx + \widehat{f}_s(k) \; sinkx \}$$
$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \; e^{ikx},$$

sono rispettivamente le forme reale e complessa della serie di Fourier di f, con somme parziali date rispettivamente da:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2} \; \widehat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^{n} \{ \widehat{f}_c(k) \; coskx + \widehat{f}_s(k) \; sinkx \}$$
$$\sum_{k=-n}^{k=n} \widehat{f}(k) \; e^{ikx}.$$

3.3 Convergenza delle serie di Fourier

Per studiare la convergenza delle serie di Fourier di una funzione $f \in L^1_{2\pi}$ scriviamo le somme parziali $S_n(f,x)$ in termini di "convoluzione". Si ha:

$$\begin{aligned} S_n(f,x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\ \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\{cosku\ coskx + sinku\ sinkx\}\right] du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\ \left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n} cos[k(x-u)]\right\} du. \end{aligned}$$

In virtú della (2) otteniamo:

$$\begin{aligned} D_n(u) &\equiv 1 + 2\sum_{k=1}^{n} coskx \\ &= \begin{cases} \dfrac{sin[(2n+1)x/2]}{sin(x/2)}, & x \neq 2j\pi \\ \\ 2n+1, & x = 2j\pi \end{cases} \end{aligned}$$

con $j \in \boldsymbol{Z}$.
Da questo segue la seguente rappresentazione integrale per S_n :

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\ D_n(u)du \tag{3.11}$$

La successione di funzioni $D_n(u)$ definisce il *nucleo di Dirichlet*, e l'integrale nella (11) si dice *integrale singolare di Dirichlet*.

Allo scopo di stabilire condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza delle serie di Fourier, premettiamo, senza dimostrazione, il seguente:

Lemma 1 *(Riemann-Lebesgue) Sia $f \in L^1(a,b)$, $(a,b) \subset I\!R$. Risulta:*

$$\lim_{\rho\longrightarrow+\infty}\int_a^b f(u)\ \cos\rho u du = \lim_{\rho\longrightarrow+\infty}\int_a^b f(u)\ \sin\rho u du = 0. \tag{3.12}$$

Una conseguenza del lemma 1 é che se $f \in L^1_{2\pi}$, allora i coefficienti di Fourier di f tendono a zero, cioé:

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty}\widehat{f}_c(k) = \lim_{k\longrightarrow+\infty}\widehat{f}_s(k) = 0.$$

Teorema 5 *(Localizzazione di Riemann) Sia $f \in L^1_{2\pi}$. La serie di Fourier di f converge in un punto x_0 ad un fissato punto c, se e solo se per qualche $\delta \in]0,\pi[$, risulta:*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \{f(x_0+u)+f(x_0-u)-2c\} \ \frac{\sin((2n+1)u/2)}{u} \ du = 0. \quad (3.13)$$

Dimostrazione Poniamo $g(x_0,u) = f(x_0+u)+f(x_0-u)-2c$. Si ha:

$$\begin{aligned}
S_n(f,x_0) \ &- \ c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0-u)-c] \ D_n(u) du \\
&= \ \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{0} + \int_0^{\pi} \right\} [f(x_0-u)-c] \ D_n(u) du \\
&= \ \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} [f(x_0+u)-c] \ D_n(u) du + \int_0^{\pi} [f(x_0-u)-c] \ D_n(u) du \right\} \\
&= \ \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} g(x_0,u) \ \frac{\sin((2n+1)u/2)}{u} \ du \\
&+ \ \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} g(x_0,u) \left[\frac{1}{2\sin(u/2)} - \frac{1}{u} \right] \ \sin((2n+1)u/2) \ du \\
&+ \ \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} g(x_0,u) \ \frac{\sin((2n+1)u/2)}{2\sin(u/2)} \ du \\
&\equiv \ I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Si osservi ora che la funzione entro le parentesi quadre in I_2 é limitata in $]0,\delta[$; pertanto applicando il lemma 1, si ha:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (I_2 + I_3) = 0.$$

Da questo segue subito l'asserto.

Corollario 1 *(Dini) Sia $f \in L^1_{2\pi}$. Se esistono $x_0 \in I\!R$ e $\delta \in]0,\pi[$ tali che :*

$$\int_0^\delta |f(x_0+u)+f(x_0-u)-2f(x_0)| \ u^{-1} du < +\infty \quad (3.14)$$

allora risulta:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n(f,x_0) = f(x_0).$$

Dimostrazione Basta osservare che in tal caso la (13) sussiste con $c = f(x_0)$, a causa del lemma 1.

Il risultato espresso dal Corollario 1, ci dice che se vale la (14), per un certo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, allora la serie di Fourier di f converge ad $f(x_0)$ nel punto x_0.

Un'ulteriore condizione sufficiente, deducibile dal teorema 5, é la seguente:

Corollario 2 *(Jordan) Sia $f \in L^1_{2\pi}$ e supponiamo che f sia a variazione limitata in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$. Allora la serie di Fourier di f converge in x_0 a:*

$$\frac{1}{2}\{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\}.$$

Dimostrazione Omessa.

Si osservi che le condizioni di Dini e Jordan non sono in generale implicate dalla sola continuitá di f. Esistono funzioni continue la cui serie di Fourier non converge in qualche punto. Se tuttavia f é assolutamente continua e $2\pi-$periodica, la serie di Fourier converge ad f, in ogni punto di $\mathbb{R}$, per il teorema di Jordan.
Sussiste inoltre il seguente teorema

Teorema 6 *Sia f una funzione assolutamente continua e $2\pi-$periodica. Se $f' \in L^2([-\pi, \pi])$, la serie di Fourier di f é uniformemente convergente ad f in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione Scriviamo anzitutto i coefficienti di Fourier di f in termini di quelli di $f' \in L^2([-\pi, \pi])$. Integrando per parti, usando l'assoluta continuitá di f si ha:

$$\begin{aligned} \hat{f}_c(k) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx dx \\ &= -\frac{1}{k}\hat{f}'_s(k), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

ed analogamente si ha $\hat{f}_s(k) = \hat{f}'_c(k)/k, \quad k = 1, 2, \ldots.$
Allora possiamo scrivere:

$$\frac{\hat{f}_c(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|\hat{f}_c(k)| + |\hat{f}_s(k)|) \tag{3.15}$$

$$= \frac{\hat{f}_c(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|\hat{f}'_c(k)|}{k} + \frac{|\hat{f}'_s(k)|}{k} \right)$$

Dato che $\frac{|\hat{f}'_s(k)|}{k} \leq \frac{1}{2} \left[(\hat{f}'_s(k))^2 + \frac{1}{k^2} \right]$ ed analogamente per $\frac{|\hat{f}'_c(k)|}{k}$, la serie al primo membro della (15) é maggiorata da:

$$\frac{|\hat{f}_c(0)|}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\hat{f}'_s(k))^2 + (\hat{f}'_c(k))^2 \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \tag{3.16}$$

Poiché $f' \in L^2([-\pi, \pi])$ la serie (16) é convergente in virtú della disuguaglianza di Bessel e quindi é convergente la (15). Ma la (15) maggiora la serie di Fourier di f in $\mathbb{R}$ che quindi é totalmente convergente.

3.4 Convergenza in norma

Sussiste il seguente:

Teorema 7 *Se $f \in X_{2\pi}$ risulta:*

$$\|S_n(f, \cdot)\|_{X_{2\pi}} \leq \|D_n\|_1 \; \|f\|_{X_{2\pi}}.$$

Dimostrazione É conseguenza del teorema 4 del Capitolo 2.

Teorema 8 *Posto $L_n = \|D_n\|_1$, risulta:*

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \log\, n + \mathcal{O}(1), \quad n \to +\infty \tag{3.17}$$

Dimostrazione Omessa. Osserviamo soltanto che la (17) implica l'esistenza di una costante $M > 0$ tale che:

$$|L_n - \frac{4}{\pi^2} \log\, n| \leq M,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Pertanto il teorema 9 ci dice che $L_n \to +\infty$, $n \to +\infty$. Infatti dalla relazione precedente ricaviamo:

$$L_n \geq -M + \frac{4}{\pi^2} \log\, n;$$

Ancora, questo implica che $\{D_n\}$ non é un'identitá approssimata e quindi non é possibile applicare il teorema 10 del Capitolo 2.

Sia $f \in X_{2\pi}$ e sia $S_k(f,x)$ la somma parziale k-esima della serie di Fourier di f calcolata nel punto x.

Definiamo *medie di Fejer* della serie di Fourier di f le somme:

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f,x). \tag{3.18}$$

Utilizzando la (11) e ponendo $D_0 = 1$, otteniamo facilmente la seguente rappresentazione integrale:

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \left\{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(u)\right\} du. \tag{3.19}$$

Utilizzando il teorema 3 si ha:

$$\begin{aligned} F_n(x) &\equiv \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}(1 - \frac{k}{n+1}) \cos(kx) \\ &= \begin{cases} (n+1)^{-1} \left(\dfrac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right)^2, & x \neq 2j\pi \\ \\ n+1 & x = 2j\pi \end{cases} \end{aligned}$$

con $j \in \boldsymbol{Z}$.

L'ultima relazione segue dal fatto che, per $j \neq 2j\pi$, $j \in \boldsymbol{Z}$, risulta:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n+1} \left[1 + \sum_{k=1}^{n} D_k(x)\right] \\ &= \frac{1}{n+1} \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 + 2\sum_{j=1}^{k} \cos(jx)\right)\right] \\ &= \frac{1}{n+1} \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((2k+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right] \end{aligned}$$

e quindi, a causa del teorema 2,

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \left\{1 + \frac{1}{\sin(x/2)} \left[\sum_{k=2}^{n+1} \sin((2k-1)x/2)\right]\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1}\left\{1+\frac{1}{\sin(x/2)}\left[\frac{\sin^2((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}-\sin(x/2)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right]^2
\end{aligned}
$$

Pertanto la (18) si scrive:

$$
\sigma_n(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\ F_n(u)\ du, \quad n\in I\!N. \tag{3.20}
$$

L'integrale nella (20) si chiama *integrale singolare di Fejer di* f e $\{F_n\}$ é detto *nucleo di Fejer*.
Esso é positivo, pari, continuo, con parametro $\rho=n$, $\rho_0=+\infty$. Inoltre esso é una identitá approssimata poiché per $0<\delta<\pi$ risulta:

$$
\sup_{\delta\le|x|\le\pi}|F(x)|\le\frac{1}{(n+1)\ \sin^2(\delta/2)}.
$$

Come conseguenza del teorema 10 del Cap. 1, risulta:

Teorema 9 *Se* $f\in X_{2\pi}$, *allora:*

$$
\begin{aligned}
&\|\sigma_n(f,\cdot)\|_{X_{2\pi}}\le\|f\|_{X_{2\pi}} \\
&\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|\sigma_n(f,\cdot)-f(\cdot)\|_{X_{2\pi}}=0.
\end{aligned}
$$

Una conseguenza importante del teorema 10 é il seguente teorema di approssimazione:

Teorema 10 *(Weierstrass) L'insieme di tutti i polinomi trigonometrici forma un sottoinsieme fortemente denso di* $X_{2\pi}$. *In particolare se* $f\in C_{2\pi}$ *allora dato* $\varepsilon>0$ *esistono un* $n\in I\!N$ *ed un polinomio* t_n *di grado* n, *tali che:*

$$
|f(x)-t_n(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in[-\pi,\pi].
$$

Dimostrazione L'asserto é provato se riusciamo a far vedere che $\sigma_n(f,x)$ é un polinomio trigonometrico. Ora dalla (18) si ha:

$$
\sigma_n(f,x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\ \left\{\frac{1}{n+1}\ \sum_{k=0}^{n} D_k(u)\right\}\ du
$$

$$= \frac{\widehat{f_c}(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(1 - \frac{k}{n+1}) \ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \ \cos(ku) \ du$$
$$= \frac{\widehat{f_c}(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(1 - \frac{k}{n+1}) \ \{\widehat{f_c}(k) \ \cos(kx) + \widehat{f_s}(k) \ \sin(kx)\}$$

cioé $\sigma_n(f,\cdot)$ é un polinomio trigonometrico di grado n. L'asserto segue allora dal teorema 10.

