Metodi Matematici per l'Ingegneria

Carlo Bardaro

Contents

Chapter 1

Serie di Fourier

1.1 Sistemi ortogonali in $L^2(I),\ I \subset I\!R$

Sia $I \subset I\!R$ un generico intervallo che puó essere anche non limitato. Sia $f : I \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile (secondo Lebesgue) in I (cioé posto $f = u + iv$, le funzioni u, v sono misurabili in I). Diremo che f é integrabile secondo Lebesgue in I se lo é la funzione reale $\mid f \mid= (u^2 + v^2)^{1/2}$. Dato che $\mid u \mid\leq\mid f \mid$, and $\mid v \mid\leq\mid f \mid$, se f é integrabile in I, lo sono anche u e v. Con $L^2(I)$ indicheremo lo spazio di tutte le funzioni misurabili $f : I \to \mathbb{C}$ tali che $\mid f \mid^2\in L^1(I)$. Come al solito noi penseremo gli elementi di $L^2(I)$ come a classi di equivalenza rispetto alla relazione di uguaglianza quasi ovunque. In tal modo $f = g$ in $L^2(I)$ significa $f(x) = g(x)$ quasi ovunque in I. Usando la disuguaglianza di Holder con $p = q = 2$, otteniamo che $f \cdot g \in L^1(I)$ ogniqualvolta $f, g \in L^2(I)$ e si ha:

$$\int_I \mid fg \mid dx \leq \sqrt{\int_I \mid f \mid^2 dx} \cdot \sqrt{\int_I \mid g \mid^2 dx} \tag{1.1}$$

relazione che sinteticamente scriveremo $\parallel fg \parallel_1\leq\parallel f \parallel_2 \cdot \parallel g \parallel_2$.
Il funzionale $<,>$: $L^2(I) \times L^2(I) \to \mathbb{C}$ definito dalla:

$$< f, g >= \int_I f(x)\overline{g(x)}dx, f, g \in L^2(I), \tag{1.2}$$

é allora ben definito e si chiama *prodotto scalare* o *prodotto interno* in $L^2(I)$. Dalla (2) é facile vedere che $< f, f >^{1/2}$ é un numero reale non negativo e coincide con$\parallel f \parallel_2$.

La proposizione seguente mette in evidenza alcune proprietá fondamentali del prodotto scalare.

Proposizione 1 *Se $f, g, h \in L^2(I), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, sussistono le seguenti proprietá:*

(i) $\overline{< g, f >} =< f, g >$

(ii) $< \alpha f + \beta g, h >= \alpha < f, h > +\beta < g, h >$

Dimostrazione. (i) Osserviamo anzitutto che se $f : I \to \mathbb{C}$ é una funzione integrabile, si ha:

$$Re \int_I f(x)dx = \int_I Ref(x)dx, Im \int_I f(x)dx = \int_I Imf(x)dx.$$

Allora si ha:

$$\begin{aligned}\overline{< g, f >} = Re < g, f > -iIm < g, f >= \int_I \{Re(g\overline{f}) - iIm(g\overline{f})\}dx \\ = \int_I \overline{g\overline{f}}dx = \int_I \overline{g}fdx =< f, g > .\end{aligned}$$

La (ii) segue dalla proprietá di linearitá dell'integrale di Lebesgue.

Corollario 1 *Se $f, g, h \in L^2(I), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha:*
$< h, \alpha f + \beta g >= \overline{\alpha} < h, f > +\overline{\beta} < h, g >$.

Dimostrazione. Usando la (i) e la (ii) si ha:

$$\begin{aligned}< h, \alpha f + \beta g >= \overline{< \alpha f + \beta g, h >} = \overline{\alpha < f, h > +\beta < g, h >} \\ = \overline{\alpha} < h, f > +\overline{\beta} < h, g > .\end{aligned}$$

Sia $N = \{\varphi\}_k, k = 0, \ldots,$ un insieme numerabile di funzioni in $L^2(I)$ tale che :

$$< \varphi_n, \varphi_m >= 0, n \neq m, < \varphi_n, \varphi_n >= \|\varphi_n\|^2 > 0, n = 0, 1, \ldots . \qquad (1.3)$$

Diremo che N é un insieme di funzioni *ortogonale* in $L^2(I)$. Diremo poi che N é *ortonormale* se oltre alle (3) risulta anche $\|\varphi_n\|_2 = 1,$ per ogni $n = 0, 1 \ldots .$
É facile verificare che se N é ortogonale allora per ogni fissato $n, \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é linearmente indipendente. Infatti supponiamo che $c_o, \ldots, c_n$ siano costanti

complesse tali che $\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j = 0$, per quasi ogni $x \in I$. Allora per ogni $k = 0, \dots, n$ si ha:

$$0 =< \sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j, \varphi_k >= \sum_{j=0}^{n} c_j < \varphi_j, \varphi_k >= c_k\|\varphi\|_2^2,$$

da cui essendo $\|\varphi_k\|_2 > 0$ segue $c_k = 0$.

Sia $S = \{e_o, e_1, e_2, \dots\} \subset L^2(I)$ un insieme tale che per ogni fissato n l'insieme $S_n = \{e_o, e_1, \dots, e_n\}$ é linearmente indipendente . É allora possibile costruire un insieme N ortonormale, $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \dots\}$ tale che per ogni fissato $n, N_n = \{\varphi_o, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ e S_n generano lo stesso sottospazio di $L^2(I)$. Il procedimento, noto come *processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt* consiste nel costruire $\{\varphi_o, \varphi_1, \dots\}$ ponendo successivamente:

$$\varphi_o = \frac{e_o}{\|e_o\|_2}, \ \varphi_k = \frac{e_k - \sum_{j=0}^{k-1} < e_k, \varphi_j > \varphi_j}{\|e_k - \sum_{j=0}^{k-1} < e_k, \varphi_j > \varphi_j\|_2}, \ k = 1, 2, \dots \tag{1.4}$$

Osserviamo che le funzioni $\varphi_k, k = 0, 1, \dots,$ sono ben definite a causa della lineare indipendenza del sistema $\{e_{o,}, e_1, \dots, e_n\}$, per ogni $n \in I\!N$. Inoltre non é difficile provare che $\{\varphi_o, \varphi_1, \dots\}$ é ortonormale in $L^2(I)$.

ESEMPI

(a) Consideriamo lo spazio $L^2[-1, 1]$ ed il sottoinsieme $S = \{e_o, e_1, \dots\}$ con $e_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, \dots$. Il principio di identitá dei polinomi implica che ogni sottoinsieme finito di S é linearmente indipendente. Ortogonalizzando in $L^2[-1, 1]$ l'insieme S otteniamo un insieme ortonormale $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \dots\}$ i cui elementi sono polinomi detti *polinomi di Legendre*. Otteniamo per esempio $\varphi_o = \sqrt{2}/2, \varphi_1 = (\sqrt{3}/2)\ x$, etc...
Si puó dimostrare che i polinomi di Legendre possono essere ottenuti con la *formula di Rodrigues* :

$$\|\varphi_n\|_2\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \ n = 0, 1, \dots . \tag{1.5}$$

L'espressione (5) puó essere ottenuta cercando le soluzioni polinomiali dell'*equazione differenziale di Legendre* :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + k(k + 1)y = 0, \ k \in I\!N$$

(b) Consideriamo lo spazio $L^2(I\!R)$ ed il sottoinsieme $S = \{e_o, e_1, \ldots\}$ con $e_n(x) = x^n e^{-x^2/2}$, $n = 0, 1, \ldots$. É facile mostrare che ogni sottoinsieme finito di S é linearmente indipendente. Ortogonalizzando in $L^2(I\!R)$ l'insieme S, otteniamo un insieme ortonormale N i cui elementi sono detti *funzioni di Hermite.*

(c) Ortogonalizzando in $L^2[0, +\infty[$ l'insieme $S = \{e_o, e_1, \ldots\}$ delle funzioni $e_n(x) = x^n e^{-x}$, si ottengono le *funzioni di Laguerre.*

(d) Nello spazio $L^2[-\pi, \pi]$ il sistema $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \ldots\}$, con

$$\varphi_o(x) = 1/\sqrt{2\pi},\ \varphi_{2n-1}(x) = \frac{cosnx}{\sqrt{\pi}},\ \varphi_{2n}(x) = \frac{sinnx}{\sqrt{\pi}}, \tag{1.6}$$

per $n \in I\!N$ é un sistema ortonormale in $L^2[-\pi, \pi]$ detto *sistema trigonometrico reale.*
Un sistema ortonormale di funzioni a valori in $\mathbb{C}$ equivalente a (6) é dato dall'insieme $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{n\in Z}$, detto *sistema trigonometrico complesso.*
Lo studio del sistema trigonometrico occuperá gran parte di questo capitolo, perché é alla base della teoria delle Serie di Fourier.

1.2 Il problema della migliore approssimazione

Sia $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \ldots\}$ un sistema ortonormale in $L^2(I)$ e sia $f : I \to \mathbb{C}$ una funzione in $L^2(I)$. Posto $V^n = \{v_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k\varphi_k(x), q.o.x \in I : a_k \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \ldots, n\}$, il sottospazio generato da $\{\varphi_o, \varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$, il problema consiste nel minimizzare $\|f - v_n\|_2$ al variare di $v_n \in V^n$ cioé al variare della $(n+1)-$ upla $(a_o, a_1, \ldots, a_n) \in C^{(n+1)}$. Se esiste un'unica $\tilde{v_n} \in V^n$ tale che

$$min_{v_n\in V^n}\|f - v_n\|_2 = \|f - \tilde{v_n}\|_2$$

allora $\tilde{v_n}$ é detto *la proiezione di f su V^n.*
É ovvio che se $f \in V^n$ allora $\tilde{v_n} = f$ minimizza $\|f - v_n\|_2$ in V^n e che $min_{v_n\in V^n}\|f - v_n\|_2 = 0$.
Il teorema seguente mostra che per ogni $f \in L^2(I)$ esiste un'unica $\tilde{v_n} \in V^n$ tale che $\|f - \tilde{v_n}\|_2 = min_{v_n\in V^n}\|f - v_n\|_2$ cioé ogni $f \in L^2(I)$ possiede la proiezione sul sottospazio V^n. Tale proiezione é detta *combinazione lineare di migliore approssimazione ad f in V^n.*

Teorema 1 *Siano* $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \ldots\}$ *un sistema ortonormale in* $L^2(I)$ *ed* $f \in L^2(I)$. *Posto per ogni* $k \in I\!N$, $\hat{f_k} =< f, \varphi_k >$ *e, per ogni* $n \in I\!N$,

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k \varphi_k(x), \quad v_n(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

risulta:

$$\|f - s_n\|_2 \leq \|f - v_n\|_2 \tag{1.7}$$

per ogni $n \in I\!N$, *ed il segno di uguaglianza sussiste se e solo se* $a_k = \hat{f}_k$, *per ogni* $k = 0, 1, \ldots$.

Dimostrazione. Si tratta di provare che $min_{v_n \in V^n} \|f - v_n\|_2 = \|f - s_n\|_2$ cioé che la funzione delle $(n+1)-$ variabili complesse $\{a_o, a_1, \ldots, a_n\}$ definita dalla $F(a_o, a_1, \ldots, a_n) = \|f - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k\|_2$ ammette minimo assoluto e che tale minimo é assunto solo in $(\hat{f_o}, \hat{f_1}, \ldots, \hat{f_n})$.
Risulta anzitutto:

$$\begin{aligned} \|f - v_n\|_2^2 &=< f - v_n, f - v_n > \\ =< f, f > - < f, v_n > - < v_n, f > &+ < v_n, v_n > \\ = \|f\|_2^2 - < f, v_n > - \overline{< f, v_n >} &+ \|v_n\|_2^2. \end{aligned}$$

Applicando ora la proposizione 1 e il corollario 1, otteniamo

$$\|v_n\|_2^2 =< v_n, v_n >= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_k \overline{a_j} < \varphi_k, \varphi_j >= \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2$$

mentre $< f, v_n >= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} < f, \varphi_k >= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \hat{f}_k$. Pertanto:

$$\begin{aligned} \|f - v_n\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \hat{f}_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\hat{f}_k} + \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} (a_k - \hat{f}_k)(\overline{a_k} - \overline{\hat{f}_k}) \qquad (1.8) \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |a_k - \hat{f}_k|^2. \end{aligned}$$

Da questo segue che il minimo assoluto esiste ed é assunto se $a_k = \hat{f}_k$, per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$.

I coefficienti $\hat{f}_k =< f, \varphi_k >, k = 0,1,2,\ldots,$ che realizzano le migliori approssimazioni di f al sottospazio V^n , per ogni n, si chiamano *coefficienti di Fourier di f rispetto al sistema ortonormale N* e la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k(x)$, definita quasi ovunque, é detta *Serie di Fourier relativa ad N*. La notazione $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k(x)$, significa che la serie a destra é la serie di Fourier associata ad $f \in L^2(I)$ rispetto ad N e non implica alcuna proprietá di convergenza.

ESEMPIO Se N é il sistema trigonometrico reale (esempio d del par.1) la serie

$$\frac{1}{2}\hat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^{\infty}(\hat{f}_c(k)coskx + \hat{f}_s(k)sinkx)$$

dove $\hat{f}_c(k)$, $\hat{f}_s(k)$, sono definiti dalle

$$\hat{f}_c(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx,\ k = 0,1,2,\ldots,\ \hat{f}_s(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinkxdx,\ k = 1,2,\ldots,$$

é la serie trigonometrica di Fourier generata da f o semplicemente la serie di Fourier di f.

1.3 Proprietá principali dei coefficienti di Fourier

Sussiste il seguente teorema:

Teorema 2 *(Disuguaglianza di Bessel) Siano $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \ldots\}$ un sistema ortonormale in $L^2(I)$, $f \in L^2(I)$. Allora*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|_2^2. \tag{1.9}$$

Nella (9) vale il segno di uguaglianza se e solo se risulta:

$$\lim_{k\to\infty} \|f - s_k\|_2 = 0,$$

dove le funzioni s_k sono le somme parziali della serie di Fourier di f relativa ad N.

Dimostrazione Se nella (8) poniamo $a_k = \hat{f}_k$ otteniamo:

$$\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}_k|^2 = \|f - s_n\|_2^2 \geq 0,$$

per ogni $n \in I\!N$ e quindi la (9) segue immediatamente. Ancora con la sostituzione $a_k = \hat{f}_k$ nella (8) otteniamo:

$$\|f - s_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}_k|^2,$$

da cui segue l'asserto.

La relazione (9) nel caso dell'uguaglianza é detta *identitá di Parseval.*

Corollario 2 *Per ogni* $f \in L^2(I)$ *e per ogni sistema ortonormale* $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \ldots\}$, *la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}_k|^2$ *é convergente e quindi* $\lim_{k\to\infty} \hat{f}_k = 0$.