Un'altra notevole conseguenza del teorema 9 é il seguente teorema di unicitá dello sviluppo in serie di Fourier.

Teorema 11 *Sia* $f \in X_{2\pi}$. *Se* $\widehat{f_c}(k) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$ *e* $\widehat{f_s}(k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$ *allora* $f(x) = 0,$ *quasi ovunque in* $I\!R$.

Dimostrazione Dall'ipotesi segue che $\sigma_n(f,x) = 0, \ \forall n \in I\!N$ e$\forall x$. Allora dal teorema 9 segue $\|f\|_{X_{2\pi}} = 0$, da cui l'asserto.

Corollario 3 *Una funzione* $f \in X_{2\pi}$ *é univocamente determinata dai coefficienti di Fourier.*

3.5 Completezza del sistema trigonometrico

Sia $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ un sistema ortonormale in $L^2(I), I$ un intervallo di $I\!R$, e sia $f \in L^2(I)$. La disuguaglianza di Bessel implica che la serie di Fourier di f relativa ad N converge in $L^2(I)$. Infatti indicate con $\{s_n(x)\}$ le somme parziali della serie, per $n, m \in I\!N, \ m > n,$ si ha:

$$\|s_m - s_n\|_2^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \hat{f}_j \varphi_j \right\|_2^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |\hat{f}_j|^2,$$

e quindi l'asserto segue dalla convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}_k|^2$ e dalla completezza dello spazio $L^2(I)$.
Indichiamo con $F(\cdot)$ la somma in L^2 della serie di Fourier di f, cioé F verifica $\lim_{n\to+\infty} \|F(\cdot) - s_n\|_2 = 0$.

Lemma 2 *Risulta:*

$$< f - F, \varphi_k >= 0, \ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dimostrazione Osserviamo intanto che per ogni funzione $g \in L^2(I)$ si ha:

$$|< F, g > - < s_n, g > | = | < F - s_n, g > | \leq \|F - s_n\|_2 \|g\|_2$$

e quindi

$$< \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k, g >= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k < \varphi_k, g >, \tag{3.21}$$

per ogni funzione $g \in L^2(I)$. Dalla (21) abbiamo allora, per ogni $j = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} < f - F, \varphi_j > &= < f, \varphi_j > - < F, \varphi_j > \\ &= < f, \varphi_j > - \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k < \varphi_k, \varphi_j > \\ &= < f, \varphi_j > - \hat{f}_j = 0, \end{aligned}$$

cioé l'asserto.

Teorema 12 *Il sistema trigonometrico é completo in* $L^2([-\pi, \pi])$.

Dimostrazione Continuiamo, per semplicitá di scrittura, a denotare con $\varphi_k(x)$, le funzioni del sistema trigonometrico (1.6). Se F é la somma (in $L^2(I)$) della serie di Fourier di f, il lemma 2 implica che $< f - F, \varphi_j >= 0$ per ogni $j = 0, 1, 2, \ldots$; il corollario 3 mostra allora che $f = F$ cioé, per ogni $f \in L^2([-\pi, \pi])$ la serie di Fourier di f converge in L^2 ad f. Questo prova il teorema.

In particolare, usando il teorema 13, abbiamo l'uguaglianza di Parseval:

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{f}_c(0))^2}{2} &+ \sum_{k=1}^{\infty} \{[\hat{f}_c(k)]^2 + [\hat{f}_s(k)]^2\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \end{aligned} \tag{3.22}$$

per ogni $f \in L^2([-\pi, \pi])$.

3.6 $\Theta-$ fattori

Abbiamo visto che il nucleo di Dirichlet non é una identitá approssimata. Questo implica che non é possibile applicare il teorema 10 del Cap. 2. In particolare si dimostra che in generale non c'é convergenza delle serie di Fourier in $L^1_{2\pi}$ o in $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Tuttavia possiamo ottenere la convergenza in norma considerando delle "somme generalizzate" che si ottengono moltiplicando i coefficienti $\widehat{f}_c(k),\ \widehat{f}_s(k)$ per opportuni "fattori" $\Theta(k)$.

Sia $\boldsymbol{A}$ un insieme di parametri i cui elementi indicheremo con ρ. Una famiglia $\{\Theta_\rho(k)\}_{\rho\in\boldsymbol{A}}$ é detta un $\Theta-$*fattore* se $\forall\rho\in\boldsymbol{A},\ \ \Theta_\rho(k)$ é una funzione reale su $\boldsymbol{Z}$ tale che:

(i) $\Theta_\rho\in\ell^1$, cioé $\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}|\Theta_\rho(k)|<+\infty$;

(ii) $\Theta_\rho(0)=1$;

(iii) $\Theta_\rho(k)=\Theta_\rho(-k)$.

Se $f\in L^1_{2\pi}$ possiamo formare le $\Theta-$*medie*:

$$U_\rho(f,x)=\frac{1}{2}\ \widehat{f}_c(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\Theta_\rho(k)\ \{\widehat{f}_c(k)\ cos(kx)+\widehat{f}_s(k)\ sin(kx)\}. \quad (3.23)$$

Poiché $\Theta_\rho\in\ell^1$ e i coefficienti di Fourier sono maggiorati in valore assoluto da $\|f\|_1$, la serie (23) converge assolutamente ed uniformemente e cosí definisce una funzione $U_\rho(f,\cdot)\in\mathcal{C}_{2\pi}$, per ogni $\rho\in\boldsymbol{A}$.

Partendo dalla forma complessa della serie di Fourier di f, otteniamo:

$$U_\rho(f,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Theta_\rho(k)\ \widehat{f}(k)\ e^{ikx}.$$

Tenendo conto delle definizioni di $\widehat{f}_c(k)$ e di $\widehat{f}_s(k)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} U_\rho(f,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)\ \left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}\Theta_\rho(k)\ \cos(ku)\right\}du \quad (3.24)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)\ C_\rho(u)du \end{aligned}$$

dove $C_\rho(x)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\Theta_\rho(k)\ \cos(kx)$.
L'ultimo passaggio nella (24) é giustificato dal fatto che la serie converge

uniformemente. Poiché Θ_ρ é pari, $C_\rho(x)$ definisce un nucleo pari e continuo. L'ipotesi $\Theta_\rho(0) = 1$ implica:

$$\int_{-\pi}^{\pi} C_\rho(u)du = 2\pi.$$

Se le $\Theta-$medie $U_\rho(f,\cdot)$ convergono ad un limite per $\rho \longrightarrow \rho_0$, in qualche senso (in norma, puntualmente etc.) e se il limite coincide con l'usuale somma della serie di Fourier nel caso che questa converga (in norma, puntualmente etc.), allora diciamo che $\{\Theta_\rho(k)\}$ é un *fattore di convergenza* rispetto alla nozione di limite considerata.

Il $\Theta-$fattore definisce cosí un "processo di sommazione". Diciamo che la serie é $\Theta-$*sommabile* e chiameremo il limite la $\Theta-$*somma.*

Sussiste il seguente:

Teorema 13 *Supponiamo che $\{\Theta_\rho(k)\}$ sia un $\Theta-$fattore. Se il corrispondente nucleo $C_\rho(x)$ é una identitá approssimata, per ogni $f \in X_{2\pi}$ si ha:*

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \|U_\rho(f.\cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0 \tag{3.25}$$

cioé la serie di Fourier di f é $\Theta-$sommabile in norma.

ESEMPI

(1) *L'integrale di Abel - Poisson*
Poniamo $\Theta_r(k) = r^{|k|}$, $\boldsymbol{A} = [0,1[$, $\rho_0 = 1$.
Poiché $r \in [0,1[$, é ovvio che $\{\Theta_r\}$ é un $\Theta-$fattore. Esso é detto $\Theta-$*fattore di Abel - Poisson.*

In tal caso la (23) diventa:

$$\begin{aligned} P_r(f,x) &= \frac{1}{2}\,\widehat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^{\infty} r^k\,\{\widehat{f}_c(k)\,\cos(kx) + \widehat{f}_s(k)\,\sin(kx)\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\,\widehat{f}(k)\,e^{ikx}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Le funzioni $P_r(f,x)$ sono le *medie di Abel -Poisson* della serie di Fourier di f. Tenendo conto della (24), otteniamo:

$$P_r(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\;p_r(u)\;du, \tag{3.27}$$

dove, per il teorema 4, si ha:

$$p_r(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \ \cos(kx) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \ \cos x + r^2}.$$

La famiglia $\{p_r\}$ é detto *nucleo di Abel - Poisson* e $P_r(f,x)$ *l'integrale singolare di Abel - Poisson.*
Poiché $\{p_r\}$ é pari, continuo ed é una identitá approssimata, otteniamo:

Corollario 4 *La serie di Fourier di $f \in X_{2\pi}$ é Abel -Poisson sommabile ad f nella norma di $X_{2\pi}$, cioé:*

$$\lim_{r \longrightarrow 1^-} \|P_r(f,\cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0$$

(**2**) *L'integrale singolare di Rogosinski*
Esso é definito dal $\Theta-$fattore:

$$\Theta_n(k) = \begin{cases} \cos(k\pi/(2n+1)), & |k| \leq n \\ 0, & |k| > n \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{A} = I\!N, \quad \rho_0 = +\infty$.
L'integrale corrispondente é:

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \ b_n(u) \ du, \tag{3.28}$$

dove

$$b_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos \ \frac{k\pi}{2n+1} \ \cos(kx).$$

Se $\{D_n\}$ é il nucleo di Dirichlet, si dimostra facilmente che:

$$b_n(x) = \frac{1}{2} \ \left[D_n(x + \frac{\pi}{2n+1}) + D_n(x - \frac{\pi}{2n+1})\right] \tag{3.29}$$

Inoltre:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |b_n(x)| dx \leq 4\pi^2. \tag{3.30}$$

Sussiste il seguente:

Teorema 14 *Per ogni $f \in X_{2\pi}$, l'integrale singolare di Rogosinski converge in norma ad f, per $n \to \infty$.*

Dimostrazione Omessa.

(**3**) *Altri esempi*
Il $\Theta-$fattore definito dalla:

$$\Theta_n(k) = \begin{cases} 1 & |k| \leq n \\ 0 & |k| > n \end{cases}$$

con $\boldsymbol{A} = I\!N$, $\rho_0 = +\infty$, dá luogo all'integrale singolare di Dirichlet, cioé a $S_n(f, x)$.

Il $\Theta-$fattore:

$$\Theta_n(k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|k|}{n+1} & |k| \leq n \\ \\ 0 & |k| > n \end{cases}$$

con $\boldsymbol{A} = I\!N$, $\rho_0 = +\infty$, dá luogo all'integrale singolare di Fejer.

Il $\Theta-$fattore:

$$\Theta_t(k) = e^{-k^2 t}, \quad \boldsymbol{A} = I\!R^+, \quad \rho_0 = +\infty,$$

dá luogo al seguente integrale singolare:

$$W_t(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\ \vartheta_t(u)\ du \tag{3.31}$$

dove

$$\vartheta_t(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t}\ \cos(kx).$$

Questo integrale é detto *integrale singolare di Weierstrass.*

3.7 Criteri di convergenza forte per l'operatore I_ρ

Dal teorema 9 del Cap. 2 segue che l'integrale $I_\rho(f;x)$ definisce una trasformazione lineare I_ρ su $X_{2\pi}$, e si ha:

$$\|I_\rho\|_{\mathcal{L}(X_{2\pi},X_{2\pi})} \leq \|\chi_\rho\|_1, \quad \rho \in \boldsymbol{A}. \tag{3.32}$$

In certi casi é possibile dare un teorema di rappresentazione per la norma di I_ρ, come operatore. Riportiamo qui senza dimostrazione questi risultati.

Teorema 15 *Sia $\{\chi_\rho(x)\}$ un nucleo continuo. Allora per ogni $\rho \in \boldsymbol{A}$, si ha:*

$$\|I_\rho\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{2\pi},\mathcal{C}_{2\pi})} = \|\chi_\rho\|_1 \tag{3.33}$$

$$\|I_\rho\|_{\mathcal{L}(L^p_{2\pi},\mathcal{C}_{2\pi})} = \|\chi_\rho\|_{p'} \tag{3.34}$$

con $1 \leq p \leq +\infty$.

Teorema 16 *Sia $\{\chi_\rho(x)\}$ un nucleo pari e continuo. Allora:*

$$\|I_\rho\|_{\mathcal{L}(L^1_{2\pi},X_{2\pi})} = \|\chi_\rho\|_{X_{2\pi}}$$

Il prossimo teorema ci dá un criterio di convergenza in norma degli operatori $I_\rho(f;x)$ ad f.

Teorema 17 *Supponiamo che il nucleo $\{\chi_\rho\}$ dell'integrale $I_\rho(f;x)$ verifichi la proprietá seguente: esiste $M > 0$ tale che $\|\chi_\rho\|_1 \leq M, \quad \forall \rho \in \boldsymbol{A}$. Se risulta:*

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \|I_\rho(f;\cdot) - h(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0,$$

per ogni $h \in A \subset X_{2\pi}$, con A denso in $X_{2\pi}$, allora per ogni $f \in X_{2\pi}$,

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \|I_\rho(f;\cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0. \tag{3.35}$$

Dimostrazione É una conseguenza immediata del teorema di Banach-Steinhaus.

Il teorema precedente determina quindi un insieme di funzioni $h \in A \subset X_{2\pi}$ tale che, sotto le condizioni imposte, la convergenza in norma di $I_\rho(h,x)$ implica la convergenza di $I_\rho(f;x)$ per *tutte* le $f \in X_{2\pi}$. Un tale insieme é detto *insieme - test* per la convergenza. Le funzioni $h \in A$ si dicono *funzioni - test*.

Una conseguenza del teorema di Fejer é la seguente:

Teorema 18 *L'insieme dei polinomi trigonometrici (reali o complessi) forma un insieme - test per la convergenza in norma.*

Dimostrazione Dal teorema di Fejer i polinomi $\sigma_n(f, x)$ costituiscono un insieme denso in $X_{2\pi}$. Cosí se $I_\rho(f; x)$ verifica la (35) per ogni $f \equiv \sigma_n$, allora esso soddisfa la (35) per ogni f.

Il teorema precedente si libella dicendo anche che se χ_ρ soddisfa le ipotesi del teorema 18 e se la (35) é verificata per ogni funzione del tipo $\cos(kx),\ \sin(kx)$, $k \in I\!N$, allora la (35) é vera per ogni $f \in X_{2\pi}$. In poche parole

$$\{\cos(kx), \sin(kx)\}_{k \in I\!N}$$

é un insieme - test numerabile.

3.8 Nuclei positivi

Come abbiamo visto, le funzioni $cos(kx),\ sin(kx),\ k \in I\!N$, formano un "insieme test" per la convergenza in norma dell' integrale $I_\rho(f; x)$, nel caso in cui $\|\chi_\rho\|_1 \leq M$ per qualche $M > 0$.

Nel caso in cui $\chi_\rho \geq 0,\ \forall \rho \in \boldsymbol{A}$, l'insieme test puó essere ridotto ad un numero *finito* di funzioni.

Teorema 19 *Supponiamo che il nucleo $\{\chi_\rho\}$ dell'integrale $I_\rho(f; x)$ sia positivo. Allora le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) $\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \|I_\rho(f; \cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0, \quad \forall f \in X_{2\pi}$,

(ii) $\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \|I_\rho(\cos\ u, \cdot) - \cos(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0$,
$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \|I_\rho(\sin\ u, \cdot) - \sin(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0$

(iii) $\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} I_\rho(\sin^2(u/2), 0) = 0$

(iv) $\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \displaystyle\int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \chi_\rho(u)\ du = 0.$

Dimostrazione (i) $\Longrightarrow$ (ii). Questa implicazione é banale, poiché $cos\ x,\ \ sin\ x \in X_{2\pi}$.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Supponiamo che sussiste la (ii). Risulta:

$$I_\rho(\sin^2(u/2), 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(-u/2)\ \chi_\rho(u)\ du.$$

Operando il cambiamento di variabile $v = x - u$, con $x \in [-\pi, \pi]$, si ottiene:

$$I_\rho(\sin^2(u/2), 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\frac{x-v}{2})\ \chi_\rho(x-v)\ dv$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(x-v)}{2}\ \chi_\rho(x-v)\ dv$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_\rho(x-v)\ dv - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x-v)\ \chi_\rho(x-v)\ dv\right]$$

Tenendo conto che χ_ρ é periodica, applicando la formula di addizione degli archi nel secondo integrale della precedente relazione, otteniamo:

$$I_\rho(\sin^2(u/2), 0) = \frac{1}{2}\ \{1 - \cos x\ I_\rho(\cos\ u, x) - \sin x\ I_\rho(\sin\ u, x)\} \tag{3.36}$$

Ora il secondo membro della (36), a causa della (ii) tende, rispetto alla norma di $X_{2\pi}$, a $(1/2)\{1 - cos^2 x - sin^2 x\} = 0$, e perció poché il primo membro non dipende da x, segue la (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Poiché $\chi_\rho \geq 0$, per ogni δ con $0 < \delta < \pi$, si ha:

$$\begin{aligned} I_\rho(\sin^2(u/2), 0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(u/2)\ \chi_\rho(u)\ du \\ &\geq \frac{1}{2\pi}\ \int_{\delta\leq|u|\leq\pi} \sin^2(u/2)\ \chi_\rho(u)\ du \\ &\geq \frac{\sin^2(\delta/2)}{2\pi}\ \int_{\delta\leq|u|\leq\pi} \chi_\rho(u)\ du, \end{aligned}$$

e quindi la (iii) implica banalmente la (iv).

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Segue dal teorema 10.

3.9 Convergenza puntuale

Fino ad ora abbiamo preso in considerazione la convergenza in norma degli integrali $I_\rho(f; x)$ verso $f \in X_{2\pi}$. Questo dá informazioni sulla convergenza puntuale soltanto in casi banali. Per esempio se $X_{2\pi} = \mathcal{C}_{2\pi}$ e se $\{\chi_\rho\}$ é una identitá approssimata, allora il teorema 9 ci dá la convergenza uniforme di $I_\rho(f; x)$ ad $f(x)$ e quindi la convergenza puntuale.

Diremo che il nucleo $\{I_\rho(f; x)\}$ verifica la *proprietá (P)* se per ogni $\delta \in]0, \pi[$, si ha:

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0}\left[\sup_{\delta\leq|u|\leq\pi} |\chi_\rho(u)|\right] = 0.$$

É chiaro che ogni nucleo $\{\chi_\rho\}$ tale che $\|\chi_\rho\|_1 \leq M$, per ogni $\rho \in \boldsymbol{A}$ e per qualche $M > 0$ e che verifica la proprietá (P) é una identitá approssimata (verificarlo!).

Sussiste il seguente:

Teorema 20 *Sia $f \in X_{2\pi}$ e supponiamo che il nucleo $\{\chi_\rho(x)\}$ dell'integrale $I_\rho(f;x)$ sia una identitá approssimata, verificante la proprietá (P). Allora:*

(a) *In ogni punto di continuitá x_0, di f si ha:*

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} I_\rho(f, x_0) = f(x_0)$$

(b) *Se f é continua in $(a-\eta, b+\eta)$ per qualche $\eta > 0$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, allora:*

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} I_\rho(f, x) = f(x)$$

uniformemente in $[a, b]$.

(c) *Se, oltre alle ipotesi imposte, $\{\chi_\rho\}$ é pari ed x_0 é tale che*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} [f(x_0 + h) + f(x_0 - h)] = 2c,$$

allora:

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} I_\rho(f; x) = c.$$

Dimostrazione Proviamo la (a). Sia x_0 un punto di continuitá per f. Allora fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \in]0, \pi[$ tale che per ogni $|u| < \delta$, risulta $|f(x_0 - u) - f(x_0)| < \varepsilon$. Dunque:

$$\begin{aligned}
&|I_\rho(f, x_0) - f(x_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_0 - u) - f(x_0)||\chi_\rho(u)| du \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \right\} |f(x_0 - u) - f(x_0)||\chi_\rho(u)| du \\
&\equiv I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Consideriamo ora I_1. Si ha:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x_0 - u) - f(x_0)||\chi_\rho(u)| du \\
&< \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |\chi_\rho(u)| \, du \\
&\leq \varepsilon \|\chi_\rho\|_1 < \varepsilon M,
\end{aligned}$$

per ogni ρ. Inoltre,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|u|\le\pi} |f(x_0-u)-f(x_0)||\chi_\rho(u)|du \\ &\le \frac{1}{2\pi}\sup_{\delta\le|u|\le\pi}|\chi_\rho(u)|\int_{\delta\le|u|\le\pi}|f(x_0-u)-f(x_0)|du \\ &\le 2\sup_{\delta\le|u|\le\pi}|\chi_\rho(u)|\ \|f\|_{X_{2\pi}}. \end{aligned}$$

Dalla proprietá (P) segue allora $I_2 \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow +\infty$. Da questo segue (a).
Le dimostrazioni di (b) e (c) sono del tutto analoghe e si lasciano per esercizio.

Nel prossimo teorema daremo un risultato di convergenza quasi ovunque per $I_\rho(f;x)$ ad f, nel caso in cui $f \in L^1_{2\pi}$.