ESEMPIO Se N é il sistema trigonometrico reale in $L^2[-\pi, \pi]$ si ottiene

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ coskxdx = \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ sinkxdx = 0.$$

Il seguente risultato dovuto a Riesz e Fischer stabilisce un inverso del teorema precedente.

Teorema 3 *Sia* $\{c_n\}_{n\in I\!N_o}$ *una successione di numeri complessi tale che* $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ *e sia* $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ *un sistema ortonormale in* $L^2(I)$. *Esiste una funzione* $f \in L^2(I)$ *tale che* $c_k = \hat{f}_k =< f, \varphi_k >, k = 0, 1, 2, \ldots$.

Dimostrazione Posto $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k$, si ha

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|_2^2 =< s_n - s_m, s_n - s_m > &= \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{j=n+1}^{m} c_k \overline{c_j} < \varphi_k, \varphi_j > \\ &= \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2. \end{aligned}$$

Dalla convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$, segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\overline{n}$ tale che per ogni $n, m > \overline{n}, \|s_n - s_m\|_2^2 < \varepsilon$. La successione $\{s_n\}$ é allora di Cauchy e siccome $L^2(I)$ é completo, esiste $f \in L^2(I)$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_2 = 0$. Resta da provare che $\hat{f}_k = c_k$. A tale scopo siano n, k con $n \geq k$. Usando l'ortonormalitá di N é facile vedere che $< s_n, \varphi_k >= c_k$ e quindi usando la disuguaglianza di Hölder, si ha:

$$\begin{aligned} |c_k - \hat{f}_k| &= | < s_n, \varphi_k > - < f, \varphi_k > | = | < s_n - f, \varphi_k > | \\ &\leq \|\varphi_k\|_2 \|s_n - f\|_2. \end{aligned}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo $|c_k - \hat{f}_k| = 0$, cioé l'asserto per l'arbitrarietá di k.

OSSERVAZIONE La funzione $f \in L^2(I)$ la cui esistenza é assicurata dal teorema di Riesz-Fischer é tale che

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}_k|^2.$$

Questa é una diretta conseguenza del teorema 2.

Sia $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \ldots\}$ un sistema ortonormale in $L^2(I)$. Se per ogni $f \in L^2(I)$ sussiste l'identitá di Parseval, diremo che N é un *sistema completo* o una *base* in $L^2(I)$. In tal caso, per il teorema 2, ogni $f \in L^2(I)$ é limite in $L^2(I)$ della successione delle somme parziali

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k \varphi_k(x), \quad x \in I$$

e viceversa. Se N é un sistema completo, scriveremo allora

$$f(x) =_2 \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k(x)$$

per denotare $\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_2 = 0$.

ESEMPIO Il sistema trigonometrico in forma reale o complessa é completo in $L^2([-\pi, \pi])$. Questo sará provato in parte dopo il teorema di Fejer.

1.4 Il sistema trigonometrico. La trasformata discreta di Fourier

Consideriamo lo spazio $L^2[-\pi, \pi]$ ed il sistema trigonometrico

$$N = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{cosnx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sinnx}{\sqrt{\pi}}\}_{n=1,2,\ldots}.$$

La corrispondente serie di Fourier di $f \in L^2[-\pi, \pi]$ si scrive allora

$$f \sim \frac{1}{2}\hat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}_c(k)coskx + \hat{f}_s(k)sinkx),$$

dove

$$\hat{f}_c(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx,\ k = 0, 1, \ldots,\ \ \hat{f}_s(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinkxdx, k = 1, 2, \ldots$$

Se scriviamo la serie di Fourier di f rispetto al sistema (trigonometrico) complesso $N = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}_{n\in \boldsymbol{Z}}$, otteniamo

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{ikx},$$

dove i coefficienti $\hat{f}_k$ sono dati dalle formule:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{1.10}$$

In generale una generica serie trigonometrica a coefficienti reali $\{a_k\},\ \{b_k\}$, definita dalla:

$$\frac{1}{2}a_o + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k coskx + b_k sinkx) \tag{1.11}$$

puó essere scritta nella forma complessa (almeno formalmente) usando le formule di Eulero:

$$coskx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}),\ \ sinkx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

e ponendo $a_{-k} = a_k,\ b_{-k} = -b_k,\ b_o = 0,\ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, k \in \boldsymbol{Z}$.

Con queste posizioni, otteniamo la serie:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \tag{1.12}$$

le cui somme parziali si scrivono $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$.
Viceversa dalla (12) si puó ottenere la (10) ponendo

$$a_k = c_k + c_{-k},\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ b_k = i(c_k - c_{-k}),\ k = 1, 2, \ldots.$$

Queste posizioni giustificano la forma di $\hat{f}_k$ nella (10).

Ora osserviamo che i coefficienti $\hat{f}_c(k),\ \hat{f}_s(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ e $\hat{f}_k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, hanno senso anche se $f \in L^1([-\pi, \pi])$; infatti, per esempio,$|f(x)coskx| \leq$

$|f(x)|$, quasi ovunque in $[-\pi, \pi]$. Cosí ad ogni $f \in L^1([-\pi, \pi])$ puó essere associata la serie di Fourier rispetto al sistema trigonometrico (reale o complesso).
Se $f \in L^1([-\pi, \pi])$, la successione $\{\hat{f}_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ si chiama *trasformata discreta di Fourier di* f. La serie di Fourier di f in forma complessa:

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{ikx} \tag{1.13}$$

puó essere vista almeno formalmente, come una formula di inversione della trasformata discreta di Fourier; una formula cioé che consenta di ricostruire la f a partire dala successione $\{\hat{f}_k\}$. Il problema della ricostruzione di f a partire dai coefficienti $\hat{f}_k$ é di grande importanza nelle applicazioni, specie nella teoria dei segnali. Perció dovremo occuparci dello studio della convergenza delle serie di Fourier.

Se ad esempio sapessimo che $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_k| < +\infty$, allora la serie (13) convergerebbe uniformemente ad una funzione g continua e periodica di periodo 2π in $[-\pi, \pi]$. Ma questo non risolve ancora il nostro problema. Dopo il teorema di Fejer proveremo che, nelle ipotesi dette, $f = g$ q.o. in $[-\pi, \pi]$.

Per il momento limitiamoci ad elencare alcune semplici proprietá della trasformata discreta di Fourier.

Proposizione 2 *Se* $f, g \in L^1([-\pi, \pi])$ *si hanno le seguenti proprietá:*

(i) *Posto, per ogni* $h \in \mathbb{R}$, $\tau_h f(x) = f(x+h)$, *si ha* $(\widehat{\tau_h f})_k = e^{ihk} \hat{f}_k$;

(ii) *Posto* $g(x) = e^{ihx} f(x)$, $g \in L^1([-\pi, \pi])$, *si ha* $\hat{g}_k = \widehat{f_{h+k}}$, $h \in \mathbf{Z}$.

(iii) *Posto* $(\tau_- f)(x) = \overline{f(-x)}$, *si ha* $(\widehat{\tau_- f})_k = \overline{\hat{f}_k}$;

(iv) $(\widehat{f+g})_k = \hat{f}_k + \hat{g}_k$, $(\widehat{cf})_k = c\hat{f}_k$, *per* $c \in \mathbb{C}$;

(v) $\lim_{|k| \to \infty} \hat{f}_k = 0$.

Dimostrazione Le proprietá (i), (ii), (iii), (iv) sono semplici conseguenze delle definizioni. Osserviamo soltanto che nella (i) la f é prolungata con periodicitá 2π a tutto $\mathbb{R}$.
La (v) é una conseguenza del corollario 2, nel caso $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Nel caso generale é possibile fornire una prova diretta facendo uso del seguente lemma del quale non riportiamo la dimostrazione:

Lemma 1 *Se* $f \in L^1([-\pi,\pi])$ *allora*

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_1 = 0$$

dove $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$, *ed* f *é estesa con periodicitá* 2π *fuori dell'intervallo* $[-\pi,\pi]$.

Proviamo ora la (v). Per ogni $k \in \boldsymbol{Z}$ con $k \neq 0$ risulta:

$$\begin{aligned} 2\pi|\hat{f}_k| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\frac{\pi}{k})e^{-ikx}dx\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+\frac{\pi}{k})|dx. \end{aligned}$$

Dato che $\pi/k \to 0$ per $|k| \to \infty$, l'asserto segue dal Lemma precedente.

Concludiamo questo paragrafo osservando che dalla definizione di $\hat{f}_k$ segue anche che $|\hat{f}_k| \leq (2\pi)^{-1}\|f\|_1$ per ogni $f \in L^1(I\!R)$. Viceversa é possibile dimostrare che esistono successioni $\{a_k\}, k \in \boldsymbol{Z}$, con $|a_k| \leq M$, per ogni $k \in \boldsymbol{Z}$ ed un fissato M e tali che $\lim_{|k|\to\infty} a_k = 0$, ma che non sono la trasformata di alcuna funzione $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Un esempio é dato dalla serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$ dove a_k é la successione definita dalla:

$$a_k = \begin{cases} 1/\log k & \text{se } k = 2,3,\ldots \\ 0 & \text{altrove in } \boldsymbol{Z} \end{cases}$$

Il risultato seguente esprime la trasformata di Fourier della derivata di una funzione f assolutamente continua in termini di quella di f stessa:

Proposizione 3 *Sia* f *assolutamente continua in* $[-\pi,\pi]$. *Allora:*

$$\widehat{f'_k} = (ik)\hat{f}_k, \quad k \in \boldsymbol{Z}. \tag{1.14}$$

Dimostrazione Poiché f é assolutamente continua, f' esiste quasi ovunque ed é sommabile in $[-\pi,\pi]$. Inoltre, integrando per parti:

$$2\pi\widehat{f'_k} = [f(x)e^{-ikx}]_{-\pi}^{\pi} + ik\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = 2\pi ik\hat{f}_k,$$

e quindi la (14).

La formula (14) puó essere generalizzata in questo modo: se $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$, $n > 1$, esistono e sono assolutamente continue in $[-\pi, \pi]$, allora esiste quasi ovunque $f^{(n)}$, é sommabile in $[-\pi, \pi]$ e risulta:

$$\widehat{f_k^{(n)}} = (ik)^n \hat{f}_k \quad k \in \boldsymbol{Z}. \tag{1.15}$$

La (15) puó essere dimostrata, a partire dalla (14), usando il principio di induzione. Se nella (15) prendiamo i moduli, otteniamo $|\widehat{f_k^{(n)}}| = |k|^n |\hat{f}_k|$ e poiché $|\widehat{f_k^{(n)}}|$ tende a 0 quando $|k| \to \infty$, si ottiene:

$$|\hat{f}_k| = o(|k|^{-n}), \quad |k| \to \infty. \tag{1.16}$$

Questo mette in evidenza che piú é regolare la f, maggiore diventa l'ordine di infinitesimo della successione $\{\hat{f}_k\}$.

É possibile mostrare anche un "viceversa": se $f \in L^1([-\pi, \pi])$ é tale che esistono un intero $n \in I\!N$ ed una funzione $g \in L^1([-\pi, \pi])$ con $(ik)^n \hat{f}_k = \hat{g}_k$, allora f é quasi ovunque uguale ad una funzione φ tale che $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}$ sono assolutamente continue in $[-\pi, \pi]$. Cioé maggiore é l'ordine di infinitesimo di $\hat{f}_k$, maggiore é il grado di regolaritá della f.

1.5 Convoluzioni e trasformata discreta di Fourier

Date due funzioni $f, g : I\!R \to \mathbb{C}$, $2\pi-$ periodiche, definiamo *convoluzione tra* f *e* g, che denotiamo con $f \star g$, l'integrale

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)du, \quad x \in I\!R.$$

É ovvio che se $(f \star g)(x)$ esiste,almeno quasi ovunque, essa rappresenta una funzione periodica col periodo 2π.
Sussistono i seguenti teoremi.

Teorema 4 *Sia* $1 \le p \le +\infty$ *e sia* q *il coniugato di* p. *Se* $f \in L^p([-\pi, \pi])$ *e* $g \in L^q([-\pi, \pi])$ *allora* $(f \star g)(x)$ *esiste finito per ogni* $x \in [-\pi, \pi]$, *é continua e risulta:*

$$max_{x \in [-\pi, \pi]} |(f \star g)(x)| \le \frac{1}{2\pi} \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.17}$$

Dimostrazione Proveremo soltanto la (17). Essa é conseguenza della disuguaglianza di Hölder; infatti per ogni fissato x si ha:

$$\begin{aligned} |(f \star g)(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-u)||g(u)|du \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-u)|^p du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |g(u)|^q du \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

L'asserto segue dal fatto che, per la periodicitá di f, si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-u)|^p du = \int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|^p du.$$

Teorema 5 a) *Siano* $f \in L^p([-\pi,\pi])$, $p \geq 1$, $g \in L^1([-\pi,\pi])$. *Allora* $(f \star g)(x)$ *esiste quasi ovunque,* $(f \star g) \in L^p([-\pi,\pi])$ *e si ha:*

$$\|f \star g\|_p \leq (2\pi)^{-1/p} \|f\|_p \|g\|_1 \tag{1.18}$$

b) *Sia* $f \in C^k([-\pi,\pi])$, f $2\pi-$ *periodica e sia* $g \in L^1([-\pi,\pi])$. *Allora* $(f \star g) \in C^k([-\pi,\pi])$ *e si ha:*

$$max_{x\in[-\pi,\pi]} |(f \star g)(x)| \leq (2\pi)^{-1/p} \left(max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)| \right) \|g\|_1. \tag{1.19}$$

Dimostrazione La dimostrazione é omessa. Osserviamo soltanto che nella a) le f e g si pensano prolungate con periodicitá 2π a tutto l'asse reale. La relazione (19) é una facile conseguenza della definizione di convoluzione ed é lasciata al lettore per esercizio.

Usando il teorema 5 e la disuguaglianza di Hölder é facile osservare che se $f, g \in L^p([-\pi,\pi])$ allora $f \star g \in L^p([-\pi,\pi])$, $p \geq 1$. Infatti $L^p([-\pi,\pi]) \subset L^1([-\pi,\pi])$, per ogni $p \geq 1$. La proposizione seguente mette in luce alcune semplici proprietá del prodotto di convoluzione.

Proposizione 4 *Se* $f, g, h \in L^p([-\pi,\pi])$, *si hanno le seguenti proprietá:*

(i) $f \star g = g \star f$

(ii) $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$

(iii) $(f+g)\star h=(f\star h)+(g\star h)$.

La dimostrazione é una semplice conseguenza della definizione.

Il teorema seguente rappresenta una proprietá fondamentale della trasformata discreta di Fourier: questa trasforma il prodotto di convoluzione $f\star g$ nel prodotto (usuale) delle trasformate $\hat{f}_k, \hat{g}_k$.

Teorema 6 *Se* $f,g\in L^1([-\pi,\pi])$ *allora:*

$$(\widehat{f\star g})_k=\hat{f}_k\cdot\hat{g}_k,\quad k\in\boldsymbol{Z}, \tag{1.20}$$

dove f,g *sono estese con periodicitá* 2π *a tutto* $I\!\!R$.

Dimostrazione Usando il teorema 5 a), $f\star g\in L^1([-\pi,\pi])$ e risulta, per ogni $k\in\boldsymbol{Z}$:

$$\begin{aligned}(\widehat{f\star g})_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f\star g)(x)e^{-ikx}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)g(u)du\right\}e^{-ikx}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(u)e^{-iku}f(x-u)e^{-ik(x-u)}du\right\}dx.\end{aligned}$$

Applicando ora il teorema di Fubini-Tonelli, otteniamo:

$$(\widehat{f\star g})_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(u)e^{-iku}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)e^{-ik(x-u)}dx\right\}du.$$

Operando la sostituzione $x-u=t$ nell'integrale interno e tenendo conto della periodicitá di $f(x)e^{-ikx}$ si ottiene la (20).

1.6 Serie di Fourier in L^1: convergenza puntuale ed uniforme

Le funzioni f che prenderemo in considerazione qui saranno intese a valori reali. Forniremo anzitutto alcuni teoremi di convergenza puntuale ed uniforme per le serie di Fourier di funzioni $f\in L^1([-\pi,\pi])$, rispetto al sistema trigonometrico. A tale scopo é opportuno ottenere una rappresentazione integrale per le somme parziali di una serie di Fourier di una $f\in L^1([-\pi,\pi])$. Questa rappresentazione é conseguenza del seguente Lemma:

Lemma 2 *Per ogni reale $x \neq 2m\pi, \quad m \in \boldsymbol{Z}, \quad$ risulta:*

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{sin\frac{nx}{2}}{sin\frac{x}{2}} e^{i(n+1)x/2}, \quad n \in I\!N. \tag{1.21}$$

Dimostrazione Usando le formule di Eulero, otteniamo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} &= e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{inx/2}-e^{-inx/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} e^{i(n+1)x/2} \\ &= \frac{sin(nx/2)}{sin(x/2)} e^{i(n+1)x/2}.\end{aligned}$$

Prendendo nella (21) le parti reale ed immaginaria si ottiene:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} coskx &= \frac{sin\frac{nx}{2}\ cos\frac{(n+1)x}{2}}{sin\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{sin((2n+1)\frac{x}{2})}{sin\frac{x}{2}},\end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\sum_{k=1}^{n} sinkx = \frac{sin\frac{nx}{2}\ sin((n+1)\frac{x}{2})}{sin\frac{x}{2}}, \tag{1.23}$$

per ogni $x \neq 2m\pi, \quad n \in I\!N$.

ESERCIZIO Dimostrare che, per ogni $x \neq m\pi, m \in \boldsymbol{Z}$, si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} cos((2k-1)x) = \frac{sin(2nx)}{2sinx} \tag{1.24}$$

$$\sum_{k=1}^{n} sin((2k-1)x) = \frac{sin^2(nx)}{sinx}. \tag{1.25}$$

Sia $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Indichiamo con $S_n(f,x)$ la somma parziale n-esima della serie di Fourier di f (in forma reale):

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2}\hat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^{n}(\hat{f}_c(k)coskx + \hat{f}_s(k)sinkx), \quad n \in I\!N, \ x \in I\!R.$$

Teorema 7 *Per $n \geq 1$, si ha:*

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du,$$

dove:

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} coskx = \begin{cases} \dfrac{sin[(2n+1)\frac{x}{2}]}{sin\frac{x}{2}} & se\ x \neq 2m\pi \\ 2n+1 & se\ x = 2m\pi \end{cases}$$

con $m \in I\!N$.

Dimostrazione La dimostrazione é molto semplice ed é basata sulle definizioni di $\hat{f}_c(k), \hat{f}_s(k)$:

$$\begin{aligned} S_n(f,x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(cosku\ coskx + sinku\ sinkx)\right\} du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n} cosk(x-u)\right\} du. \end{aligned}$$

L'espressione finale per $D_n(u)$ é una conseguenza della (21).

L'integrale che rappresenta $S_n(f,x)$ si chiama *integrale di Dirichlet* mentre la funzione $D_n(x)$ prende il nome di *nucleo di Dirichlet.*

In precedenza abbiamo visto che per ogni $f \in L^1([-\pi,\pi])$, $\hat{f}_k$ risulta un infinitesimo per $k \to \pm\infty$ (Proposizione 2(v),).
Questa proprietá risulta un caso particolare del seguente:

Teorema 8 *(Riemann-Lebesgue) Sia $I = (a,b) \subset I\!R$ un intervallo fissato. Se $f \in L^1(I)$ si ha:*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx = 0. \tag{1.26}$$

Dimostrazione É sufficiente provare che, ad esempio,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)cos\lambda x dx = 0. \tag{1.27}$$

Supponiamo anzitutto che f sia assolutamente continua in (a,b). Allora integrando per parti otteniamo:

$$\int_a^b f(x)cos\lambda x dx = \left[f(x)\frac{sin\lambda x}{\lambda}\right]_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)sin\lambda x dx.$$

Siccome

$$\left|\int_a^b f'(x)sin\lambda x dx\right| \leq \int_a^b |f'(x)|dx < +\infty,$$

otteniamo subito la (27) nel caso assolutamente continuo. Nel caso generale, fissato un $\varepsilon > 0$, esiste una funzione g assolutamente continua tale che $\|f-g\|_1 < \varepsilon$ e quindi si ha:

$$\left|\int_a^b f(x)cos\lambda x dx\right| \leq \left|\int_a^b (f(x)-g(x))cos\lambda x dx\right| +$$
$$+\left|\int_a^b g(x)cos\lambda x dx\right| \leq \|f-g\|_1 + \left|\int_a^b g(x)cos\lambda x dx\right|$$

e quindi l'asserto segue dalla prima parte della dimostrazione.

Una conseguenza importante del teorema precedente é il seguente:

Teorema 9 *(localizzazione di Riemann) Sia $f \in L^1([-\pi,\pi])$. La serie di Fourier di f converge in $x_o \in [-\pi,\pi]$ ad un fissato punto $c \in I\!R$ se e solo se risulta:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta (f(x_o+u)+f(x_o-u)-2c)\frac{sin((2n+1)u/2)}{u}du = 0, \quad (1.28)$$

per qualche $\delta \in]0,\pi]$.

Dimostrazione Indicati con $S_n(f,x_o)$ e D_n rispettivamente la somma parziale n-esima della serie di Fourier di f in x_o e il nucleo di Dirichlet, e tenendo conto che $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = 1$, possiamo scrivere:

$$S_n(f,x_o) - c = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-u)-c]D_n(u)du.$$

Poiché $D_n(u)$ é una funzione pari, per ogni $n \in I\!N$, si ha anche:

$$\begin{aligned} S_n(f,x_o) - c &= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\right\}[f(x-u)-c]D_n(u)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(x_o,u)D_n(u)du, \end{aligned}$$

dove $g(x_o,u) = f(x_o+u) + f(x_o-u) - 2c$. Se $\delta \in]0,\pi[$ scriviamo:

$$\begin{aligned} S_n(f,x_o) - c &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} g(x_o,u)\frac{sin((2n+1)u/2)}{u}du \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} g(x_o,u)\left\{\frac{1}{2sin(u/2)} - \frac{1}{u}\right\}sin((2n+1)u/2)du \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} g(x_o,u)\frac{sin((2n+1)u/2)}{2sin(u/2)}du = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che la funzione $h(u) = \dfrac{1}{2sin(u/2)} - \dfrac{1}{u}$ é limitata in $]0,\delta[$ e quindi per il teorema di Riemann-Lebesgue si ha $\lim_{n\to+\infty}(I_2+I_3) = 0$. Pertanto $S_n(f,x_o) \to c$ se e solo se c'é un $\delta > 0$ tale che $I_1 \to 0, n \to +\infty$.

Corollario 3 *(Dini) Sia* $f \in L^1([-\pi,\pi])$. *Se esistono* $x_o \in I\!R$ *e* $\delta \in]0,\pi[$ *tali che*

$$\int_0^{\delta} |f(x_o+u) + f(x_o-u) - 2f(x_o)|u^{-1}du < +\infty, \tag{1.29}$$

risulta $\lim_{n\to+\infty} S_n(f,x_o) = f(x_o)$.

Dimostrazione Basta osservare che la (29) implica la (28) a causa del teorema 8.

Un'ulteriore condizione sufficiente per la convergenza puntuale delle serie di Fourier é data dal seguente teorema del quale non daremo la dimostrazione.

Teorema 10 *(Jordan) Sia* $f \in L^1([-\pi,\pi])$ *e supponiamo che* f *sia a variazione limitata in* $[x_o-\delta, x_o+\delta], x_o \in]-\pi,\pi[$, *per qualche* $\delta > 0$. *Allora la serie di Fourier di* f *converge in* x_o *a* $\frac{1}{2}\{f(x_o+0) + f(x_o-0)\}$.

In particolare se f é continua in x_o, $S_n(f, x_o) \to f(x_o)$.
Si osservi che le condizioni di Dini e Jordan non sono in generale implicate dalla sola continuitá di f. Esistono funzioni continue la cui serie di Fourier non converge in qualche punto. Se tuttavia f é assolutamente continua e $2\pi-$periodica, la serie di Fourier converge ad f puntualmente, in ogni punto di $I\!R$, per il teorema di Jordan.
Sussiste inoltre il seguente teorema

Teorema 11 *Sia f una funzione assolutamente continua e $2\pi-$periodica. Se $f' \in L^2([-\pi,\pi])$, la serie di Fourier di f é uniformemente convergente ad f in $I\!R$.*

Dimostrazione Scriviamo anzitutto i coefficienti di Fourier di f in termini di quelli di $f' \in L^2([-\pi,\pi])$. Integrando per parti, usando l'assoluta continuitá di f si ha:

$$\begin{aligned}\hat{f}_c(k) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx = -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)sinkxdx \\ &= -\frac{1}{k}\hat{f}'_s(k), \quad k=1,2,\ldots,\end{aligned}$$

ed analogamente si ha $\hat{f}_s(k) = \hat{f}'_c(k)/k, \quad k=1,2,\ldots$.
Allora possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{f}_c(0)}{2} &+ \sum_{k=1}^{\infty}(|\hat{f}_c(k)| + |\hat{f}_s(k)|) \\ &= \frac{\hat{f}_c(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|\hat{f}'_c(k)|}{k} + \frac{|\hat{f}'_s(k)|}{k}\right)\end{aligned} \tag{1.30}$$

Dato che $\frac{|\hat{f}'_s(k)|}{k} \le \frac{1}{2}\left[(\hat{f}'_s(k))^2 + \frac{1}{k^2}\right]$ ed analogamente per $\frac{|\hat{f}'_c(k)|}{k}$, la serie al primo membro della (30) é maggiorata da:

$$\frac{|\hat{f}_c(0)|}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(\hat{f}'_s(k))^2 + (\hat{f}'_c(k))^2\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}. \tag{1.31}$$

Poiché $f' \in L^2([-\pi,\pi])$ la serie (31) é convergente in virtú della disuguaglianza di Bessel e quindi é convergente la (30). Ma la (30) maggiora la serie di Fourier di f in $I\!R$ che quindi é totalmente convergente.

1.7 Medie di Fejer di funzioni continue

Sia $f : [-\pi, \pi] \to I\!R$ una funzione continua: Come abbiamo giá visto, la serie di Fourier di f non converge (in generale) puntualmente ad f. Tuttavia, utilizzando un diverso metodo di sommazione, rispetto al quale la classe delle serie convergenti sia piú "ampia", proveremo la convergenza uniforme di polinomi trigonometrici ad f, nel caso in cui $f(\pi) = f(-\pi)$.

Questo metodo di sommazione si chiama *metodo di Cesaro*.Data una successione $\{a_n\}_{n\in I\!N}$ di numeri complessi, indichiamo con $\{s_n\}_{n\in I\!N}$ la successione delle somme parziali n-esime. Posto:

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n},$$

se $lim_{n\to+\infty}\sigma_n = s \in \mathbb{C}$, diremo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é *(C,1)-sommabile* oppure *Cesaro -sommabile.*

É facile provare che se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente nel senso usuale, allora essa é anche (C,1)-sommabile, con la stessa somma. Tuttavia, ad esempio, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ é (C,1)-sommabile, pur non essendo convergente nel senso classico.

Sia ora f una funzione continua e $2\pi-$periodica. Definiamo le *medie di Fejer* di f ponendo:

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x), \quad x \in I\!R, \tag{1.32}$$

dove $\{S_k\}$ é la successione delle somme parziali della serie di Fourier di f. Usando il teorema 7 possiamo scrivere:

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(u)\right\} du \tag{1.33}$$

dove $\{D_k\}$ é il nucleo di Dirichlet ($D_o = 1$).

Il nostro scopo é quello di ottenere un teorema di rappresentazione integrale per $\sigma_n(f,x)$ simile, formalmente, a quello per $S_n(f,x)$. A tale scopo premettiamo il seguente lemma:

Lemma 3 *Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono numeri complessi, allora:*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_j = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k. \tag{1.34}$$

Dimostrazione Se $n = 1$ la (34) é ovvia. Se essa é vera per n, cambiando n con $n+1$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{k} a_j &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_j + \sum_{j=1}^{n+1} a_j = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k + \sum_{j=1}^{n+1} a_j \\
&= \sum_{k=1}^{n}(n+2-k)a_k + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(n+2-k)a_k.
\end{aligned}$$

Teorema 12 *Si ha:*

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)F_n(u)du, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{1.35}$$

dove $F_o(x) = 1$, *e per* $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) coskx \qquad (1.36) \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\left[\dfrac{sin((n+1)x/2)}{sin(x/2)}\right]^2 & se\ x \neq 2j\pi \\ n+1 & se\ x = 2j\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

dove $j \in \boldsymbol{Z}$.

Dimostrazione Partiamo dalla (33). Per il lemma 3 si ha:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) coskx,$$

e questo stabilisce la prima delle (36). Per l'altra rappresentazione, usando le (22),(25), per ogni $x \neq 2j\pi, j \in \boldsymbol{Z}$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) &= \frac{1}{n+1}\left\{1 + \sum_{k=1}^{n} D_k(x)\right\} = \frac{1}{n+1}\left\{1 + \sum_{k=1}^{n}\left[1 + 2\sum_{j=1}^{n} cosjx\right]\right\} \\
&= \frac{1}{n+1}\left\{1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{sin((2k+1)x/2)}{sin(x/2)}\right\} \\
&= \frac{1}{n+1}\left\{1 + \frac{1}{sin(x/2)}\left[\frac{sin^2((n+1)x/2)}{sin(x/2)} - sin(x/2)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\frac{sin((n+1)x/2)}{sin(x/2)}\right]^2.
\end{aligned}$$

Se $x = 2j\pi, j \in \boldsymbol{Z}$, allora

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = n+1.$$

Questo conclude la prova.