Teorema 21 *Sia $f \in L^1_{2\pi}$ e supponiamo che il nucleo $\{\chi_\rho(u)\}$ dell'integrale $I_\rho(f;x)$ sia una identitá approssimata, pari, assolutamente continua, verificante la proprietá (P). Supponiamo inoltre che:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi u\ |\chi'_\rho(u)|\ du \le M_1, \tag{3.37}$$

per ogni $\rho \in \boldsymbol{A}$.
Allora in ogni punto x per il quale:

$$\int_0^h \{f(x+u)-2f(x)+f(x-u)\}\ du = o(h), \quad h \longrightarrow 0^+, \tag{3.38}$$

si ha:

$$\lim_{\rho\longrightarrow\rho_0} I_\rho(f;x) = f(x).$$

Dimostrazione. Poiché $\{\chi_\rho\}$ é pari, risulta:

$$\begin{aligned} I_\rho(f;x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x-u)-f(x)\}\ \chi_\rho(u)\ du \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}+\int_0^\pi\right\}\{f(x-u)-f(x)\}\ \chi_\rho(u)\ du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\{f(x+u)+f(x-u)-2f(x)\}\ \chi_\rho(u)\ du \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^\delta+\int_\delta^\pi\right\}[f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\ \chi_\rho(u)\ du \\ &= I_1+I_2, \end{aligned}$$

dove $\delta \in]0, \pi[$.
Poniamo ora:

$$G(u) = \int_0^u [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]\ dt.$$

G é assolutamente continua ed inoltre risulta

$$G'(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x),$$

quasi ovunque in $I\!R$. Inoltre, per la (38),fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che $|G(u)| \leq \varepsilon u$, per ogni $u \in]0, \delta[$. Fissiamo un tale $\delta > 0$. Integrando per parti, otteniamo:

$$\begin{aligned} 2\pi I_1 &= \int_0^\delta [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)]\ \chi_\rho(u)\ du \\ &= G(\delta)\ \chi_\rho(\delta) - \int_0^\delta G(u)\ {\chi_\rho}'(u)\ du \end{aligned}$$

e quindi dalla (37) e dal fatto che $\|\chi_\rho\|_1 \leq M, \quad \forall \rho \in \boldsymbol{A}$, si ha:

$$|I_1| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \left[\delta |\chi_\rho(\delta)| + \int_0^\delta u\ |{\chi_\rho}'(u)|\ du \right] < \varepsilon(M + 2M_1); \tag{3.39}$$

Infatti, integrando per parti, si ha:

$$\delta\ \chi_\rho(\delta) = \int_0^\delta \chi_\rho(u)\ du + \int_0^\delta u\ {\chi_\rho}'(u)\ du$$

e quindi $\delta\ |\chi_\rho(\delta)| \leq 2\pi \|\chi_\rho\|_1 + M_1 \leq 2\pi M + M_1$, da cui la (39).
Maggioriamo ora I_2. Si ha:

$$|I_2| \leq \sup_{\delta \leq |u| \leq \pi} |\chi_\rho(u)|\ \{2\|f\|_1 + |f(x)|\}$$

da cui per la proprietá (P), $|I_2| \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \rho_0$. Da questo segue l'asserto.

Corollario 5 *Sotto le ipotesi del teorema 19, si ha:*

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} I_\rho(f; x) = f(x), \quad q.o.\ x \in I\!R.$$

Dimostrazione. La (38) vale quasi ovunque in $I\!R$ (cfr. per es. Butzer - Nessel).

Un ulteriore risultato é fornito dal seguente:

Teorema 22 *Sia $f \in L^1_{2\pi}$ e supponiamo che il nucleo $\{\chi_\rho\}$ dell'integrale $I_\rho(f;x)$ sia una identitá approssimata, pari, positiva e tale che χ_ρ é decrescente in $[0,\pi]$, per ogni $\rho \in \boldsymbol{A}$. Allora in ogni punto x per cui vale la (38) si ha:*

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} I_\rho(f;x) = f(x).$$

Dimostrazione. Poiché χ_ρ é positiva e decrescente, fissato $x \in]0,\pi]$ si ha:

$$\int_{x/2}^{\pi} \chi_\rho(u)\ du \geq \int_{x/2}^{x} \chi_\rho(u)\ du \geq \frac{x}{2}\ \chi_\rho(x).$$

Poiché χ_ρ é una identitá approssimata, da questa relazione segue che:

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} \chi_\rho(x) = 0, \quad 0 < x \leq \pi. \tag{3.40}$$

Pertanto χ_ρ verifica la proprietá (P). Procedendo come nel teorema precedente, si ottiene, con le stesse notazioni,

$$\begin{aligned} 2\pi I_1 &= \int_0^\delta \chi_\rho(u)\ dG(u) \\ &= G(\delta)\ \chi_\rho(\delta) + \int_0^\delta G(u)\ d(-\chi_\rho(u)). \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \left\{ \delta\chi_\rho(\delta) + \int_0^\delta u\ d(-\chi_\rho(u)) \right\} \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^\delta \chi_\rho(u)\ du \leq \varepsilon M. \end{aligned}$$

Inoltre é facile provare che:

$$|I_2| \leq \chi_\rho(\delta)\{2\|f\|_1 + |f(x)|\}$$

da cui l'asserto per la (40).

ESEMPIO Indichiamo con $\{p_r(x)\}$ il *nucleo di Abel - Poisson*:

$$p_r(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k\ \cos(kx) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}, \quad r \in [0,1[.$$

Poiché $p_r'(x) \leq 0$, in $[0,\pi[$, segue che p_r é decrescente. Inoltre $p_r(\pi) = (1-r)/(1+r)$, e quindi p_r é positivo e pari. Inoltre esso é una identitá approssimata e quindi:

Corollario 6 *Se $f \in L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < +\infty$, allora:*

$$\lim_{r \longrightarrow 1^-} P_r(f, x) = f(x) \tag{3.41}$$

quasi ovunque in $I\!R$.

OSERVAZIONE É interessante notare che la (38) puó essere riscritta nella forma:

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+u)\ du = f(x). \tag{3.42}$$

La (42) ci dice che la (38) implica la convergenza in x dell'operatore $A_{2h}(f, x)$ ad $f(x)$.

I teoremi precedenti, sotto le condizioni imposte, ci dicono quindi che se l'operatore $A_{2h}(f, x)$ converge in x ad $f(x)$, allora l'integrale $I_\rho(f; x)$ converge in quel punto ad $f(x)$.

Il nucleo di Fejer $\{F_n\}$ non soddisfa le assunzioni dei teoremi precedenti. Tuttavia sussistono le seguenti estensioni, le cui dimostrazioni si conducono in modo analogo.

Teorema 23 *Sia $f \in L^1_{2\pi}$. Supponiamo che $\{\chi_\rho\}$ sia pari ed esista un maggiorante $\{\chi_\rho{}^*\}$ di χ_ρ su $[0, \pi]$, (cioé esista $\chi_\rho{}^*$ tale che $|\chi_\rho(x)| \leq \chi_\rho{}^*(x)$, quasi ovunque), che sia assolutamente continuo, e che sia una identitá approssimata verificante la (P) e la (37). Allora in ogni punto x in cui vale la (38) si ha:*

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} I_\rho(f; x) = f(x)$$

Teorema 24 *Sia $f \in L^1_{2\pi}$ e supponiamo che $\{\chi_\rho\}$ sia un nucleo pari, che possiede un maggiorante $\{\chi_\rho{}^*\}$ su $[0, \pi]$ verificante le ipotesi del teorema 23. Allora in ogni punto x in cui vale (38) si ha:*

$$\lim_{\rho \longrightarrow \rho_0} I_\rho(f; x) = f(x)$$

Le prove sono analoghe a quelle precedenti. Basta porre in luogo di G la funzione:

$$G^*(u) = \int_0^u |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\ dt.$$

Corollario 7 *Sia* $f \in L^p_{2\pi}$, $\ 1 \leq p < +\infty$. *Allora per quasi tutti gli* $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sigma_n(f,x) = f(x)$$

Dimostrazione. L'asserto segue dalla maggiorazione:

$$0 \leq F_n(x) \leq \frac{B}{1+x^2},$$

per qualche costante $B > 0$.

Concludiamo con un teorema relativo al grado di approssimazione di $I_\rho(f;x)$.
Premettiamo la seguente definizione. Se $\{\chi_\rho\}$ é un nucleo, definiamo *momento assoluto di ordine* α con $\alpha > 0$, il numero:

$$m(\chi_\rho;\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u|^\alpha \ |\chi_\rho(u)| \ du. \tag{3.43}$$

Il prossimo teorema verrá provato sotto la condizione che χ_ρ sia assolutamente continuo. Tale ipotesi é tuttavia superflua, operando con integrali di Lebesgue - Stieltjes.

Teorema 25 *Sia* $f \in L^1_{2\pi}$ *e supponiamo che il nucleo di* I_ρ, $\{\chi_\rho(u)\}$, *sia un'identitá approssimata assolutamente continua, non negativa, pari, decrescente in* $[0,\pi]$, . *Allora in ogni punto* x *tale che:*

$$\int_0^h [f(x-u) + f(x+u) - 2f(x)] \ du = \mathcal{O}(h^{1+\alpha}), \quad h {\longrightarrow} 0, \ \alpha > 0, \tag{3.44}$$

si ha:

$$|I_\rho(f;x) - f(x)| = \mathcal{O}(m(\chi_\rho;\alpha)), \quad \rho {\longrightarrow} \rho_0 \tag{3.45}$$

Dimostrazione. Analogamente al teorema 22, per $\delta \in]0,\pi[$, si ha:

$$\begin{aligned}
& 2\pi\{I_\rho(f;x) - f(x)\} \\
= & \left\{ \int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right\} [f(x-u) + f(x+u) - 2f(x)] \ \chi_\rho(u) \ du \\
= & I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Se G é la funzione definita nel teorema 19, segue che :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\delta [f(x-u)+f(x+u)-2f(x)]\ \chi_\rho(u)\ du \\ &= \int_0^\delta G'(u)\ \chi_\rho(u)\ du \end{aligned}$$

Per la (44), esiste un $\delta > 0$, tale che per ogni $u \in [0,\delta]$, si ha $|G(u)| \leq Mu^{1+\alpha}$, per qualche costante $M > 0$. Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| G(\delta)\ \chi_\rho(\delta) + \int_0^\delta G(u)\ [-\chi_\rho{}'(u)] du \right| \\ &\leq |G(\delta)|\ \chi_\rho(\delta) + \int_0^\delta |G(u)| [-\chi_\rho{}'(u)]\ du \\ &\leq M\delta^{1+\alpha}\chi_\rho(\delta) + M\int_0^\delta u^{1+\alpha}[-\chi_\rho{}'(u)]\ du \\ &= M\delta^{1+\alpha}\chi_\rho(\delta) - M\delta^{1+\alpha}\chi_\rho(\delta) + M(\alpha+1)\int_0^\delta u^\alpha\ \chi_\rho(u)\ du \\ &= M(\alpha+1)\int_0^\delta u^\alpha \chi_\rho(u)\ du = \mathcal{O}(m(\chi_\rho;\alpha)), \quad \rho \rightarrow \rho_0. \end{aligned}$$

Inoltre si ha:

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_\delta^\pi [f(x-u)+f(x+u)-2f(x)]\ \chi_\rho(u)\ du \right| \\ &\leq \chi_\rho(\delta)\ \{2\|f\|_1 + |f(x)|\} \end{aligned} \tag{3.46}$$

Ma ora per ogni $x \in [0, 2\pi]$, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi |u|^\alpha \chi_\rho(u)\ du &= 2\int_0^\pi u^\alpha \chi_\rho(u)\ du \\ &\geq 2\int_{x/2}^x u^\alpha \chi_\rho(u)\ du \\ &\geq 2\chi_\rho(x)\ \int_{x/2}^x u^\alpha du, \end{aligned}$$

e questo implica che $\chi_\rho(x) = \mathcal{O}(m(\chi_\rho;\alpha))$, per ogni $x \in]0,\pi[$. Ma allora dalla (46) segue che $\chi_\rho(\delta) = \mathcal{O}(m(\chi_\rho;\alpha))$ e quindi:

$$|I_2| = \mathcal{O}(m(\chi_\rho;\alpha)), \quad \rho \rightarrow \rho_0.$$

Da questo segue l'asserto.