L'integrale nella (35) si chiama *integrale di Fejer* e la successione di funzioni $\{F_n(x)\}$, *nucleo di Fejer.*

Le proprietá di convergenza di σ_n dipendono dalle seguenti proprietá di $\{F_n\}$.

Lemma 4 *Per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots,$ si ha:*

(i) *F_n é non negativa, pari, continua.*

(ii) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)dx = 1.$

(iii) *per ogni $\delta \in]0, \pi[,$ si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} sup_{\delta\le|x|\le\pi} F_n(x) = 0.$$

Dimostrazione (i) é ovvia; per la (ii) si ha:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)dx = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x)dx = 1.$$

Proviamo la (iii). Sia $\delta \in]0, \pi[$ e $|x| \in [\delta, \pi]$. Allora:

$$0 \le F_n(x) = \frac{1}{n+1}\left[\frac{sin((n+1)x/2)}{sin(x/2)}\right]^2 \le \frac{1}{n+1}[sin^2(\delta/2)]^{-1},$$

da cui l'asserto.

Teorema 13 *(Fejer) Sia f una funzione continua e $2\pi-$periodica. Risulta:*

$$lim_{n\to+\infty} max_{x\in[-\pi,\pi]}|\sigma_n(f,x) - f(x)| = 0. \tag{1.37}$$

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$|f(x-u) - f(x)| < \varepsilon$$

per ogni u con $|u| < \delta(\varepsilon)$, e per ogni $x \in I\!R$. Inoltre esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$, per ogni $x \in I\!R$. Scegliendo $\delta(\varepsilon) < \pi$, usando la (ii) del Lemma 4,otteniamo:

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(f,x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-u) - f(x)|F_n(u)du \\
= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right\} &|f(x-u) - f(x)|F_n(u)du \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Usando la (iii) del Lemma 4, si ha:

$$\begin{aligned}
I_1 + I_3 \;&\leq\; \frac{M}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\frac{1}{n+1}[sin^2(\delta/2)]^{-1}du \\
&+\; \frac{M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{n+1}[sin^2(\delta/2)]^{-1}du.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Per la I_2, tenendo conto della definizione del $\delta(\varepsilon)$, si ha:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-u) - f(x)|F_n(u)du < \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(u)du = \varepsilon, \tag{1.39}$$

per ogni $x \in [-\pi, \pi]$. Dalle (38), (39) otteniamo infine:

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]}|\sigma_n(f,x) - f(x)| \leq \frac{2M}{\pi(n+1)}[sin^2(\delta/2)]^{-1}(\pi - \delta) + \varepsilon$$

e quindi l'asserto facendo $n \to +\infty$.

Un'importante conseguenza del teorema di Fejer é il seguente teorema di approssimazione:

Teorema 14 *(Weierstrass) Se f é una funzione continua e $2\pi-$periodica, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n \in I\!N$ ed un polinomio trigonometrico t_n di grado n tale che*

$$|f(x) - t_n(x)| < \varepsilon,$$

per ogni $x \in I\!R$.

Dimostrazione L'asserto é provato se mostriamo che $\sigma_n(f,x)$ é un polinomio trigonometrico, per ogni $n \in I\!N$. Ora usando la (33) si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(u)\right\} du \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)coskudu + \frac{\hat{f}_c(0)}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\{\hat{f}_c(k)coskx + \hat{f}_s(k)sinkx\} + \frac{\hat{f}_c(0)}{2}\end{aligned}$$

e quindi l'asserto.

OSSERVAZIONI

(a) I teoremi di Fejer e Weierstrass sussistono anche per funzioni continue f con periodo $T \neq 2\pi$.

(b) Usando il lemma 1 é possibile mostrare che se $f \in L^1([-\pi,\pi])$, le medie di Fejer di f convergono ad f in $L^1([-\pi,\pi])$ (qui, come al solito, si estende la f fuori dell'intervallo con periodicitá 2π). Risulta cioé:

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f,\cdot) - f(\cdot)\|_1 = 0, \tag{1.40}$$

per ogni $f \in L^1([-\pi,\pi])$. La (40) non vale in generale per le serie di Fourier, cioé $S_n(f,\cdot)$ non converge in generale ad f in $L^1([-\pi,\pi])$.

Corollario 4 *Sia* $f \in L^1([-\pi,\pi])$. *Se* $\hat{f}_c(k) = 0$, *per ogni* $k = 0,1,2,\ldots,$ *e* $\hat{f}_s(k) = 0$, $k = 1,2,\ldots,$ *allora* $f = 0$ *quasi ovunque.*

Dimostrazione Se $\hat{f}_c(k) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots,$ e $\hat{f}_s(k) = 0$, $k = 1,2,\ldots,$ allora $\sigma_n(f,x) = 0$ per ogni $x \in I\!R$ (si veda la dimostrazione del teorema 14); l'asserto segue allora dalla (40).

Il Corollario 4 mette in luce che una $f \in L^1([-\pi,\pi])$ si sviluppa in modo unico in serie di Fourier. Cioé se $f, g \in L^1([-\pi,\pi])$ e $\hat{f}_c(k) = \hat{g}_c(k)$, $k = 0,1,2,\ldots,$ e $\hat{f}_s(k) = \hat{g}_s(k)$, $k = 1,2,\ldots,$ allora $f = g$ quasi ovunque in $[-\pi,\pi]$.

1.8 Completezza del sistema trigonometrico

Sia $N = \{\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ un sistema ortonormale in $L^2(I), I$ un intervallo di $I\!R$, e sia $f \in L^2(I)$. La disuguaglianza di Bessel (teorema 2) implica che la serie di Fourier di f relativa ad N converge in $L^2(I)$. Infatti indicate con $\{s_n(x)\}$ le somme parziali della serie, per $n, m \in I\!N$, $m > n$, si ha:

$$\|s_m - s_n\|_2^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \hat{f}_j \varphi_j \right\|_2^2 \leq \sum_{j=n+1}^{m} |\hat{f}_j|^2,$$

e quindi l'asserto segue dalla convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}_k|^2$ e dalla completezza dello spazio $L^2(I)$.
Indichiamo con $F(\cdot)$ la somma in L^2 della serie di Fourier di f, cioé F verifica $\lim_{n\to+\infty} \|F(\cdot) - s_n\|_2 = 0$.

Lemma 5 *Risulta:*

$$< f - F, \varphi_k >= 0, \; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dimostrazione Osserviamo intanto che per ogni funzione $g \in L^2(I)$ si ha:

$$| < F, g > - < s_n, g > | = | < F - s_n, g > | \leq \|F - s_n\|_2 \|g\|_2$$

e quindi

$$< \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k, g >= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k < \varphi_k, g >, \tag{1.41}$$

per ogni funzione $g \in L^2(I)$. Dalla (41) abbiamo allora, per ogni $j = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} < f - F, \varphi_j > &= < f, \varphi_j > - < F, \varphi_j > \\ &= < f, \varphi_j > - \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k < \varphi_k, \varphi_j > \\ &= < f, \varphi_j > - \hat{f}_j = 0, \end{aligned}$$

cioé l'asserto.

Teorema 15 *Il sistema trigonometrico é completo in* $L^2([-\pi,\pi])$.

Dimostrazione Continuiamo, per semplicitá di scrittura, a denotare con $\varphi_k(x)$, le funzioni del sistema trigonometrico (6). Se F é la somma (in $L^2(I)$) della serie di Fourier di f, il lemma 5 implica che $< f - F, \varphi_j >= 0$ per ogni $j = 0, 1, 2, \dots$; il corollario 4 mostra allora che $f = F$ cioé, per ogni $f \in L^2([-\pi,\pi])$ la serie di Fourier di f converge in L^2 ad f. Questo prova il teorema.

In particolare, usando il teorema 2, abbiamo l'uguaglianza di Parseval:

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{f}_c(0))^2}{2} &+ \sum_{k=1}^{\infty}\{[\hat{f}_c(k)]^2 + [\hat{f}_s(k)]^2\} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx, \end{aligned} \tag{1.42}$$

per ogni $f \in L^2([-\pi,\pi])$.

1.9 Alcune applicazioni

A) **Temperatura in una lamina rettangolare**
Consideriamo una lamina piana rettangolare, con facce isolate termicamente e con una prescritta temperatura ai lati. Il problema di cui ci occuperemo é quello di determinare la temperatura (che si suppone stazionaria) della lamina. Schematizziamo il problema come nella figura 1. Supponiamo che i lati del rettangolo OC e AB siano cosí lunghi rispetto a CB e OA, da potersi considerare di lunghezza infinita. Supponiamo per fissare le idee che la temperatura sia nulla sui lati OC, AB, CB, mentre sia T sul lato OA. Poniamo inoltre OA $= \delta$. Indicata con $U(x,y)$ la temperatura nel punto (x,y), si tratta di determinare le soluzioni periodiche dell'*equazione differenziale di Laplace*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \tag{1.43}$$

con le condizioni al contorno:

$$U(0,y) = U(\delta,y) = \lim_{y\to+\infty} U(x,y) = 0, \; U(x,0) = T. \tag{1.44}$$

Figure 1.1:

Procediamo con la determinazione delle soluzioni della (43). Useremo un metodo noto come *separazione delle variabili*. Cerchiamo cioé soluzioni del tipo $U(x,y) = X(x)Y(y)$. Sostituendo nella (43) otteniamo:

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = 0$$

da cui

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}. \tag{1.45}$$

Siccome il primo membro della (45) é una funzione della sola x mentre il secondo membro é funzione della sola y, dovrá necessariamente risultare:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}, \tag{1.46}$$

con $k \in I\!R$ costante. Risolvendo le due equazioni (ordinarie) in (46) otteniamo ($\alpha > 0$):

$$X(x) = c_1 sin\alpha x + c_2 cos\alpha x; \quad Y(y) = c_3 e^{\alpha y} + c_4 e^{-\alpha y}.$$

Dunque le funzioni $2\pi-$ periodiche rispetto ad x,

$$U(x,y) = (c_1 sin\alpha x + c_2 cos\alpha x)(c_3 e^{\alpha y} + c_4 e^{-\alpha y}), \tag{1.47}$$

sono soluzioni della (43). Cerchiamo ora le costanti c_1, c_2, c_3, c_4 in modo che siano verificate le (44). Se, per esempio, $c_3 = 0$, allora si ha $\lim_{y\to+\infty} U(x, y) = 0$. Siccome la soluzione verificante le (44) non puó essere quella identicamente nulla, deve essere $c_4 \neq 0$. Pertanto dalla $U(0, y) = 0$ segue $c_2 = 0$. Restringiamo perció le nostre considerazioni alle funzioni del tipo:

$$U(x, y) = c_4 c_1 sin(\alpha x)e^{-\alpha y}, \quad c_1, c_4 \neq 0.$$

Dalla $U(\delta, y) = 0$ segue allora $\alpha\delta = n\pi, n \in I\!N$, cioé $\alpha = n\pi/\delta$. Posto $b_n = c_4 c_1$ (in corrispondenza ad un fissato n), otteniamo che la funzione:

$$U_n(x, y) = b_n exp(-\frac{n\pi}{\delta}y)sin(n\pi x/\delta), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

verifica l'equazione (43) e le condizioni (44) ad eccezione della $U(x, 0) = T$. Se la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n exp(-\frac{n\pi}{\delta}y)sin(n\pi x/\delta), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.48}$$

é convergente, essa verifica ancora la (43) e le prime tre delle (44). Cerchiamo allora i coefficienti b_n in modo che la serie (48) sia tale che $U(x, 0) = T$. Si ha:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(n\pi x/\delta), \quad 0 < x < \delta.$$

Posto:

$$f(x) = \begin{cases} T & \text{se } 0 < x < \delta \\ -T & \text{se } -\delta < x < 0 \end{cases}$$

la f é dispari ed il suo sviluppo in $[-\delta, \delta]$ in serie di Fourier ha come coefficienti proprio $\{b_n\}$. Quindi:

$$b_n = \hat{f}_s(n) = \frac{2T}{n\pi}[1 - (-1)^n],$$

da cui sostituendo nella (48) otteniamo:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_s(n) exp(-\frac{n\pi}{\delta}y)sin(n\pi x/\delta) \qquad (1.49) \\ &= \frac{4T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} exp(-\frac{(2n-1)\pi}{\delta}y)sin((2n-1)\pi x/\delta), \end{aligned}$$

Figure 1.2:

che rappresenta la soluzione sviluppata in serie di Fourier rispetto ad x per ogni fissato y.

B) **Temperatura in una lamina circolare**

Consideriamo una lamina circolare di diametro AB e centro O le cui facce siano (termicamente) isolate. Il problema che ci poniamo qui é quello di determinare la temperatura della lamina in un punto (x, y) interno, se il bordo possiede una data temperatura iniziale. L'equazione differenziale che regola il problema é l'equazione di Laplace (43). Sia r il raggio della lamina e supponiamo che la temperatura sul bordo sia 0 nel punto A fino ad assumere, con andamento crescente, il valore T nel punto B, sia nella direzione oraria, che antioraria (vedi fig.2). Data la forma della lamina é qui conveniente usare le coordinate polari nel piano:

$$\begin{cases} x = \rho cos\vartheta, \\ y = \rho sin\vartheta, \end{cases}$$

dove $0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$

Ricavando ρ e ϑ in funzione di x, y otteniamo :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = arctg(y/x)$$

e adoperando il teorema di derivazione delle funzioni composte, otteniamo l'equazione di Laplace (43) in coordinate polari:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} = 0. \tag{1.50}$$

Supposto che la crescita della temperatura U sul bordo sia lineare, avremo le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} U(r,\vartheta) &= \frac{T}{\pi}\vartheta, \quad 0 < \vartheta < \pi \\ &= -\frac{T}{\pi}\vartheta, \quad -\pi < \vartheta < 0. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Per diretta sostituzione nella (50) é facile vedere che le funzioni:

$$U(\rho,\vartheta) = (c_1\rho^k + c_2\rho^{-k})(c_3 sink\vartheta + c_4 cosk\vartheta), \tag{1.52}$$

sono soluzioni particolari dela (50). Esse sono funzioni $2\pi-$ periodiche rispetto a ϑ. Siccome $\rho^{-k} \to +\infty$ se $\rho \to 0$, assumeremo $c_2 = 0$. Posto $A_k = c_1c_4$, $B_k = c_1c_3$, per ogni scelta di $k = 0, 1, 2, \dots$, otteniamo un insieme di soluzioni del tipo:

$$A_k\rho^k cosk\vartheta + B_k\rho^k sink\vartheta, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Posto dunque:

$$U(\rho,\vartheta) = A_o + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\rho^k cosk\vartheta + B_k\rho^k sink\vartheta), \tag{1.53}$$

la funzione $U(\rho,\vartheta)$ (che é ben definita se la serie é convergente) rappresenta, formalmente, una soluzione della (50). Imponendo le condizioni al contorno (51), ricaviamo:

$$\begin{aligned} U(r,\vartheta) &= A_o + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k r^k cosk\vartheta + B_k r^k sink\vartheta] \\ &= f(\vartheta), \end{aligned} \tag{1.54}$$

dove:

$$f(\vartheta) = \begin{cases} \frac{T}{\pi}\vartheta & \text{se } 0 < \vartheta < \pi \\ -\frac{T}{\pi}\vartheta & \text{se } -\pi < \vartheta < 0 \end{cases}$$

Quindi le condizioni al contorno saranno verificate se la serie nella (54) é la serie di Fourier di f in $[-\pi, \pi[$. Usando il corollario 4, deve quindi risultare:

$$A_o = \frac{1}{2}\hat{f}_c(0),\ A_k r^k = \hat{f}_c(k),\ B_k r^k = \hat{f}_s(k),$$

da cui

$$A_o = T/2,\ B_k = 0,\ A_{2k} = 0,\ A_{2k-1} = -\frac{4T}{r^{2k-1}(2k-1)^2\pi^2}$$

e quindi, sostituendo nella (53):

$$U(\rho, \vartheta) = \frac{T}{2} - \frac{4T}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{2k-1}}{r^{2k-1}(2k-1)^2} cosk\vartheta, \tag{1.55}$$

che é la soluzione del problema in termini del suo sviluppo in serie di Fourier. Si osservi che la serie nella (50) é totalmente convergente in ogni compatto C contenuto nell'interno della lamina.