Se oltre alle ipotesi del teorema precedente, il nucleo χ_ρ verifica la condizione:

$$m(\chi_\rho; \alpha) = \mathcal{O}(\rho^{-\alpha}), \quad \rho \to \rho_0 \equiv +\infty,$$

allora otteniamo:

$$|I_\rho(f; x) - f(x)| = \mathcal{O}(\rho^{-\alpha}), \quad \rho \to +\infty.$$

Ció si esprime dicendo che l'errore che si commette sostituendo $I_\rho(f; x)$ al posto di $f(x)$ é maggiorato da $\rho^{-\alpha}$.

Chapter 4

Alcune applicazioni alle equazioni alle derivate parziali

A) **Temperatura in una lamina rettangolare**
Consideriamo una lamina piana rettangolare, con facce isolate termicamente e con una prescritta temperatura ai lati. Il problema di cui ci occuperemo é quello di determinare la temperatura (che si suppone stazionaria) della lamina. Schematizziamo il problema come nella figura 1. Supponiamo che i lati del rettangolo OC e AB siano cosí lunghi rispetto a CB e OA, da potersi considerare di lunghezza infinita. Supponiamo per fissare le idee che la temperatura sia nulla sui lati OC, AB, CB, mentre sia T sul lato OA. Poniamo inoltre OA = δ. Indicata con $U(x, y)$ la temperatura nel punto (x, y), si tratta di determinare le soluzioni periodiche dell'*equazione differenziale di Laplace*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \tag{4.1}$$

con le condizioni al contorno:

$$U(0, y) = U(\delta, y) = \lim_{y \to +\infty} U(x, y) = 0,\ U(x, 0) = T. \tag{4.2}$$

Procediamo con la determinazione delle soluzioni della (1). Useremo un metodo noto come *separazione delle variabili*. Cerchiamo cioé soluzioni del tipo $U(x, y) = X(x)Y(y)$. Sostituendo nella (1) otteniamo:

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = 0$$

Figure 4.1:

da cui

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}. \tag{4.3}$$

Siccome il primo membro della (3) é una funzione della sola x mentre il secondo membro é funzione della sola y, dovrá necessariamente risultare:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}, \tag{4.4}$$

con $k \in I\!R$ costante. Risolvendo le due equazioni (ordinarie) in (4) otteniamo ($\alpha > 0$):

$$X(x) = c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x; \quad Y(y) = c_3 e^{\alpha y} + c_4 e^{-\alpha y}.$$

Dunque le funzioni $2\pi-$ periodiche rispetto ad x,

$$U(x,y) = (c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x)(c_3 e^{\alpha y} + c_4 e^{-\alpha y}), \tag{4.5}$$

sono soluzioni della (1). Cerchiamo ora le costanti c_1, c_2, c_3, c_4 in modo che siano verificate le (2). Se, per esempio, $c_3 = 0$, allora si ha $\lim_{y \to +\infty} U(x,y) = 0$. Siccome la soluzione verificante le (2) non puó essere quella identicamente nulla, deve essere $c_4 \neq 0$. Pertanto dalla $U(0,y) = 0$ segue $c_2 = 0$. Restringiamo perció le nostre considerazioni alle funzioni del tipo:

$$U(x,y) = c_4 c_1 \sin(\alpha x) e^{-\alpha y}, \quad c_1, c_4 \neq 0.$$

Dalla $U(\delta, y) = 0$ segue allora $\alpha\delta = n\pi, n \in I\!N$, cioé $\alpha = n\pi/\delta$. Posto $b_n = c_4 c_1$ (in corrispondenza ad un fissato n), otteniamo che la funzione:

$$U_n(x, y) = b_n \exp(-\frac{n\pi}{\delta} y) \sin(n\pi x/\delta), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

verifica l'equazione (1) e le condizioni (2) ad eccezione della $U(x, 0) = T$. Se la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-\frac{n\pi}{\delta} y) \sin(n\pi x/\delta), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4.6}$$

é convergente, essa verifica ancora la (1) e le prime tre delle (2). Cerchiamo allora i coefficienti b_n in modo che la serie (6) sia tale che $U(x, 0) = T$. Si ha:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/\delta), \quad 0 < x < \delta.$$

Posto:

$$f(x) = \begin{cases} T & \text{se } 0 < x < \delta \\ -T & \text{se } -\delta < x < 0 \end{cases}$$

la f é dispari ed il suo sviluppo in $[-\delta, \delta]$ in serie di Fourier ha come coefficienti proprio $\{b_n\}$. Quindi:

$$b_n = \hat{f}_s(n) = \frac{2T}{n\pi}[1 - (-1)^n],$$

da cui sostituendo nella (6) otteniamo:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_s(n) \exp(-\frac{n\pi}{\delta} y) \sin(n\pi x/\delta) \qquad (4.7) \\ &= \frac{4T}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \exp(-\frac{(2n-1)\pi}{\delta} y) \sin((2n-1)\pi x/\delta), \end{aligned}$$

che rappresenta la soluzione sviluppata in serie di Fourier rispetto ad x per ogni fissato y.

B) **Temperatura in una lamina circolare**

Figure 4.2:

Consideriamo una lamina circolare di diametro AB e centro O le cui facce siano (termicamente) isolate. Il problema che ci poniamo qui é quello di determinare la temperatura della lamina in un punto (x, y) interno, se il bordo possiede una data temperatura iniziale. L'equazione differenziale che regola il problema é l'equazione di Laplace (1). Sia r il raggio della lamina e supponiamo che la temperatura sul bordo sia 0 nel punto A fino ad assumere, con andamento crescente, il valore T nel punto B, sia nella direzione oraria, che antioraria (vedi fig.2). Data la forma della lamina é qui conveniente usare le coordinate polari nel piano:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta, \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases}$$

dove $0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.
Ricavando ρ e ϑ in funzione di x, y otteniamo :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \arctan(y/x)$$

e adoperando il teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo l'equazione di Laplace (1) in coordinate polari:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0. \tag{4.8}$$

Supposto che la crescita della temperatura U sul bordo sia lineare, avremo le condizioni al contorno:

$$U(r, \vartheta) \quad = \quad \frac{T}{\pi} \vartheta, \quad 0 < \vartheta < \pi \tag{4.9}$$

$$= \quad -\frac{T}{\pi}\vartheta, \quad -\pi < \vartheta < 0.$$

Per diretta sostituzione nella (8) é facile vedere che le funzioni:

$$U(\rho, \vartheta) = (c_1\rho^k + c_2\rho^{-k})(c_3 \sin k\vartheta + c_4 \cos k\vartheta), \tag{4.10}$$

sono soluzioni particolari della (8). Esse sono funzioni $2\pi-$ periodiche rispetto a ϑ. Siccome $\rho^{-k} \rightarrow +\infty$ se $\rho \rightarrow 0$, assumeremo $c_2 = 0$. Posto $A_k = c_1c_4$, $B_k = c_1c_3$, per ogni scelta di $k = 0, 1, 2, \dots$, otteniamo un insieme di soluzioni del tipo:

$$A_k\rho^k \cos k\vartheta + B_k\rho^k \sin k\vartheta, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Posto dunque:

$$U(\rho, \vartheta) = A_o + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\rho^k \cos k\vartheta + B_k\rho^k \sin k\vartheta), \tag{4.11}$$

la funzione $U(\rho, \vartheta)$ (che é ben definita se la serie é convergente) rappresenta, formalmente, una soluzione della (8). Imponendo le condizioni al contorno (9), ricaviamo:

$$\begin{aligned} U(r, \vartheta) &= A_o + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k r^k \cos k\vartheta + B_k r^k \sin k\vartheta] \\ &= f(\vartheta), \end{aligned} \tag{4.12}$$

dove:

$$f(\vartheta) = \begin{cases} \frac{T}{\pi}\vartheta & \text{se } 0 < \vartheta < \pi \\ -\frac{T}{\pi}\vartheta & \text{se } -\pi < \vartheta < 0 \end{cases}$$

Quindi le condizioni al contorno saranno verificate se la serie nella (12) é la serie di Fourier di f in $[-\pi, \pi[$. Usando il corollario 4, deve quindi risultare:

$$A_o = \frac{1}{2}\hat{f}_c(0), \; A_k r^k = \hat{f}_c(k), \; B_k r^k = \hat{f}_s(k),$$

da cui

$$A_o = T/2, \; B_k = 0, \; A_{2k} = 0, \; A_{2k-1} = -\frac{4T}{r^{2k-1}(2k-1)^2\pi^2}$$

Figure 4.3:

e quindi, sostituendo nella (11):

$$U(\rho,\vartheta) = \frac{T}{2} - \frac{4T}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{2k-1}}{r^{2k-1}(2k-1)^2}\cos k\vartheta, \tag{4.13}$$

che é la soluzione del problema in termini del suo sviluppo in serie di Fourier. Si osservi che la serie nella (8) é totalmente convergente in ogni compatto C contenuto nell'interno della lamina.

C) **La corda vibrante in un piano**

Le *piccole oscillazioni* di una corda ad estremi fissi, O $= (0,0)$ ed A $= (r,0)$, sono descritte dall'equazione delle onde (in una dimensione):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.14}$$

dove u rappresenta lo spostamento dalla posizione di equilibrio al tempo t ed alla posizione x. La costante v^2 é uguale al prodotto gT/D dove g é l'accelerazione di gravitá, T é la tensione e D é il peso per unitá di lunghezza. La *velocitá trasversale* é individuata da $\frac{\partial}{\partial t}(x,t)$. Poiché gli estremi sono fissi abbiamo le condizioni:

$$u(0,t) = 0, \quad u(r,t) = 0, \tag{4.15}$$

per ogni t. Assumiamo inoltre che la posizione della curva all'istante iniziale $t = 0$ e la sua velocitá siano date dalle:

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x). \tag{4.16}$$

Il problema é allora quello di calcolare soluzioni periodiche della (14) che verifichino le condizioni (15), (16), con f, g non identicamente nulle.
Usando il metodo della separazione delle variabili, (cercando cioé soluzioni della forma $u(x,t) = X(x)Y(t)$), derivando, otteniamo dalla (14):

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{Y''(t)}{Y(t)}$$

da cui ragionando come nel problema A) otteniamo particolari soluzioni della forma $X(x)Y(t)$, del tipo:

$$u(x,t) = (c_1 \sin kx + c_2 \cos kx)(c_3 \sin kvt + c_4 \cos kvt). \qquad (4.17)$$

La prima condizione nella (15) é verificata se $c_2 = 0$, mentre la seconda é vera se $\sin kr = 0$ (poiché c_1 dovrá essere diverso da 0), da cui $k = n\pi/r$, $n = 1, 2, \ldots$. In corrispondenza ad un fissato valore di n poniamo $A_n = c_1c_4$, $B_n = c_1c_3$. Le (17) si scrivono allora:

$$(A_n \cos(n\pi vt/r) + B_n \sin(n\pi vt/r)) \sin(n\pi x/r)$$

Poniamo allora:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\pi vt/r) + B_n \sin(n\pi vt/r)] \sin(n\pi x/r). \qquad (4.18)$$

Imponendo ora le condizioni (16), otteniamo, derivando formalmente per serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/r)$$
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{r} B_n \sin(n\pi x/r)$$

Se sviluppiamo f, g in serie di seni, prolungandole in modo dispari a tutto $\mathbb{R}$ con periodo $2r$, adoperando il teorema di unicitá dello sviluppo, dovrá essere:

$$A_n = \frac{1}{r}\int_{-r}^{r} f(x) \sin(n\pi x/r) dx$$
$$B_n = \frac{1}{n\pi v}\int_{-r}^{r} g(x) \sin(n\pi x/r) dx$$

Sostituendo questi valori nella (18) otteniamo una soluzione del problema, verificante le (15), (16).