C) **La corda vibrante in un piano**

Le *piccole oscillazioni* di una corda ad estremi fissi, O $= (0, 0)$ ed A $= (r, 0)$, sono descritte dall'equazione delle onde (in una dimensione):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.56}$$

dove u rappresenta lo spostamento dalla posizione di equilibrio al tempo t ed alla posizione x. La costante v^2 é uguale al prodotto gT/D dove g é l'accelerazione di gravitá, T é la tensione e D é il peso per unitá di lunghezza. La *velocitá trasversale* é individuata da $\frac{\partial}{\partial t}(x, t)$. Poiché gli estremi sono fissi abbiamo le condizioni:

$$u(0, t) = 0,\quad u(r, t) = 0, \tag{1.57}$$

per ogni t. Assumiamo inoltre che la posizione della curva all'istante iniziale $t = 0$ e la sua velocitá siano date dalle:

$$u(x, 0) = f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \tag{1.58}$$

Figure 1.3:

Il problema é allora quello di calcolare soluzioni periodiche della (56) che verifichino le condizioni (57), (58), con f, g non identicamente nulle.
Usando il metodo della separazione delle variabili, (cercando cioé soluzioni della forma $u(x,t) = X(x)Y(t)$), derivando, otteniamo dalla (56):

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{Y''(t)}{Y(t)}$$

da cui ragionando come nel problema A) otteniamo particolari soluzioni della forma $X(x)Y(t)$, del tipo:

$$u(x,t) = (c_1 sinkx + c_2 coskx)(c_3 sinkvt + c_4 coskvt). \tag{1.59}$$

La prima condizione nella (57) é verificata se $c_2 = 0$, mentre la seconda é vera se $sinkr = 0$ (poiché c_1 dovrá essere diverso da 0), da cui $k = n\pi/r$, $n = 1, 2, \ldots$ In corrispondenza ad un fissato valore di n poniamo $A_n = c_1 c_4$, $B_n = c_1 c_3$. Le (59) si scrivono allora:

$$(A_n cos(n\pi vt/r) + B_n sin(n\pi vt/r)) sin(n\pi x/r)$$

Poniamo allora:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n cos(n\pi vt/r) + B_n sin(n\pi vt/r)] sin(n\pi x/r). \tag{1.60}$$

Imponendo ora le condizioni (58), otteniamo, derivando formalmente per serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin(n\pi x/r)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{r} B_n sin(n\pi x/r)$$

Se sviluppiamo f, g in serie di seni, prolungandole in modo dispari a tutto $I\!R$ con periodo $2r$, adoperando il teorema di unicitá dello sviluppo (corollario 4), dovrá essere:

$$A_n = \frac{1}{r}\int_{-r}^{r} f(x)sin(n\pi x/r)dx$$
$$B_n = \frac{1}{n\pi v}\int_{-r}^{r} g(x)sin(n\pi x/r)dx$$

Sostituendo questi valori nella (60) otteniamo una soluzione del problema, verificante le (57), (58).

ESERCIZIO Calcolare A_n, B_n nella (60) se :

$$f(x) = asin(2\pi x/r), \quad g(x) = bsin(4\pi x/r), \quad a, b > 0.$$

Chapter 2

La trasformata di Fourier

2.1 L'integrale di Fourier

In questo paragrafo ci occuperemo della rappresentazione di funzioni sommabili definite su $I\!R$. Se una tale f non é periodica, non possiamo esprimerla come la somma di una serie trigonometrica, perché tale somma é chiaramente periodica. Tuttavia sostituendo la serie con un opportuno integrale possiamo ottenere una rappresentazione *non discreta* di f.

Teorema 16 *(Fourier) Se $f \in L^1(I\!R)$ e se $x_o \in I\!R$ é tale che sia verificata la condizione di Dini ((29), corollario 3, Cap.1) per qualche $\delta > 0$, si ha:*

$$f(x_o) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ cos(\lambda(t - x_o))dt \tag{2.1}$$

Dimostrazione Sia $r > 0$ e poniamo:

$$I(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{r} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) cos(\lambda(t - x_o))dt.$$

Dato che $f \in L^1(I\!R)$, $I(r)$ esiste come integrale di Lebesgue. Pertanto applicando il teorema di Fubini e ponendo $v = t - x_o$ otteniamo:

$$I(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_o + v) \frac{sin(rv)}{v} dv.$$

Dato che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin(rv)}{v} dv = \pi,$$

per ogni $r > 0$, ragionando come nel teorema 9 (Cap.1), si ha:

$$I(r) - f(x_o) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(x_o+v) - 2f(x_o) + f(x_o-v)}{v} sin(rv)dv.$$

Sia $\delta > 0$ un numero fissato. Scriviamo:

$$\begin{aligned} I(r) - f(x_o) &= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{+\infty}\right\} \frac{f(x_o+v) - 2f(x_o) + f(x_o-v)}{v} sin(rv)dv \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Dalla condizione di Dini e dal lemma di Riemann-Lebesgue, $J_1 \to 0$, per $r \to +\infty$. Inoltre:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x_o+v) + f(x_o-v)}{v} sin(rv)dv - \frac{2}{\pi} f(x_o)\int_{\delta}^{+\infty} \frac{sin(rv)}{v} dv \\ &= J_2^1 + J_2^2. \end{aligned}$$

Ancora per il lemma di Riemann-Lebesgue $J_2^1 \to 0$ per $r \to +\infty$. Dato che $sin(rv)/v$ é integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty[$, possiamo scegliere $\delta > 0$ in modo che $J_2^2 < \varepsilon$. Da questo segue $\lim_{r\to+\infty} I(r) = f(x_o)$, cioé l'asserto.

OSSERVAZIONE Si osservi che l'integrale esterno nella (1) é un integrale generalizzato, cioé:

$$\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ cos(\lambda(t-x_o))dt = lim_{r\to+\infty}\int_0^{r} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)cos(\lambda(t-x_o))dt.$$

In generale la funzione

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)cos(\lambda(t-x_o))dt$$

non é assolutamente integrabile.

Il teorema seguente fornisce delle condizioni alternative per la rappresentazione integrale di una funzione sommabile.

Teorema 17 *(Jordan) Se* $f \in L^1(I\!\!R)$ *e se* x_o *é tale che* f *é a variazione limitata in* $[x_o - \delta, x_o + \delta]$, *per qualche* $\delta > 0$, *si ha:*

$$\frac{1}{2}\{f(x_o+0)+f(x_o-0)\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)cos(\lambda(t-x_o))dt. \quad (2.2)$$

Omettiamo la dimostrazione. Osserviamo soltanto che se, oltre alle ipotesi, f é continua in x_o, allora il primo membro di (2) diventa $f(x_o)$.

In analogia con quanto accade nella teoria delle serie di Fourier, é facile mostrare che se $f \in L^1(I\!\!R)$ verifica l'ipotesi del teorema 16 in x_o ed é pari, si ha:

$$f(x_o) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} cos(\lambda x_o)\left\{\int_0^{+\infty} f(t)cos(\lambda t)dt\right\} d\lambda$$

mentre se é dispari,

$$f(x_o) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} sin(\lambda x_o)\left\{\int_0^{+\infty} f(t)sin(\lambda t)dt\right\} d\lambda$$

Lasciamo al lettore la prova delle relazioni precedenti.

ESEMPIO Calcolare, al variare di $x \in I\!\!R$, l'integrale:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{sin\lambda \; cos(\lambda x)}{\lambda} d\lambda.$$

Soluzione Basta porre $f(t) = 1, \quad |t| < 1; \quad f(t) = 0, \quad |t| \geq 1.$ In tal caso f é pari e verifica le ipotesi del teorema 17, per ogni $x \in I\!\!R$. Quindi:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{sin\lambda \; cos(\lambda x)}{\lambda} d\lambda &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} cos(\lambda x)\left\{\int_0^{+\infty} f(t)cos(\lambda t)dt\right\} d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\{f(x+0) - f(x-0)\} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \\ 1/2 & \text{se } |x| = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il teorema seguente fornisce una versione complessa del teorema 16.

Teorema 18 *Se f e x_o verificano le ipotesi del teorema 16, si ha:*

$$f(x_o) = \frac{1}{2\pi}(P.V.) \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x_o)} dt \right\} d\lambda, \tag{2.3}$$

dove $(P.V.) \int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N}$ *é il valore principale.*

Omettiamo la dimostrazione. Analogamente si ottiene la forma complessa del teorema 17.

2.2 La trasformata di Fourier. Prime proprietá

La definizione della trasformata di Fourier é contenuta nella formula (3), insieme con la trasformazione inversa. Posto:

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad f \in L^1(I\!R), \tag{2.4}$$

in ogni punto x_o nel quale é verificata l'ipotesi di Dini, si ha dalla (3):

$$f(x_o) = \frac{1}{2\pi}(P.V.) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x_o} d\lambda. \tag{2.5}$$

La (4) associa ad una $f \in L^1(I\!R)$ una nuova funzione g che si chiama la *trasformata di Fourier* di f, mentre la (5) esprime la f stessa in termini della sua trasformata g e puó essere considerata quindi l'operazione inversa.

Per ottenere una maggiore simmetria formale tra (4) e (5), noi definiamo la trasformata di Fourier come l'operatore $\hat{}$ definito in $L^1(I\!R)$ dalla:

$$\hat{}: f \mapsto \hat{f},$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in I\!R \tag{2.6}$$

L'antitrasformata di Fourier é invece la trasformazione inversa:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(P.V.) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \tag{2.7}$$

in ogni punto x ove sussista il teorema di Fourier.

Si osservi che la somiglianza tra le formule (6) e (7) é solo formale. Mentre la (6) é ben definita in $L^1(I\!R)$ la (7) non é sempre definita e sotto le ipotesi del teorema 16, esiste come "valore principale".

Cominciamo con lo stabilire alcune semplici conseguenze della definizione di $\hat{}$.

Proposizione 5 *Sia $f \in L^1(I\!R)$. Sussistono le seguenti proprietá:*

(i) *Posto $(\tau_h f)(t) = f(t+h)$, $h \in I\!R$, si ha:*

$$\widehat{\tau_h f}(\lambda) = e^{ih\lambda}\hat{f}(\lambda), \quad \lambda \in I\!R.$$

(ii) *Posto $F(t) = e^{-iht}f(t)$, $h \in I\!R$ si ha:*

$$\hat{F}(\lambda) = \hat{f}(\lambda + h), \quad \lambda \in I\!R.$$

(iii) *Posto $G(t) = \delta f(\delta t)$, $\delta > 0$, si ha:*

$$\hat{G}(\lambda) = \hat{f}(\lambda/\delta), \quad \lambda \in I\!R.$$

(iv) *Posto $H(t) = f(-t)$, $(H(t) = \overline{f(-t)}$, se f é a valori complessi) si ha:*

$$\hat{H}(\lambda) = \hat{f}(\lambda), \quad (\hat{H}(\lambda) = \overline{\hat{f}(\lambda)}), \quad \lambda \in I\!R.$$

(v) *$\hat{f} \in L^\infty(I\!R)$ e $\|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$.*

Dimostrazione Le (i)-(iv) sono immediate conseguenze della definizione e sono pertanto lasciate al lettore. La (v) segue subito dalla:

$$|\hat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||e^{-i\lambda t}|dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1, \quad \lambda \in I\!R,$$

e quindi l'asserto.

Il teorema seguente mostra che $\hat{f}$ é una funzione continua in $I\!R$, che tende a 0 per $|\lambda| \to +\infty$.

Teorema 19 *La trasformata di Fourier "$\hat{}$" definisce una trasformazione lineare limitata di $L^1(\mathbb{R})$ in C_o, dove*

$$C_o = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : g\acute{e}\ continua\ e\ lim_{|\lambda|\to\infty} g(\lambda) = 0\}.$$

Dimostrazione Per ogni $h,\ \lambda \in \mathbb{R}$ si ha:

$$|\hat{f}(\lambda + h) - \hat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||e^{-iht} - 1|dt.$$

Sia ora $\{h_n\}$ una successione qualsiasi tale che $h_n \to 0$. Posto

$$g_n(t) = |f(t)||e^{-ih_n t} - 1|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R},$$

si ha $g_n(t) \to 0$ quasi ovunque per $n \to +\infty$, ed inoltre,$|g_n(t)| \leq 2|f(t)|$. Essendo $f \in L^1(\mathbb{R})$, utilizzando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} |\hat{f}(\lambda + h_n) - \hat{f}(\lambda)| = 0,$$

da cui segue la continuitá di $\hat{f}$, per l'arbitrarietá della successione $\{h_n\}$.
Proviamo ora che $|\hat{f}(\lambda)| \to 0$ per $|\lambda| \to +\infty$. Questo é una estensione del lemma di Riemann-Lebesgue. Si ha:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt.
\end{aligned}$$

Posto, nell'ultimo integrale, $t = u + \pi/\lambda,\ \lambda \neq 0$, si ha:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(t) - f(t + \pi/\lambda)\}e^{-i\lambda t}dt$$

e quindi

$$|\hat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(t + \pi/\lambda)|dt, \quad \lambda \neq 0.$$

Se $|\lambda| \to +\infty$, allora π/λ tende a 0 e quindi l'asserto segue dal lemma 1 del Capitolo I (che sussiste anche per intervalli non limitati).
Infine é chiaro che " $\hat{}$ " é lineare cioé :

$$\widehat{\alpha f + \beta g}(\lambda) = \alpha\hat{f}(\lambda) + \beta\hat{g}(\lambda),$$

con $\lambda \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R})$.
Concludendo, la (v) ci dice che " $\hat{}$ " é una trasformazione lineare limitata di $L^1(\mathbb{R})$ in C_o.