ESERCIZIO Calcolare A_n, B_n nella (18) se :

$$f(x) = a\sin(2\pi x/r), \quad g(x) = b\sin(4\pi x/r), \quad a, b > 0.$$

Chapter 5

La trasformata di Fourier

5.1 L'integrale di Fourier

In questo paragrafo ci occuperemo della rappresentazione di funzioni sommabili definite su $I\!R$. Se una tale f non é periodica, non possiamo esprimerla come la somma di una serie trigonometrica, perché tale somma é chiaramente periodica. Tuttavia sostituendo la serie con un opportuno integrale possiamo ottenere una rappresentazione *non discreta* di f.

Teorema 1 *(Fourier) Se $f \in L^1(I\!R)$ e se $x_o \in I\!R$ é tale che sia verificata la condizione di Dini (corollario 1, Cap.3) per qualche $\delta > 0$, si ha:*

$$f(x_o) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \cos(\lambda(t - x_o))dt \tag{5.1}$$

Dimostrazione Sia $r > 0$ e poniamo:

$$I(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{r} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda(t - x_o))dt.$$

Dato che $f \in L^1(I\!R)$, $I(r)$ esiste come integrale di Lebesgue. Pertanto applicando il teorema di Fubini e ponendo $v = t - x_o$ otteniamo:

$$I(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_o + v)\frac{\sin(rv)}{v}dv.$$

Dato che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(rv)}{v}dv = \pi,$$

per ogni $r > 0$, ragionando come nel teorema 6, Cap.3, si ha:

$$I(r) - f(x_o) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x_o + v) - 2f(x_o) + f(x_o - v)}{v} \sin(rv) dv.$$

Sia $\delta > 0$ un numero fissato. Scriviamo:

$$\begin{aligned} I(r) - f(x_o) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{+\infty} \right\} \frac{f(x_o + v) - 2f(x_o) + f(x_o - v)}{v} \sin(rv) dv \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Dalla condizione di Dini e dal lemma di Riemann-Lebesgue, $J_1 \to 0$, per $r \to +\infty$. Inoltre:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x_o + v) + f(x_o - v)}{v} \sin(rv) dv - \frac{2}{\pi} f(x_o) \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin(rv)}{v} dv \\ &= J_2^1 + J_2^2. \end{aligned}$$

Ancora per il lemma di Riemann-Lebesgue $J_2^1 \to 0$ per $r \to +\infty$. Dato che $\sin(v)/v$ é integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty[$, operando nell'ultimo integrale il cambiamento di variabile $rv = t$ é facile vedere che J_2^2 tende a 0 per $r \to +\infty$ Da questo segue l'asserto.

OSSERVAZIONE Si osservi che l'integrale esterno nella (1) é un integrale generalizzato, cioé:

$$\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \ \cos(\lambda(t - x_o)) dt = lim_{r \to +\infty} \int_0^r d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda(t - x_o)) dt.$$

In generale la funzione

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda(t - x_o)) dt$$

non é assolutamente integrabile.

Il teorema seguente fornisce delle condizioni alternative per la rappresentazione integrale di una funzione sommabile.

Teorema 2 *(Jordan) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e se x_o é tale che f é a variazione limitata in $[x_o - \delta, x_o + \delta]$, per qualche $\delta > 0$, si ha:*

$$\frac{1}{2}\{f(x_o + 0) + f(x_o - 0)\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda(t - x_o))dt. \quad (5.2)$$

Omettiamo la dimostrazione. Osserviamo soltanto che se, oltre alle ipotesi, f é continua in x_o, allora il primo membro di (2) diventa $f(x_o)$.

In analogia con quanto accade nella teoria delle serie di Fourier, é facile mostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ verifica l'ipotesi del teorema 1 in x_o ed é pari, si ha:

$$f(x_o) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos(\lambda x_o)\left\{\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt\right\} d\lambda$$

mentre se é dispari,

$$f(x_o) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin(\lambda x_o)\left\{\int_0^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt\right\} d\lambda$$

Lasciamo al lettore la prova delle relazioni precedenti.

ESEMPIO Calcolare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, l'integrale:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda\ \cos(\lambda x)}{\lambda} d\lambda.$$

Soluzione Basta porre $f(t) = 1, \quad |t| < 1; \quad f(t) = 0, \quad |t| \geq 1.$ In tal caso f é pari e verifica le ipotesi del teorema 2, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda\ \cos(\lambda x)}{\lambda} d\lambda &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos(\lambda x)\left\{\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt\right\} d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\{f(x + 0) - f(x - 0)\} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \\ 1/2 & \text{se } |x| = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il teorema seguente fornisce una versione complessa del teorema 1.

Teorema 3 *Se* f *e* x_o *verificano le ipotesi del teorema 1, si ha:*

$$f(x_o) = \frac{1}{2\pi}(P.V.)\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(t-x_o)}dt\right\}d\lambda, \tag{5.3}$$

dove $(P.V.)\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}$ *é il valore principale.*

Omettiamo la dimostrazione.

Analogamente si ottiene la forma complessa del teorema 2.

5.2 La trasformata di Fourier. Prime proprietá

La definizione della trasformata di Fourier é contenuta nella formula (3), insieme con la trasformazione inversa. Posto:

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt, \quad f \in L^1(I\!R), \tag{5.4}$$

in ogni punto x_o nel quale é verificata l'ipotesi di Dini, si ha dalla (3):

$$f(x_o) = \frac{1}{2\pi}(P.V.)\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x_o}d\lambda. \tag{5.5}$$

La (4) associa ad una $f \in L^1(I\!R)$ una nuova funzione g che si chiama la *trasformata di Fourier* di f, mentre la (5) esprime la f stessa in termini della sua trasformata g e puó essere considerata quindi l'operazione inversa.

Per ottenere una maggiore simmetria formale tra (4) e (5), noi definiamo la trasformata di Fourier come l'operatore $\hat{}$ definito in $L^1(I\!R)$ dalla:

$$\hat{}: f \mapsto \hat{f},$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt, \quad \lambda \in I\!R \tag{5.6}$$

L'antitrasformata di Fourier é invece la trasformazione inversa:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(P.V.)\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda, \tag{5.7}$$

in ogni punto x ove sussista il teorema di Fourier.

Si osservi che la somiglianza tra le formule (6) e (7) é solo formale. Mentre la (6) é ben definita in $L^1(I\!R)$ la (7) non é sempre definita e sotto le ipotesi del teorema 3, esiste come "valore principale".

Cominciamo con lo stabilire alcune semplici conseguenze della definizione di $\widehat{\ }$.

Proposizione 1 *Sia $f \in L^1(I\!R)$. Sussistono le seguenti proprietá:*

(i) *Posto $(\tau_h f)(t) = f(t+h), \quad h \in I\!R,$ si ha:*

$$\widehat{\tau_h f}(\lambda) = e^{ih\lambda}\hat{f}(\lambda), \quad \lambda \in I\!R.$$

(ii) *Posto $F(t) = e^{-iht}f(t), \quad h \in I\!R$ si ha:*

$$\hat{F}(\lambda) = \hat{f}(\lambda + h), \quad \lambda \in I\!R.$$

(iii) *Posto $G(t) = \delta f(\delta t), \quad \delta > 0,$ si ha:*

$$\hat{G}(\lambda) = \hat{f}(\lambda/\delta), \quad \lambda \in I\!R.$$

(iv) *Posto $H(t) = f(-t)$, $(H(t) = \overline{f(-t)}$, se f é a valori complessi) si ha:*

$$\hat{H}(\lambda) = \hat{f}(\lambda), \quad (\hat{H}(\lambda) = \overline{\hat{f}(\lambda)}), \quad \lambda \in I\!R.$$

(v) *$\hat{f} \in L^\infty(I\!R)$ e $\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$.*

Dimostrazione Le (i)-(iv) sono immediate conseguenze della definizione e sono pertanto lasciate al lettore. La (v) segue subito dalla:

$$|\hat{f}(\lambda)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||e^{-i\lambda t}|dt = \|f\|_1, \quad \lambda \in I\!R,$$

e quindi l'asserto.

Il teorema seguente mostra che $\hat{f}$ é una funzione continua in $I\!R$, che tende a 0 per $|\lambda| \to +\infty$.

Teorema 4 *La trasformata di Fourier " $\hat{}$ " definisce una trasformazione lineare limitata di $L^1(I\!R)$ in C_o, dove*

$$C_o = \{g : I\!R \to \mathbb{C} : g \text{ é continua e } \lim_{|\lambda| \to \infty} g(\lambda) = 0\}.$$

Dimostrazione Per ogni $h,\ \lambda \in I\!R$ si ha:

$$|\hat{f}(\lambda + h) - \hat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||e^{-iht} - 1|dt.$$

Sia ora $\{h_n\}$ una successione qualsiasi tale che $h_n \to 0$. Posto

$$g_n(t) = |f(t)||e^{-ih_n t} - 1|, \quad n \in I\!N, \quad t \in I\!R,$$

si ha $g_n(t) \to 0$ quasi ovunque per $n \to +\infty$, ed inoltre, $|g_n(t)| \leq 2|f(t)|$. Essendo $f \in L^1(I\!R)$, utilizzando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} |\hat{f}(\lambda + h_n) - \hat{f}(\lambda)| = 0,$$

da cui segue la continuitá di $\hat{f}$, per l'arbitrarietá della successione $\{h_n\}$. Proviamo ora che $|\hat{f}(\lambda)| \to 0$ per $|\lambda| \to +\infty$. Questo é una estensione del lemma di Riemann-Lebesgue. Si ha:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \end{aligned}$$

Posto, nell'ultimo integrale, $t = u + \pi/\lambda,\ \lambda \neq 0,$ si ha:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(t) - f(t + \pi/\lambda)\} e^{-i\lambda t} dt$$

e quindi

$$|\hat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(t + \pi/\lambda)| dt, \quad \lambda \neq 0.$$

Se $|\lambda| \to +\infty,$ allora π/λ tende a 0 e quindi l'asserto segue dal teorema 2 del Capitolo 2.
Infine é chiaro che " $\hat{}$ " é lineare cioé :

$$\widehat{\alpha f + \beta g}(\lambda) = \alpha \hat{f}(\lambda) + \beta \hat{g}(\lambda),$$

con $\lambda \in I\!R, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad f, g \in L^1(I\!R)$.
Concludendo, la (v) ci dice che " $\hat{}$ " é una trasformazione lineare limitata di $L^1(I\!R)$ in C_o.

ESEMPI (a) Sia $f(t) = e^{-\gamma|t|}, \quad \gamma > 0$. Si ha:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|t|} e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} \cos(\lambda t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\gamma}{\lambda^2 + \gamma^2}.\end{aligned}$$

(b) Sia

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

con $a > 0$. Si ha:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-i\lambda t} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda}.$$

Osserviamo che in tal caso $\hat{f} \notin L^1(I\!R)$.

(c) Sia $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}, \quad a > 0$.
In tal caso utilizzando la teoria delle funzioni di variabile complessa, si ha:

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a|\lambda|}, \quad \lambda \in I\!R.$$

(d) Sia $f(t) = e^{-at^2}, \quad a > 0$.
In tal caso, si ottiene:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos(\lambda t) dt.$$

Derivando sotto il segno di integrale, si ottiene l'equazione differenziale:

$$\hat{f}'(\lambda) = -\frac{\lambda}{2a} \hat{f}(\lambda),$$

ed inoltre é facile verificare che $\hat{f}(0) = 1/\sqrt{2a}$; pertanto $\hat{f}$ é l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + (t/2a)y = 0 \\ y(0) = 1/\sqrt{2a}, \end{cases}$$

Da questo segue che

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\lambda^2/4a}.$$

5.3 Proprietá fondamentali della trasformata di Fourier in $I\!R$

.