ESEMPI (a) Sia $f(t) = e^{-\gamma|t|}, \quad \gamma > 0$. Si ha:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|t|} e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} cos(\lambda t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\gamma}{\lambda^2 + \gamma^2}.\end{aligned}$$

(b) Sia

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

con $a > 0$. Si ha:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-i\lambda t} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{sin(\lambda a)}{\lambda}.$$

Osserviamo che in tal caso $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

(c) Sia $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}, \quad a > 0$.
In tal caso utilizzando la teoria delle funzioni di variabile complessa, si ha:

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(d) Sia $f(t) = e^{-at^2}, \quad a > 0$.
In tal caso, si ottiene:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at^2} cos(\lambda t) dt.$$

Derivando sotto il segno di integrale, si ottiene l'equazione differenziale:

$$\hat{f}'(\lambda) = -\frac{\lambda}{2a} \hat{f}(\lambda),$$

ed inoltre é facile verificare che $\hat{f}(0) = 1/\sqrt{2a}$; pertanto $\hat{f}$ é l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + (t/2a)y = 0 \\ y(0) = 1/\sqrt{2a}, \end{cases}$$

Da questo segue che

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\lambda^2/4a}.$$

2.3 Proprietá fondamentali della trasformata di Fourier in $I\!R$

.

In questo paragrafo trattiamo delle principali proprietá della trasformata di Fourier in $I\!R$.

Teorema 20 *Sia $\{f_n\}_n$ una successione di funzioni in $L^1(I\!R)$ convergente in $L^1(I\!R)$ ad una funzione $f \in L^1(I\!R)$. Allora:*

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Dimostrazione É conseguenza immediata della linearitá della trasformata di Fourier e della (v) Proposizione 5.

Teorema 21 *Sia $f \in L^1(I\!R) \cap C^1(I\!R)$ e $f' \in L^1(I\!R)$. Allora:*

$$\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda \hat{f}(\lambda), \quad \lambda \in I\!R. \tag{2.8}$$

(Cioé la trasformata di Fourier trasforma la derivazione nel prodotto per $i\lambda$).

Dimostrazione Dall'ipotesi, possiamo scrivere:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(v)dv, \quad t \in I\!R.$$

Dato che $f' \in L^1(I\!R)$, si ha $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$.
Integrando per parti,

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\widehat{f'}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}dt \\ &= i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt \\ &= \sqrt{2\pi}(i\lambda)\hat{f}(\lambda). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONI (a) In generale se $f \in L^1(I\!R) \cap C^k(I\!R)$, $k \in I\!N$, $k \geq 2$, e se $f^{(j)} \in L^1(I\!R)$, per ogni $j = 1, \ldots, k$, si ha :

$$\widehat{f^{(k)}}(\lambda) = (i\lambda)^k \hat{f}(\lambda). \tag{2.9}$$

(b) Il teorema 21 sussiste anche se f é assolutamente continua, con $f' \in L^1(I\!R)$.

Corollario 5 *Se* $f \in L^1(I\!R) \cap C^k(I\!R)$, $k \in I\!N$, *e se* $f^{(j)} \in L^1(I\!R)$, $j = 1, \ldots, k$, *si ha:*

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} |\lambda|^k |\hat{f}(\lambda)| = 0. \tag{2.10}$$

Dimostrazione Dalla (9), e dal fatto che $\widehat{f^{(k)}}(\lambda) \to 0$, $|\lambda| \to +\infty$, segue l'asserto.

In particolare se $f \in C^2(I\!R) \cap L^1(I\!R)$ e $f', f'' \in L^1(I\!R)$, si ottiene $\hat{f} \in L^1(I\!R)$.

Il corollario 5 mette in luce che quante piú derivate ha la f, tanto piú rapidamente $\hat{f}$ tende a 0, per $|\lambda| \to +\infty$. Vale anche un "viceversa":

Teorema 22 *Sia* $f \in L^1(I\!R)$; *se la funzione* g *definita dalla* $g(t) = tf(t)$ *é in* $L^1(I\!R)$, $\hat{f}$ *é derivabile e risulta:*

$$\hat{f}'(\lambda) = \widehat{-ig}(\lambda), \quad \lambda \in I\!R. \tag{2.11}$$

Dimostrazione Derivando sotto il segno di integrale, si ha:

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = -i \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

da cui segue l'asserto.

In generale, se $f \in L^1(I\!R)$, posto $g_k(t) = t^k f(t)$, $k \in I\!N$, $k \geq 2$, se $g_j \in L^1(I\!R)$, $j = 1, \ldots, k$, si ha che $\hat{f}$ é derivabile k-volte ed inoltre:

$$\hat{f}^{(k)}(\lambda) = \widehat{-i^k g_k}(\lambda), \quad \lambda \in I\!R.$$

Il teorema seguente, del quale non riportiamo la dimostrazione, mostra che la trasformata di Fourier é iniettiva.

Teorema 23 *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Se* $\hat{f}(\lambda) = 0$, *per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$, *si ha* $f(t) = 0$ *quasi ovunque in* $\mathbb{R}$.

In particolare, se $\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha $f = g$ in $L^1(\mathbb{R})$.

Teorema 24 *(Formula di Parseval). Se* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, *si ha:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) g(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\lambda) f(\lambda) d\lambda \tag{2.12}$$

Dimostrazione É una conseguenza del teorema di Fubini: si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) g(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right\} d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \hat{g}(t) dt. \end{aligned}$$

2.4 Convoluzioni e trasformata di Fourier in $\mathbb{R}$.

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Definiamo *convoluzione di* f *e* g in $\mathbb{R}$ e lo denotiamo con $f \star g$, la funzione:

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt. \tag{2.13}$$

Come nel caso discreto, sussistono tutte le proprietá espresse dalla proposizione 4 del Cap.I. In particolare, $f \star g$ é ben definito e risulta:

$$\|f \star g\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Inoltre, sussiste il seguente importante:

Teorema 25 *(Teorema di Convoluzione) Per* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, *si ha:*

$$\widehat{f \star g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Dimostrazione La dimostrazione é analoga a quella del teorema 6, Cap.I.

2.5 Inversione

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se f verifica la condizione di Dini per ogni $x \in \mathbb{R}$, il teorema integrale di Fourier (teorema 18), fornisce una formula di inversione del tipo:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove l'integrale é inteso nel senso del valore principale. Tuttavia é spesso utilizzato il seguente teorema, del quale non daremo la dimostrazione.

Teorema 26 *Se $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, si ha:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda, \quad q.o. x \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

dove l'integrale é inteso nel senso di Lebesgue. Inoltre se f é continua la (15) vale ovunque in $\mathbb{R}$.

Corollario 6 *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Se $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, si ha:*

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda, \tag{2.16}$$

quasi ovunque in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione Per il teorema 25 si ha $\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$, ed esiste una costante $M > 0$ tale che $\|\hat{f}\|_\infty \leq M$. Pertanto risulta:

$$\|\widehat{f \star g}\|_1 = \|\hat{f}\hat{g}\|_1 \leq M\|\hat{g}\|_1.$$

L'asserto segue dal teorema 26.

2.6 Alcune applicazioni alla teoria dei segnali

In questo paragrafo interpreteremo una funzione f, continua in $\mathbb{R}$, come un *segnale*. In tal caso $\hat{f}$ puó essere riguardata come la *funzione frequenza* del segnale f. Essa rappresenta il cosiddetto *spettro* di f.

Un segnale f si dice *a banda limitata* in un intervallo $[-a, a]$, $a > 0$, se $\hat{f}(\lambda) = 0$ per $|\lambda| > a$, cioé l'insieme delle frequenze di f é limitato.
Sia $w \in \mathbb{R}^+$ un numero fissato e sia f un segnale a banda limitata in

$[-\pi w, \pi w]$. Il classico *Sampling Theorem* stabilisce che f puó essere ricostruito completamente usando i valori "campione" $f(k/w)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, calcolati nei "nodi" k/w ugualmente spaziati sull'intero asse reale, attraverso la formula:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/w) sinc[\pi(wt - k)], \quad t \in I\!R, \tag{2.17}$$

dove $sinc\ t = (sint)/t$.

Questo teorema, attribuito a vari autori, (i nomi piú accreditati sono quelli di Whittaker (1915), Kotel'nikov (1933), Shannon (1940)), é risultato di fondamentale importanza nella teoria dei segnali, anche se da certi punti di vista non sembra di grande utilitá. Ad esempio, la (17) mette in evidenza che per ricostruire il segnale f all'istante t_o, occorre conoscere valori campione $f(k/w)$ non soltanto nel "passato", ma anche nel "futuro", cosicché nella "predizione" dei segnali, questa formula appare del tutto inefficace. Un'altra restrizione é costituita dal fatto che la (17) sussiste per segnali a banda limitata, anche se nella pratica questa assunzione é normalmente utilizzata, senza compromettere la validitá dei modelli matematici.

Tratteremo qui una impostazione generale del problema della ricostruzione dei segnali, non necessariamente a banda limitata, che é stata introdotta recentemente da P.L.Butzer. In questo assetto la (17) sará verificata in un senso approssimato, ma utilizzando di fatto un *numero finito* di campioni. Il trucco sta nel sostituire la funzione "*sinc*" con altre che abbiano un supporto compatto.

Indicheremo qui con $C(I\!R)$ lo spazio di tutte le funzioni $f : I\!R \to I\!R$ uniformemente continue e limitate. Per $f \in C(I\!R)$ poniamo $\|f\|_\infty = sup_{t \in I\!R}|f(t)|$. Indicheremo poi con $C^{(r)}(I\!R)$ lo spazio delle funzioni $f \in C(I\!R)$ tali che esiste la derivata r-esima, $r \in I\!N$, e $f^{(r)} \in C(I\!R)$. Infine indicheremo con $C_c(I\!R)$ e $C_c^{(r)}(I\!R)$, $r \in I\!N$, i sottospazi di $C(I\!R)$ e $C^{(r)}(I\!R)$ costituiti dalle funzioni a supporto compatto.

Se $\varphi \in C_c(I\!R)$ ed $f \in C(I)$, poniamo:

$$(S_w^\varphi f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/w)\varphi(wt - k), \quad t \in I\!R, \quad w > 0. \tag{2.18}$$

Osserviamo che poiché φ ha supporto compatto, c'é un intervallo $[-a, a]$ tale che $\varphi(t) = 0$ se $|t| > a$. Questo implica che la serie nella (18) ha solo un numero finito di termini diversi da zero, quelli per i quali $wt - k$ appartiene al supporto di φ. Questo implica anche che $S_w^\varphi \in C(I\!\!R)$, per ogni $w > 0$; inoltre:

$$\|S_w^\varphi\|_\infty \leq m_o(\varphi)\|f\|_\infty, \tag{2.19}$$

dove $m_o(\varphi) = sup_{u \in I\!\!R} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi(u-k)| < +\infty$.

ESERCIZIO Provare la (19) e dimostrare che $m_o(\varphi) < +\infty$.

Sussiste il seguente:

Teorema 27 *Sia* $\varphi \in C_c(I\!\!R)$ *tale che:*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(u-k) = 1, \quad u \in I\!\!R. \tag{2.20}$$

Se $f : I\!\!R \to I\!\!R$ *é una funzione continua in* $t_o \in I\!\!R$, *allora:*

$$\lim_{w \to +\infty} (S_w^\varphi f)(t_o) = f(t_o). \tag{2.21}$$

Se $f \in C(I\!\!R)$, *allora:*

$$\lim_{w \to +\infty} \|S_w^\varphi f - f\|_\infty = 0, \tag{2.22}$$

cioé S_w^φ *é uniformemente convergente ad* f *per* $w \to +\infty$.

Dimostrazione Proviamo la (21). Dato $\varepsilon > 0$, per la continuitá di f in t_o, esiste $\delta > 0$ tale che :

$$|f(t_o) - f(k/w)| < \varepsilon,$$

se $|t_o - k/w| < \delta$. Se $w > 0$, scriviamo, per la (20):

$$\begin{aligned} |f(t_o) - (S_w^\varphi)(t_o)| &= |\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t_o)\varphi(wt_o - k) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/w)\varphi(wt_o - k)| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(t_o) - f(k/w)||\varphi(wt_o - k)| \\ &= (\sum_{(1)} + \sum_{(2)})|f(t_o) - f(k/w)||\varphi(wt_o - k)| \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

dove $\sum_{(1)}$ é la sommatoria estesa a tutti i $k \in \boldsymbol{Z}$ tali che $|wt_o - k| < \delta w$, mentre $\sum_{(2)}$ é estesa ai $k \in \boldsymbol{Z}$ tali che $|wt_o - k| \geq \delta w$.
Ora $I_1 < \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi(wt_o - k)| \leq \varepsilon \; m_o(\varphi)$. Inoltre tenendo fissato il $\delta > 0$, possiamo scegliere $w > 0$ cosí grande che il supporto di φ sia contenuto in $[-\delta w, \delta w]$. In tal modo $I_2 = 0$ e da questo segue la (21).
La (22) segue in modo analogo, tenendo conto del fatto che essendo $f \in C(I\!R)$, il δ puó essere scelto indipendentemente da t.

Corollario 7 *Supponiamo che sussistano le condizioni del teorema 27. Se, in piú, φ ha supporto compatto in $]0, +\infty[$, allora, in ogni punto t_o di continuitá di f risulta:*

$$\begin{aligned} \lim_{w \to +\infty} (S_w^\varphi)(t_o) &= \lim_{w \to +\infty} \sum_{(k/w) < t_o} f(k/w)\varphi(wt_o - k) \\ &= f(t_o). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Nella (23) la sommatoria é ora estesa a tutti i k tali che $k < t_o w$.

Dimostrazione Dato che il supporto di φ é contenuto in $]0, +\infty[$, $\varphi(wt_o - k) = 0$ se $k/w \geq t_o$. Pertanto:

$$(S_w^\varphi)(t_o) = \sum_{k/w < t_o} f(k/w)\varphi(wt_o - k).$$

L'asserto segue dal teorema 12.

La (23) é importante poiché consente di *predire* il segnale in t_o usando solo un numero finito di "campioni" scelti nel "passato" di t_o. Osserviamo anche che la (20) é necessaria per la (22), nel senso che se vale la (22) per ogni $f \in C(I\!R)$, allora sussiste la (20). Pertanto é utile avere a disposizione alcune condizioni sulla φ, in modo che valga la (22) e, soprattutto, siano agevoli da controllare. A tale scopo enunciamo il seguente:

Teorema 28 *Se $\varphi \in C_c(I\!R)$, la condizione (20) é equivalente alla:*

$$\sqrt{2\pi}\hat{\varphi}(2\pi k) = \begin{cases} 1 & se \; k = 0 \\ 0 & se \; k \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\} \end{cases} \tag{2.24}$$

Dimostrazione É omessa. Essa si basa sulla *formula di Poisson* :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(u-k) \cong \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(2\pi k) e^{i2\pi k},$$

dove $\cong$ significa che la seconda serie é la serie di Fourier della funzione (1-periodica) a sinistra.