In questo paragrafo trattiamo delle principali proprietá della trasformata di Fourier in $I\!R$.

Teorema 5 *Sia $\{f_n\}_n$ una successione di funzioni in $L^1(I\!R)$ convergente in $L^1(I\!R)$ ad una funzione $f \in L^1(I\!R)$. Allora:*

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Dimostrazione É conseguenza immediata della linearitá della trasformata di Fourier e della (v) Proposizione 1.

Teorema 6 *Sia $f \in L^1(I\!R) \cap C^1(I\!R)$ e $f' \in L^1(I\!R)$. Allora:*

$$\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda \hat{f}(\lambda), \quad \lambda \in I\!R. \tag{5.8}$$

(Cioé la trasformata di Fourier trasforma la derivazione nel prodotto per $i\lambda$).

Dimostrazione Dall'ipotesi, possiamo scrivere:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(v)dv, \quad t \in I\!R.$$

Dato che $f' \in L^1(I\!R)$, si ha $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$.
Integrando per parti,

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\widehat{f'}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}dt \\ &= i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt \\ &= \sqrt{2\pi}(i\lambda)\hat{f}(\lambda). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONI (a) In generale se $f \in L^1(I\!R) \cap C^k(I\!R)$, $k \in I\!N$, $k \geq 2$, e se $f^{(j)} \in L^1(I\!R)$, per ogni $j = 1, \ldots, k$, si ha :

$$\widehat{f^{(k)}}(\lambda) = (i\lambda)^k \hat{f}(\lambda). \tag{5.9}$$

(b) Il teorema 5 sussiste anche se f é assolutamente continua, con $f' \in L^1(I\!R)$.

Corollario 1 *Se* $f \in L^1(I\!R) \cap C^k(I\!R)$, $k \in I\!N$, *e se* $f^{(j)} \in L^1(I\!R)$, $j = 1, \ldots, k$, *si ha:*

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} |\lambda|^k |\hat{f}(\lambda)| = 0. \tag{5.10}$$

Dimostrazione Dalla (9), e dal fatto che $\widehat{f^{(k)}}(\lambda) \to 0$, $|\lambda| \to +\infty$, segue l'asserto.

In particolare se $f \in C^2(I\!R) \cap L^1(I\!R)$ e $f', f'' \in L^1(I\!R)$, si ottiene $\hat{f} \in L^1(I\!R)$.

Il corollario 1 mette in luce che quante piú derivate ha la f, tanto piú rapidamente $\hat{f}$ tende a 0, per $|\lambda| \to +\infty$. Vale anche un "viceversa":

Teorema 7 *Sia* $f \in L^1(I\!R)$; *se la funzione* g *definita dalla* $g(t) = tf(t)$ *é in* $L^1(I\!R)$, $\hat{f}$ *é derivabile e risulta:*

$$\hat{f}'(\lambda) = \widehat{-ig}(\lambda), \quad \lambda \in I\!R. \tag{5.11}$$

Dimostrazione Derivando sotto il segno di integrale, si ha:

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = -i \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

da cui segue l'asserto.

In generale, se $f \in L^1(I\!R)$, posto $g_k(t) = t^k f(t)$, $k \in I\!N$, $k \geq 2$, se $g_j \in L^1(I\!R)$, $j = 1, \ldots, k$, si ha che $\hat{f}$ é derivabile k-volte ed inoltre:

$$\hat{f}^{(k)}(\lambda) = \widehat{-i^k g_k}(\lambda), \quad \lambda \in I\!R.$$

Il teorema seguente, del quale non riportiamo la dimostrazione, mostra che la trasformata di Fourier é iniettiva.

Teorema 8 *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Se* $\hat{f}(\lambda) = 0$, *per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$, *si ha* $f(t) = 0$ *quasi ovunque in* $\mathbb{R}$.

In particolare, se $\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha $f = g$ in $L^1(\mathbb{R})$.

Teorema 9 *(Formula di Parseval). Se* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, *si ha:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) g(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\lambda) f(\lambda) d\lambda \tag{5.12}$$

Dimostrazione É una conseguenza del teorema di Fubini: si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) g(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right\} d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \hat{g}(t) dt. \end{aligned}$$

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ e sia $f \star g$, il loro prodotto di convoluzione in $\mathbb{R}$. Sussiste il seguente importante:

Teorema 10 *(Teorema di Convoluzione) Per* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, *si ha:*

$$\widehat{f \star g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.13}$$

Dimostrazione La dimostrazione é analoga a quella del teorema 6, Cap.2.

5.4 Inversione

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se f verifica la condizione di Dini per ogni $x \in \mathbb{R}$, il teorema integrale di Fourier (teorema 3), fornisce una formula di inversione del tipo:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove l'integrale é inteso nel senso del valore principale. Tuttavia é spesso utilizzato il seguente teorema, del quale non daremo la dimostrazione.

Teorema 11 *Se* $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, *si ha:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda, \quad q.o. x \in \mathbb{R}, \tag{5.14}$$

dove l'integrale é inteso nel senso di Lebesgue. Inoltre se f *é continua la (14) vale ovunque in* $\mathbb{R}$.

Corollario 2 *Siano $f, g \in L^1(I\!R)$. Se $\hat{g} \in L^1(I\!R)$, si ha:*

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)\; e^{i\lambda x} d\lambda, \tag{5.15}$$

quasi ovunque in $I\!R$.

Dimostrazione Per il teorema 10 si ha $\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$, ed esiste una costante $M > 0$ tale che $\|\hat{f}\|_\infty \leq M$. Pertanto risulta:

$$\|\widehat{f \star g}\|_1 = \|\hat{f}\hat{g}\|_1 \leq M\|\hat{g}\|_1.$$

L'asserto segue dal teorema 11.

5.5 Alcune applicazioni alla teoria dei segnali

In questo paragrafo interpreteremo una funzione f, continua in $I\!R$, come un *segnale*. In tal caso $\hat{f}$ puó essere riguardata come la *funzione frequenza* del segnale f. Essa rappresenta il cosiddetto *spettro* di f.

Un segnale f si dice *a banda limitata* in un intervallo $[-a, a]$, $a > 0$, se $\hat{f}(\lambda) = 0$ per $|\lambda| > a$, cioé l'insieme delle frequenze di f é limitato.
Sia $w \in I\!R^+$ un numero fissato e sia f un segnale a banda limitata in $[-\pi w, \pi w]$. Il classico *Sampling Theorem* stabilisce che f puó essere ricostruito completamente usando i valori "campione" $f(k/w)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, calcolati nei "nodi" k/w ugualmente spaziati sull'intero asse reale, attraverso la formula:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/w)\mathrm{sinc}[\pi(wt - k)], \quad t \in I\!R, \tag{5.16}$$

dove sinc $t = (\sin t)/t$.

Questo teorema, attribuito a vari autori, (i nomi piú accreditati sono quelli di Whittaker (1915), Kotel'nikov (1933), Shannon (1940)), é risultato di fondamentale importanza nella teoria dei segnali, anche se da certi punti di vista non sembra di grande utilitá. Ad esempio, la (16) mette in evidenza che per ricostruire il segnale f all'istante t_o, occorre conoscere valori campione $f(k/w)$ non soltanto nel "passato", ma anche nel "futuro", cosicché nella "predizione" dei segnali, questa formula appare del tutto inefficace. Un'altra restrizione é costituita dal fatto che la (16) sussiste per segnali a banda limitata, anche se nella pratica questa assunzione é normalmente utilizzata, senza compromettere la validitá dei modelli matematici.

Tratteremo qui una impostazione generale del problema della ricostruzione dei segnali, non necessariamente a banda limitata, che é stata introdotta recentemente da P.L.Butzer. In questo assetto la (16) sará verificata in un senso approssimato, ma utilizzando di fatto un *numero finito* di campioni. Il trucco sta nel sostituire la funzione "*sinc*" con altre che abbiano un supporto compatto.

Indicheremo qui, come al solito, con $\mathcal{C}$ lo spazio di tutte le funzioni $f : I\!\!R \to I\!\!R$ uniformemente continue e limitate, con l'usuale norma $\|f\|_\infty = \sup_{t\in I\!\!R}|f(t)|$. Indicheremo poi con $\mathcal{C}^{(r)}$ lo spazio delle funzioni $f \in \mathcal{C}$ tali che esiste la derivata r-esima, $r \in I\!\!N$, e $f^{(r)} \in \mathcal{C}$. Infine indicheremo con $C_c(I\!\!R)$ e $C_c^{(r)}(I\!\!R)$, $r \in I\!\!N$, i sottospazi di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^{(r)}$ costituiti dalle funzioni a supporto compatto.

Se $\varphi \in C_c(I\!\!R)$ ed $f \in \mathcal{C}$, poniamo:

$$(S_w^\varphi f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/w)\varphi(wt-k), \quad t \in I\!\!R, \quad w > 0. \tag{5.17}$$

Osserviamo che poiché φ ha supporto compatto, c'é un intervallo $[-a, a]$ tale che $\varphi(t) = 0$ se $|t| > a$. Questo implica che la serie nella (17) ha solo un numero finito di termini diversi da zero, quelli per i quali $wt - k$ appartiene al supporto di φ. Questo implica anche che $S_w^\varphi \in \mathcal{C}$, per ogni $w > 0$; inoltre:

$$\|S_w^\varphi\|_\infty \leq m_o(\varphi)\|f\|_\infty, \tag{5.18}$$

dove $m_o(\varphi) = \sup_{u\in I\!\!R} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi(u-k)| < +\infty$.

ESERCIZIO Provare la (18) e dimostrare che $m_o(\varphi) < +\infty$.

Sussiste il seguente:

Teorema 12 *Sia $\varphi \in C_c(I\!\!R)$ tale che:*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(u-k) = 1, \quad u \in I\!\!R. \tag{5.19}$$

Se $f : I\!\!R \to I\!\!R$ é una funzione continua in $t_o \in I\!\!R$, allora:

$$\lim_{w\to+\infty} (S_w^\varphi f)(t_o) = f(t_o). \tag{5.20}$$

Se $f \in \mathcal{C}$, allora:

$$\lim_{w \to +\infty} \|S_w^\varphi f - f\|_\infty = 0, \tag{5.21}$$

cioé S_w^φ é uniformemente convergente ad f per $w \to +\infty$.

Dimostrazione Proviamo la (20). Dato $\varepsilon > 0$, per la continuitá di f in t_o, esiste $\delta > 0$ tale che :

$$|f(t_o) - f(k/w)| < \varepsilon,$$

se $|t_o - k/w| < \delta$. Se $w > 0$, scriviamo, per la (19):

$$\begin{aligned}
|f(t_o) - (S_w^\varphi)(t_o)| &= |\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t_o)\varphi(wt_o - k) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/w)\varphi(wt_o - k)| \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(t_o) - f(k/w)||\varphi(wt_o - k)| \\
&= (\sum_{(1)} + \sum_{(2)})|f(t_o) - f(k/w)||\varphi(wt_o - k)| \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

dove $\sum_{(1)}$ é la sommatoria estesa a tutti i $k \in \boldsymbol{Z}$ tali che $|wt_o - k| < \delta w$, mentre $\sum_{(2)}$ é estesa ai $k \in \boldsymbol{Z}$ tali che $|wt_o - k| \geq \delta w$.
Ora $I_1 < \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi(wt_o - k)| \leq \varepsilon\ m_o(\varphi)$. Inoltre tenendo fissato il $\delta > 0$, possiamo scegliere $w > 0$ cosí grande che il supporto di φ sia contenuto in $[-\delta w, \delta w]$. In tal modo $I_2 = 0$ e da questo segue la (20).
La (21) segue in modo analogo, tenendo conto del fatto che essendo $f \in C(\mathbb{R})$, il δ puó essere scelto indipendentemente da t.