ESEMPIO Se $n \in I\!N$, definiamo le funzioni *central B-splines*, ponendo:

$$M_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \left(\frac{n}{2} + t - j \right)_+^{n-1},$$

dove, se $x \in I\!R$, $r \in I\!N$, abbiamo posto $x_+^r = max\{x^r, 0\}$.
Se $n = 2$, otteniamo per esempio la funzione:

$$M_2(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 0 \end{cases}$$

mentre, se $n = 3$,:

$$M_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(|t| + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(|t| + \frac{1}{2}\right)^2, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left(-|t| + \frac{3}{2}\right)^2, & \frac{1}{2} < |t| \leq \frac{3}{2} \\ 0, & |t| > \frac{3}{2} \end{cases}$$

É possibile mostrare che per $n \geq 3$ vale la formula ricorsiva:

$$M_n(t) = \frac{((n/2) + t)M_{n-1}(t + 1/2) + ((n/2) - t)M_{n-1}(t - 1/2)}{n-1}.$$

Inoltre risulta:

$$\widehat{M_n}(\lambda) = \left[\frac{sin(\lambda/2)}{\lambda/2} \right]^n, \quad \lambda \in I\!R, \quad n \in I\!N, \tag{2.25}$$

e quindi si ha:

$$\widehat{M_n}(2\pi k) = 0, \quad k \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}, \quad \widehat{M_n}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Allo scopo di studiare l'ordine di approssimazione nella (22), introduciamo la notazione seguente: se $r \in I\!N \setminus \{0\}$, poniamo:

$$m_r(\varphi) = sup_{u \in I\!R} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u-k|^r |\varphi(u-k)|,$$

dove $\varphi \in C_c(I\!R)$.

sussiste il seguente:

Teorema 29 *Sia $\varphi \in C_c(I\!R)$. Supponiamo che per qualche $r \in I\!N$ risulti:*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (u-k)^j \varphi(u-k) = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & j = 1, 2, \ldots, r-1 \end{cases} \tag{2.26}$$

per ogni $u \in I\!R$. Allora:

$$\|f - S_w^{\varphi}\|_{C(I\!R)} \leq \frac{m_r(\varphi)}{r!} \|f^{(r)}\|_{C(I\!R)} w^{-r}, \tag{2.27}$$

per $f \in C^{(r)}(I\!R)$, $w > 0$.

Dimostrazione Applichiamo alla f la formula di Taylor con il resto integrale d'ordine r :

$$f(u) = \sum_{h=0}^{r-1} \frac{f^{(h)}(t)}{h!}(u-t)^h + \frac{1}{(r-1)!} \int_t^u f^{(r)}(y)(u-y)^{r-1} dy$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} (S_w^{\varphi})(t) - f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/w)\varphi(wt-k) - f(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{h=0}^{r-1} \frac{f^{(h)}(t)}{h!}((k/w)-t)^h \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \int_t^{k/w} f^{(r)}(y)((k/w)-y)^{r-1} dy \right\} \varphi(wt-k) - f(t). \end{aligned}$$

per ogni $t \in I\!R$. Da questo segue la (27).

Osserviamo che una condizione equivalente alla (26) per funzioni $\varphi \in C_c(I\!R)$, é espressa dalla seguente:

$$\hat{\varphi}^{(j)}(2\pi k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2\pi}, & k = j = 0 \\ 0, & k \in \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}, \quad j = 0 \\ 0, & k \in \boldsymbol{Z}, \quad j = 1, 2, \ldots, r-1 \end{cases} \tag{2.28}$$

ESEMPIO Se $r = 2$, il nucleo:

$$\varphi_2(t) = 3M_2(t-2) - 2M_2(t-3),$$

verifica (28). Inoltre, in tal caso, $m_r(\varphi_2)/r! \leq 15$, e:

$$\|f - S_w^{\varphi_2} f\|_{C(I\!R)} = O(w^{-2}), \quad w \to +\infty.$$

Se $r = 3$, possiamo prendere:

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{8}\{47M_3(t-2) - 62M_3(t-3) + 23M_3(t-4)\}.$$

In tal caso, $m_r(\varphi_3)/r! \leq 54$, e:

$$\|f - S_w^{\varphi_3} f\|_{C(I\!R)} = O(w^{-3}), \quad w \to +\infty.$$

La costruzione di tali funzioni si basa sulla risoluzione di sistemi lineari in campo complesso la cui formulazione esula dalla trattazione presente.

2.7 Il problema di Dirichlet per il semipiano

Il problema consiste nel determinare la distribuzione di temperatura su una lamina bidimensionale infinita, assimilabile ad un semipiano, nota la temperatura lungo il bordo. Se $u(x, y)$, $(x, y) \in I\!R \times I\!R^+$, rappresenta la temperatura nel punto (x, y), e se $f : I\!R \to I\!R$ é la distribuzione iniziale di temperatura sull'asse x, il problema consiste nel determinare la soluzione dell'equazione:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

in $I\!R \times I\!R^+$ con una condizione iniziale del tipo $u(x, 0) = f(x)$, $x \in I\!R$.
Il metodo che seguiremo fará uso della trasformata di Fourier in $I\!R$ (questo dipende dalla forma del dominio di $u(x, y)$).
Supporremo $u \in C^2(I\!R \times I\!R^+)$ con $u(\cdot, y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(\cdot, y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\cdot, y)$ in $L^1(I\!R)$, ed inoltre:

(+) $\|u(\cdot,y)\|_1 \le M$, per ogni $y \in I\!R^+$, per qualche $M > 0$.

(++) Esistono funzioni $g, h \in L^1(I\!R)$ tali che:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right| \le g(x), \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right| \le h(x),$$

per ogni $(x,y) \in I\!R \times I\!R^+$.

Infine, interpreteremo il dato al bordo, supponendo $f \in L^1(I\!R)$ e :

$$\lim_{y\to 0^+} \|u(\cdot,y) - f(\cdot)\|_1 = 0. \tag{2.29}$$

Applichiamo ora la trasformata di Fourier alla funzione $u(\cdot,y)$ come funzione di x. Usando il fatto che u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^1(I\!R)$ rispetto ad x, otteniamo (cfr. (9)):

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(\lambda,y) = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda,y), \quad \lambda \in I\!R, \quad y > 0. \tag{2.30}$$

Inoltre dalle (++), usando un teorema di derivazione sotto il segno di integrale, si ha:

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(\lambda,y) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\lambda,y), \quad \lambda \in I\!R, \quad y > 0. \tag{2.31}$$

L'equazione $\Delta u = 0$ diventa allora:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\lambda,y) - \lambda^2 \hat{u}(\lambda,y) = 0, \quad \lambda \in I\!R, \quad y > 0. \tag{2.32}$$

La (32) é una equazione differenziale ordinaria, dipendente dal parametro, la cui funzione incognita é $z(y) = u(\lambda,y)$. L'equazione é lineare del secondo ordine a coefficienti costanti (rispetto ad y). La soluzione generale é allora:

$$\hat{u}(\lambda,y) = \begin{cases} A(\lambda)e^{\lambda y} + B(\lambda)e^{-\lambda y} & \lambda \neq 0 \\ A(0) + B(0)y & \lambda = 0, \end{cases}$$

dove $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ sono coefficienti (dipendenti dal parametro λ). Occorre ora determinare $A(\lambda)$, $B(\lambda)$.
Dalla (+), $|\hat{u}(\lambda,y)| \le M$, per ogni $\lambda \in I\!R$, $y \in I\!R^+$ e quindi per $y \to$

$+\infty$, $A(\lambda) = 0$, se $\lambda > 0$, $B(\lambda) = 0$, se $\lambda \leq 0$.
Inoltre la (29) si trasforma nella (teorema 20):

$$\lim_{y \to 0^+} \|\hat{u}(\lambda, y) - \hat{f}(\lambda)\|_{C(I\!R)} = 0.$$

Ció implica che $A(\lambda) + B(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$, per ogni $\lambda \in I\!R$; pertanto se $u(x, y)$ é una soluzione del problema, la sua trasformata di Fourier é data da:

$$\hat{u}(\lambda, y) = \hat{f}(\lambda) e^{-|\lambda| y}, \quad \lambda \in I\!R, \quad y > 0. \tag{2.33}$$

Poiché $\hat{u}(\cdot, y) \in L^1(I\!R)$, usando il teorema 26, otteniamo:

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y|\lambda|} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Adoperando il risultato dell'esempio c) del paragrafo 2, ed il corollario 6, otteniamo infine:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x - s)}{y^2 + s^2} ds. \tag{2.34}$$

É facile ora verificare direttamente che (34) é soluzione dell'equazione $\Delta u = 0$, con il dato iniziale stabilito. L'integrale nella (34) si chiama *integrale singolare di Poisson-Cauchy*.

Chapter 3

La trasformata di Laplace

3.1 Definizioni principali

L'applicabilitá della trasformata di Fourier alle equazioni differenziali ordinarie é limitata essenzialmente dal fatto che questa trasformazione é definita per funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$. Ma in generale le soluzioni non verificano questa condizione. In questo capitolo introdurremo un nuovo tipo di trasformazione che, in un senso che preciseremo, estende quella di Fourier.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e localmente integrabile, cioé $f \in L^1(A)$, per ogni sottoinsieme misurabile, limitato $A \subset \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre che $f(x) = 0$, per ogni $x < 0$.
La funzione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita dalla:

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)dt, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.1}$$

é detta *trasformata di Laplace* di f. Porremo $F = \mathcal{L}\{f\}$.

Osserviamo subito che (1) é ben definita per ogni $z \in \mathbb{C}$ per il quale l'integrale esiste. Inoltre per tali z, posto $z = x + iy$, si ha:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} \Phi_x(t)dt, \tag{3.2}$$

dove $\Phi_x(t) = e^{-xt} f(t)$. Dalla (2) segue allora:

$$F(z) = \sqrt{2\pi}\widehat{\Phi_x}(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Questo mette in evidenza lo stretto legame esistente tra $\mathcal{L}\{f\}$ e $\hat{f}$. Ció implica che molte delle proprietá di quest'ultima possano essere trasferite alla trasformata di Laplace, anche se notevoli sono le differenze.

Introdurremo ora una classe di funzioni sulle quali l'operatore $\mathcal{L}$ é ben definito per ogni z appartenente ad un opportuno semipiano (dipendente da f). Sia $f : I\!\!R \to I\!\!R$ una funzione misurabile e localmente integrabile in $I\!\!R$. Diremo che f é di *tipo esponenziale* se sono verificate le seguenti condizioni:

(i) $f(t) = 0$, per ogni $t < 0$;

(ii) Esistono costanti $M > 0$, $a \in I\!\!R$, tali che

$$|f(t)| \leq Me^{at},$$

per ogni $t > 0$.

Queste condizioni sono abbastanza "larghe"da includere la maggior parte delle funzioni che occorrono nelle applicazioni. Esse consentono di dare un significato preciso alla (1).

Teorema 30 *Se f é di tipo esponenziale l'integrale (1) esiste (come integrale di Lebesgue) per ogni $z \in \mathbb{C}$, tale che $Re\ z > a$, (dove a é la costante in (ii)).*

Dimostrazione Se $Re\ z > a$, si ha:

$$|e^{-zt}f(t)| = e^{-(Re\ z)t}|f(t)| \leq Me^{-(Re\ z-a)t},$$

per ogni $t > 0$, con $Re\ z - a > 0$. Pertanto $e^{-zt}f(t)$ é integrabile in $[0, +\infty[$.

Nello stesso modo si prova che se (1) esiste per un certo $z_o \in \mathbb{C}$, allora esiste anche per ogni z tale che $Re\ z > Re\ z_o$.

Definiamo *ascissa di convergenza* di f il numero:

$$\sigma(f) = inf\{a \in I\!\!R : (ii) \text{ sussiste per qualche} M > 0\}.$$

Il semipiano $Re\ z > \sigma(f)$, si chiama *semipiano di convergenza.*

Se f é di tipo esponenziale, $\mathcal{L}\{f\}$ é analitica nel semipiano di convergenza $Re\ z > \sigma(f)$, e risulta:

$$F'(z) = -\int_0^{+\infty} te^{-zt}f(t)dt,$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$, con $Re\ z > \sigma(f)$.

Nel seguito ci limiteremo, per semplicitá, ad assumere nella (1) $z \in \mathbb{R}$. In ogni caso tutti i risulati di cui parleremo si estendono facilmente al caso generale $z \in \mathbb{C}$.

Negli esempi che seguono, le funzioni coinvolte si assumono nulle se $t < 0$. ESEMPI

(a) $\mathcal{L}\{1\}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}dt = 1/z, \quad z > 0;$

(b) $\mathcal{L}\{e^{at}\}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z-a)t}dt = 1/(z-a), \quad z > a;$

(c) $\mathcal{L}\{sin(at)\}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}sin(at)dt = a/(z^2+a^2), \quad z > 0.$

3.2 Proprietá della traformata di Laplace

Qui supporremo sempre f sempre localmente integrabile in $\mathbb{R}$ e di tipo esponenziale.

Teorema 31 *Se* $f \in C^{(n)}([0,+\infty[)$ *e* $f^{(k)}$ *é di tipo esponeziale, per ogni* $k = 1, 2, \ldots, n$ *allora:*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(z) = z^n \mathcal{L}\{f\}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1} f^{(k)}(0+), \quad n \geq 1, \tag{3.3}$$

dove $f^{(k)}(0+) = \lim_{x \longrightarrow 0+} f^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, \ldots, n$ *e la (3) vale per ogni* $z \in \mathbb{R}$ *sufficientemente grande.*

Dimostrazione Proviamo la (3) per $n = 1$. In tal caso essa diventa:

$$(*) \qquad \mathcal{L}\{f'\}(z) = z\mathcal{L}\{f\}(z) - f(0+).$$

Integrando per parti, otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f'(t)dt &= \lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-zt} f(t) - f(0+) \\ &+ z\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)dt. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ora poiché f é di tipo esponenziale, $|f(t)| \leq Me^{at}$, per ogni $t > 0$, quindi se $z > a$, $\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-zt} f(t) = 0$. Dalla (4) segue allora la (*).
Il caso generale puó essere dimostrato per induzione.