Corollario 3 *Supponiamo che sussistano le condizioni del teorema 12. Se, in piú, φ ha supporto compatto in $]0, +\infty[$, allora, in ogni punto t_o di continuitá di f risulta:*

$$\begin{aligned}
\lim_{w \to +\infty} (S_w^\varphi)(t_o) &= \lim_{w \to +\infty} \sum_{(k/w) < t_o} f(k/w)\varphi(wt_o - k) \\
&= f(t_o).
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Nella (22) la sommatoria é ora estesa a tutti i k tali che $k < t_o w$.

Dimostrazione Dato che il supporto di φ é contenuto in $]0,+\infty[$, $\varphi(wt_o - k) = 0$ se $k/w \geq t_o$. Pertanto:

$$(S_w^{\varphi})(t_o) = \sum_{k/w<t_o} f(k/w)\varphi(wt_o - k).$$

L'asserto segue dal teorema 12.

La (22) é importante poiché consente di *predire* il segnale in t_o usando solo un numero finito di "campioni" scelti nel "passato" di t_o. Osserviamo anche che la (19) é necessaria per la (21), nel senso che se vale la (21) per ogni $f \in \mathcal{C}$, allora sussiste la (19). Pertanto é utile avere a disposizione alcune condizioni sulla φ, in modo che valga la (21) e, soprattutto, siano agevoli da controllare. A tale scopo enunciamo il seguente:

Teorema 13 *Se $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, la condizione (19) é equivalente alla:*

$$\sqrt{2\pi}\hat{\varphi}(2\pi k) = \begin{cases} 1 & se\ k = 0 \\ 0 & se\ k \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\} \end{cases} \tag{5.23}$$

Dimostrazione É omessa. Essa si basa sulla *formula di Poisson* :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(u-k) \cong \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(2\pi k)e^{i2\pi k},$$

dove $\cong$ significa che la seconda serie é la serie di Fourier della funzione (1-periodica) a sinistra.

ESEMPIO Se $n \in \mathbb{N}$, definiamo le funzioni *central B-splines*, ponendo:

$$M_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \left(\frac{n}{2} + t - j\right)_+^{n-1},$$

dove, se $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$, abbiamo posto $x_+^r = max\{x^r, 0\}$.
Se $n = 2$, otteniamo per esempio la funzione:

$$M_2(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 0 \end{cases}$$

mentre, se $n = 3$,:

$$M_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(|t| + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(|t| + \frac{1}{2}\right)^2, & |t| \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left(-|t| + \frac{3}{2}\right)^2, & \frac{1}{2} < |t| \le \frac{3}{2} \\ 0, & |t| > \frac{3}{2} \end{cases}$$

É possibile mostrare che per $n \geq 3$ vale la formula ricorsiva:

$$M_n(t) = \frac{((n/2)+t)M_{n-1}(t+1/2) + ((n/2)-t)M_{n-1}(t-1/2)}{n-1}.$$

Inoltre risulta:

$$\widehat{M_n}(\lambda) = \left[\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right]^n, \quad \lambda \in I\!R, \quad n \in I\!N, \tag{5.24}$$

e quindi si ha:

$$\widehat{M_n}(2\pi k) = 0, \quad k \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}, \quad \widehat{M_n}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Allo scopo di studiare l'ordine di approssimazione nella (21), introduciamo la notazione seguente: se $r \in I\!N \setminus \{0\}$, poniamo:

$$m_r(\varphi) = \sup_{u \in I\!R} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u-k|^r |\varphi(u-k)|,$$

dove $\varphi \in C_c(I\!R)$.

sussiste il seguente:

Teorema 14 *Sia $\varphi \in C_c(I\!R)$. Supponiamo che per qualche $r \in I\!N$ risulti:*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (u-k)^j \varphi(u-k) = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & j = 1, 2, \ldots, r-1 \end{cases} \tag{5.25}$$

per ogni $u \in I\!R$. Allora:

$$\|f - S_w^\varphi\|_\infty \leq \frac{m_r(\varphi)}{r!} \|f^{(r)}\|_\infty w^{-r}, \tag{5.26}$$

per $f \in \mathcal{C}^{(r)}$, $w > 0$.

Dimostrazione Applichiamo alla f la formula di Taylor con il resto integrale d'ordine r :

$$f(u) = \sum_{h=0}^{r-1} \frac{f^{(h)}(t)}{h!}(u-t)^h + \frac{1}{(r-1)!}\int_t^u f^{(r)}(y)(u-y)^{r-1}dy$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}(S_w^{\varphi})(t) - f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/w)\varphi(wt-k) - f(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{h=0}^{r-1} \frac{f^{(h)}(t)}{h!}((k/w)-t)^h \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r-1)!}\left\{\int_t^{k/w} f^{(r)}(y)((k/w)-y)^{r-1}dy\right\}\varphi(wt-k) - f(t).\end{aligned}$$

per ogni $t \in I\!R$. Da questo segue la (26).

Osserviamo che una condizione equivalente alla (25) per funzioni $\varphi \in C_c(I\!R)$, é espressa dalla seguente:

$$\hat{\varphi}^{(j)}(2\pi k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2\pi}, & k = j = 0 \\ 0, & k \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}, \quad j = 0 \\ 0, & k \in \boldsymbol{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, r-1 \end{cases} \tag{5.27}$$

ESEMPIO Se $r = 2$, il nucleo:

$$\varphi_2(t) = 3M_2(t-2) - 2M_2(t-3),$$

verifica (27). Inoltre, in tal caso, $m_r(\varphi_2)/r! \le 15$, e:

$$\|f - S_w^{\varphi_2} f\|_\infty = O(w^{-2}), \quad w \to +\infty.$$

Se $r = 3$, possiamo prendere:

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{8}\{47M_3(t-2) - 62M_3(t-3) + 23M_3(t-4)\}.$$

In tal caso, $m_r(\varphi_3)/r! \le 54$, e:

$$\|f - S_w^{\varphi_3} f\|_\infty = O(w^{-3}), \quad w \to +\infty.$$

La costruzione di tali funzioni si basa sulla risoluzione di sistemi lineari in campo complesso la cui formulazione esula dalla trattazione presente.

5.6 Il problema di Dirichlet per il semipiano

Il problema consiste nel determinare la distribuzione di temperatura su una lamina bidimensionale infinita, assimilabile ad un semipiano, nota la temperatura lungo il bordo. Se $u(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, rappresenta la temperatura nel punto (x,y), e se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é la distribuzione iniziale di temperatura sull'asse x, il problema consiste nel determinare la soluzione dell'equazione:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ con una condizione iniziale del tipo $u(x,0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Il metodo che seguiremo fará uso della trasformata di Fourier in $\mathbb{R}$ (questo dipende dalla forma del dominio di $u(x,y)$).
Supporremo $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ con $u(\cdot,y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(\cdot,y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\cdot,y)$ in $L^1(\mathbb{R})$, ed inoltre:

(+) $\|u(\cdot,y)\|_1 \leq M$, per ogni $y \in \mathbb{R}^+$, per qualche $M > 0$.

(++) Esistono funzioni $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ tali che:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right| \leq g(x), \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right| \leq h(x),$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Infine, interpreteremo il dato al bordo, supponendo $f \in L^1(\mathbb{R})$ e :

$$\lim_{y\to 0^+} \|u(\cdot,y) - f(\cdot)\|_1 = 0. \tag{5.28}$$

Applichiamo ora la trasformata di Fourier alla funzione $u(\cdot,y)$ come funzione di x. Usando il fatto che u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ rispetto ad x, otteniamo:

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(\lambda,y) = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda,y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad y > 0. \tag{5.29}$$

Inoltre dalle (++), usando un teorema di derivazione sotto il segno di integrale, si ha:

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(\lambda,y) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\lambda,y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad y > 0. \tag{5.30}$$

L'equazione $\Delta u = 0$ diventa allora:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\lambda, y) - \lambda^2 \hat{u}(\lambda, y) = 0, \quad \lambda \in I\!\!R, \quad y > 0. \tag{5.31}$$

La (31) é una equazione differenziale ordinaria, dipendente dal parametro, la cui funzione incognita é $z(y) = u(\lambda, y)$. L'equazione é lineare del secondo ordine a coefficienti costanti (rispetto ad y). La soluzione generale é allora:

$$\hat{u}(\lambda, y) = \begin{cases} A(\lambda)e^{\lambda y} + B(\lambda)e^{-\lambda y} & \lambda \neq 0 \\ A(0) + B(0)y & \lambda = 0, \end{cases}$$

dove $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ sono coefficienti (dipendenti dal parametro λ). Occorre ora determinare $A(\lambda)$, $B(\lambda)$.
Dalla (+), $|\hat{u}(\lambda, y)| \leq M$, per ogni $\lambda \in I\!\!R$, $y \in I\!\!R^+$ e quindi per $y \to +\infty$, $A(\lambda) = 0$, se $\lambda > 0$, $B(\lambda) = 0$, se $\lambda \leq 0$.
Inoltre la (28) si trasforma nella (teorema 5):

$$\lim_{y \to 0^+} \|\hat{u}(\lambda, y) - \hat{f}(\lambda)\|_\infty = 0.$$

Ció implica che $A(\lambda) + B(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$, per ogni $\lambda \in I\!\!R$; pertanto se $u(x, y)$ é una soluzione del problema, la sua trasformata di Fourier é data da:

$$\hat{u}(\lambda, y) = \hat{f}(\lambda)e^{-|\lambda|y}, \quad \lambda \in I\!\!R, \quad y > 0. \tag{5.32}$$

Poiché $\hat{u}(\cdot, y) \in L^1(I\!\!R)$, usando il teorema 11, otteniamo:

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y|\lambda|} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Adoperando il risultato dell'esempio c) del paragrafo 2, ed il corollario 2, otteniamo infine:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x - s)}{y^2 + s^2} ds. \tag{5.33}$$

É facile ora verificare direttamente che (33) é soluzione dell'equazione $\Delta u = 0$, con il dato iniziale stabilito. L'integrale nella (33) si chiama *integrale singolare di Poisson-Cauchy.*

Bibliography

[1] T.M.Apostol *Mathematical Analysis* Addison-Wesley Publ. Co. 1974

[2] H.Brezis *Analisi Funzionale, Teoria ed Applicazioni* Liguori Ed. 1983

[3] P.L.Butzer -R.J.Nessel *Fourier Analysis and Approximation* Academic Press, 1971

[4] P.L.Butzer -R.L.Stens *Linear Prediction in Terms of Samples from the Past* Numerical Methods, 1988

[5] A.H.Griffel *Applied Functional Analysis* John Wiley and Sons, 1981

[6] A.N.Kolmogorov -A.Fomin *Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale* Edizioni MIR, 1980

[7] A.Papoulis *Signal Analysis* McGraw-Hill, 1977

[8] W.Rudin *Analisi Reale e Complessa* Boringhieri, 1974

[9] G.F.Simmons *Introduction to Topology and Modern Analysis* McGraw-Hill, 1963 .