Teorema 32 *Posto* $G(t) = \int_0^t f(u)du$, *risulta* G *di tipo esponenziale ed inoltre:*

$$\mathcal{L}\{G\}(z) = z^{-1}\mathcal{L}\{f\}(z), \tag{3.5}$$

per ogni z *sufficientemente grande.*

Dimostrazione Poiché f é di tipo esponenziale, si ha $|f(t)| \leq Me^{at}$, per ogni $t > 0$. Possiamo supporre $a > 0$. Allora:

$$\begin{aligned} |G(t)| &\leq \int_0^t |f(u)|du \leq M \int_0^t e^{au} du \\ &= \frac{M}{a}[e^{at} - 1] \leq \frac{M}{a} e^{at}, \end{aligned}$$

e quindi G é di tipo esponenziale. Integrando per parti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{G\}(z) &= \int_0^{+\infty} e^{zt} G(t) dt = -\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{e^{-zt}}{z} G(t) + (1/z)\mathcal{L}\{f\}(z) \\ &= (1/z)\mathcal{L}\{f\}(z), \end{aligned}$$

da cui segue la (5).

La prossima proprietá mette in luce che al prodotto di f per un esponenziale del tipo e^{at} corrisponde, nella trasformata di f, una traslazione sulla variabile z. Viceversa ad una traslazione di t corrisponde, nella trasformata, un prodotto per un esponenziale.

Teorema 33 *Posto* $g(t) = e^{at} f(t)$, $a \in I\!R$, g *é di tipo esponenziale e risulta:*

$$\mathcal{L}\{g\}(z) = \mathcal{L}\{f\}(z - a). \tag{3.6}$$

Viceversa, posto

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ f(t-a), & t \geq a, \end{cases}$$

con $a \in I\!R$, h *é di tipo esponenziale e risulta:*

$$\mathcal{L}\{h\}(z) = e^{-az}\mathcal{L}\{f\}(z). \tag{3.7}$$

Dimostrazione É conseguenza immediata delle definizioni.

Teorema 34 *Per ogni $n \in I\!N$, la funzione $g_n(t) = t^n f(t)$ é di tipo esponenziale e risulta:*

$$\mathcal{L}\{g_n\}(z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\mathcal{L}\{f\}(z), \tag{3.8}$$

per ogni z sufficientemente grande.

Dimostrazione É immediato verificare che g_n é di tipo esponenziale per ogni n e quindi ci limitiamo a provare la (8). Dalla:

$$\mathcal{L}\{f\}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)dt,$$

per ogni $z > \sigma(f)$, derivando rispetto a z, sotto il segno di integrale (perché ció é possibile ?), otteniamo:

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}\{f\}(z) = \int_0^{+\infty} -te^{-zt} f(t)dt = (-1)\mathcal{L}\{g_1\}(z) \tag{3.9}$$

che é la (8) per $n = 1$. Nel caso generale $n > 1$ si procede derivando la (9) ancora rispetto a z, e si utilizza il principio di induzione.

Il teorema seguente ci dice che l'operatore $\mathcal{L}$ é lineare.

Teorema 35 *Se f, g sono di tipo esponenziale ed α, β sono numeri reali, allora $\alpha\ f + \beta\ g$ é di tipo esponenziale e risulta:*

$$\mathcal{L}\{\alpha\ f + \beta\ g\}(z) = \alpha\ \mathcal{L}\{f\}(z) + \beta\ \mathcal{L}\{g\}(z), \tag{3.10}$$

per ogni z sufficientemente grande.

Dimostrazione É conseguenza immediata delle definizioni.

Le funzioni f, di tipo esponenziale, non appartengono in generale allo spazio $L^1(I\!R)$ (ad esempio $f(t) = e^t$). Pertanto il prodotto di convoluzione introdotto nel capitolo precedente non é adatto. Modificheremo pertanto la definizione di prodotto di convoluzione in una forma che si presta bene ad essere adoperata nella teoria della trasformazione di Laplace, senza peraltro alterare le sue proprietá fondamentali. Ci limiteremo a definire il prodotto $f \star g$ per funzioni f, g di tipo esponenziale, anche se, come risulterá chiaro, esso é definito per tutte le funzioni localmente sommabili.

Se f, g sono di tipo esponenziale, definiamo:

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du, \quad t \in I\!R. \tag{3.11}$$

É facile verificare che $f \star g$ é ben definito, é localmente sommabile ed inoltre é di tipo esponenziale con

$$\sigma(f \star g) = max\{\sigma(f), \sigma(g)\}.$$

Come per la trasformazione di Fourier, sono verificate le proprietá commutativa ed associativa, cioé risulta:

$$f \star g = g \star f, \quad f \star (g \star h) = (f \star g) \star h.$$

Sussiste il seguente:

Teorema 36 *(di convoluzione) Si ha, per $z > \sigma(f \star g)$, :*

$$\mathcal{L}\{f \star g\}(z) = \mathcal{L}\{f\}(z) \cdot \mathcal{L}\{g\}(z) \tag{3.12}$$

Dimostrazione Segue dal teorema di inversione nell'ordine di integrazione (Fubini-Tonelli).

ESEMPI

(a) *Calcolare* $\mathcal{L}\{sinh(at)\}, \quad a \in I\!R$
Usando la linearitá di $\mathcal{L}$, e tenendo presente l'esempio (b) del par.1, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{sinh(at)\}(z) = \mathcal{L}\{\frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at}\}(z) &= \frac{1}{2(z-a)} - \frac{1}{2(z+a)} \\ &= \frac{a}{z^2 - a^2}. \end{aligned}$$

(b) *Calcolare* $\mathcal{L}\{cos(at)\}, \ a \in I\!R$
Se $a = 0$, otteniamo $\mathcal{L}\{1\}$ che é stato calcolato nell'esempio (a), par.1. Se $a \neq 0$, poniamo $f(t) = (1/a)sin(at), \ t \geq 0$, da cui $f'(t) = cos(at)$. Allora usando il teorema 31, con $n = 1$ e l'esercizio (c) del par.1, si ottiene:

$$\mathcal{L}\{cos(at)\}(z) = \mathcal{L}\{f'\}(z) = z\mathcal{L}\{f\}(z) = \frac{z}{a^2 + z^2}.$$

(c) *Calcolare* $\mathcal{L}\{e^{at}sin(bt)\}, \quad a, b \in I\!R.$
Applichiamo il teorema 33 con $f(t) = sin(bt)$. Usando ancora l'esempio (c) del par.1, otteniamo:

$$\mathcal{L}\{e^{at}sin(bt)\}(z) = \frac{b}{(z-a)^2 + b^2}.$$

(d) Se, nel teorema 34 poniamo $f(t) = 1, \quad t \geq 0$, otteniamo, per ogni $n \in I\!N$,

$$\mathcal{L}\{t^n\}(z) = (-1)^n \frac{d}{dz^n}(1/z) = \frac{n!}{z^{n+1}}.$$

3.3 Inversione

Nell'applicare la trasformata di Laplace a problemi pratici, ci si deve poi porre il problema seguente: *Data una funzione $\lambda(z)$ trovare, se esiste, una funzione f tale che $\mathcal{L}\{f\} = \lambda$.*

Il seguente teorema mette in luce che il suddetto problema non sempre ha soluzione.

Teorema 37 *Se f é localmente sommabile e di tipo esponenziale, si ha:*

$$\lim_{z \to \infty} \mathcal{L}\{f\}(z) = 0. \tag{3.13}$$

Inoltre $|z\mathcal{L}\{f\}(z)|$ si mantiene limitata per $|z| > M$, con $M > 0$.

Dimostrazione Ci limitiamo a provare la (13). Il resto si dimostra in maniera simile.
Siano M, a tali che $|f(t)| \leq Me^{at}, \quad t > 0$. Allora:

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}\{f\}(z)| &\leq \int_0^{+\infty} e^{-zt}|f(t)|dt \leq M\int_0^{+\infty} e^{-(z-a)t}dt \\ &\leq \frac{M}{z-a} \end{aligned} \tag{3.14}$$

da cui segue l'asserto.

OSSERVAZIONE Nel caso $z \in \mathbb{C}$, la dimostrazione é analoga; basta osservare che posto $z = x + iy$, si ha $|e^{-zt}| = e^{-xt}$ e procedere come nella (14) con x al posto di z.
Cosí se $\lambda(z) = 1$, $\lambda(z) = \dfrac{z}{z+1}$, $\lambda(z) = z^{-1/2}$, oppure $\lambda(z) = sinz$, etc., non esiste alcuna funzione f localmente integrabile e di tipo esponenziale tale che $\mathcal{L}\{f\} = \lambda$. Tuttavia sussiste il seguente teorema:

Teorema 38 *(Lerch). Se, data una funzione λ, l'equazione $\mathcal{L}\{f\} = \lambda$, ammette soluzione, questa é unica (a meno di insiemi di misura nulla).*

Dimostrazione Omessa.

ESEMPIO L'unica soluzione f dell'equazione:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = \frac{1}{z},$$

é la funzione $f(t) = 1$.

Il problema dell'inversione é parzialmente risolto dal seguente teorema, che enunciamo nella forma generale ($z \in \mathbb{C}$).

Teorema 39 *(Mellin). Sia $\lambda(z)$ una funzione complessa, definita nel dominio $Rez > \alpha_o$, tale che $\mathcal{L}\{f\} = \lambda$, con f di tipo esponenziale con ascissa di convergenza α_o. Allora:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{x-iT}^{x+iT} e^{zt} \mathcal{L}\{f\}(z) dz, \quad x > \alpha_o. \tag{3.15}$$

Dimostrazione Omessa. Osserviamo soltanto che l'integrale nella (15) é un integrale curvilineo lungo il segmento, parallelo all'asse immaginario, i cui punti sono $x + iv$, con $v \in [-T, T]$. Inoltre il valore dell'integrale é indipendente dalla scelta di $x > \alpha_o$.
Il limite nella (15) viene spesso denotato col simbolo:

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{zt} \mathcal{L}\{f\}(z) dz, \quad x > \alpha_o.$$

Il teorema seguente, del quale non riportiamo la dimostrazione, dá delle condizioni sufficienti affinché λ sia una trasformata.

Teorema 40 *Sia λ una funzione tale che:*

(i) $\lambda(z)$ *é analitica nella regione* $Rez > \alpha_o$;

(ii) Nel dominio $Rez > \alpha_o$, *la funzione* $\lambda(z)$ *tende a zero, per* $|z| \rightarrow \infty$, *uniformemente rispetto ad* $arg z$;

(iii) Per ogni $x > \alpha_o$, *risulta:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda(x+iy)| dy < +\infty.$$

Allora $\lambda(z)$ *é la trasformata di Laplace di una funzione* $f(t), \quad t \in \mathbb{R}$, *di tipo esponenziale con ascissa di convergenza* $\sigma(f) = \alpha_o$; *inoltre la* f *si calcola con la (15).*

Un caso interessante é fornito dalle funzioni "meromorfe". Una funzione complessa di variabile complessa λ si dice *meromorfa* se é analitica in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, dove z_k é una singolaritá polare, $k = 1, \ldots, n$, ed esiste una costante $b \geq 1$ tale che:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^b |\lambda(z)| = M < +\infty, \quad z \neq z_k.$$

In tal caso il teorema di Mellin dá:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \lambda(z) e^{zt} dz = \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} [\lambda(z)\ e^{zt}],$$

dove x é tale che $Rez_k < x, \quad k = 1, \ldots, n.$

ESEMPIO Sia $\lambda(z) = G(z)/H(z)$, dove G, H sono funzioni intere, ed H ha zeri semplici $z_1, \ldots, z_n$. Allora:

$$Res_{z=z_k} \lambda = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \lambda(z) = \frac{G(z_k)}{H'(z_k)}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

dunque

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{G(z_k)}{H'(z_k)} e^{z_k t}.$$

Nel seguito, se $\mathcal{L}\{f\} = \lambda$ porremo $f = \mathcal{L}^{-1}\{\lambda\}$.

ESEMPI

(a) *Calcolare* $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{z(z-a)}\}, \quad a \in I\!R.$

La funzione $\lambda(z) = \dfrac{a}{z(z-a)}$ verifica le condizioni dell'esempio precedente, con $G(z) = a, \quad H(z) = z(z-a)$, per ogni z, con zeri semplici $z_1 = 0, \ z_2 = a$ da cui:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\lambda\}(t) = e^{at} - 1.$$

Un secondo modo di procedere fa uso del teorema di convoluzione. Essendo :

$$\frac{a}{z} = \mathcal{L}\{a\}, \quad \frac{1}{z-a} = \mathcal{L}\{e^{at}\},$$

posto $f(t) = a, \quad t > 0, \quad g(t) = e^{at}, \quad t > 0$, si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\lambda\}(t) = (f \star g)(t) = \int_0^t a e^{au} du = e^{at} - 1.$$

(b) *Calcolare* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{z^2+1}{z^3+3z^2+2z}\right\}.$

Risulta: $H(z) = z^3 + 3z^2 + 2z = z(z+1)(z+2), \quad G(z) = z^2 + 1$ e dunque posto $z_1 = 0, \ z_2 = -1, \ z_3 = -2$, si ottiene:

$G(z_1) = 1, \ G(z_2) = 2, \ G(z_3) = 5, \ H'(z_1) = 2, \ H'(z_2) = -1, \ H'(z_3) = 2$

e quindi:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{z^2+1}{z^3+3z^2+2z}\right\} = \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}.$$

Sia ora $\lambda(z) = G(z)/H(z)$, dove H, G sono funzioni intere ed alcuni degli zeri di H sono ripetuti o complessi. Se H, G sono dei polinomi é conveniente usare la formula di decomposizione di Hermite o altri accorgimenti.

ESEMPI

(c) *Calcolare* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z+1)(z^2+1)}\right\}$.

Primo metodo Usando la formula di decomposizione di Hermite, si puó scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+1)(z^2+1)} &= \frac{A}{z+1} + \frac{Bz+C}{z^2+1} \\ &= \frac{A}{z+1} + \frac{Bz}{z^2+1} + \frac{C}{z^2+1}.\end{aligned}$$

Dopo aver calcolato le costanti A, B, C, si possono usare gli esercizi precedenti e si ottiene:

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z+1)(z^2+1)}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\{e^{-t} - sint + cost\}.\end{aligned}$$

Secondo metodo Essendo

$$\frac{1}{z+1} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}, \quad \frac{1}{z^2+1} = \mathcal{L}\{sint\},$$

risulta:

$$\frac{1}{(z+1)(z^2+1)} = \mathcal{L}\{e^{-t}\} \cdot \mathcal{L}\{sint\},$$

da cui per il teorema di convoluzione, otteniamo:

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z+1)(z^2+1)}\right\} = \int_0^t e^{-u} sin(t-u)du \\ &= \frac{1}{2}\{e^{-t} - sint + cost\}.\end{aligned}$$

(d) *Calcolare* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z^2+4z+5}\right\}$.
Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{z}{z^2+4z+5} &= \frac{z}{(z+2)^2+1} = \frac{(z+2)-2}{(z+2)^2+1} \\ &= \frac{z+2}{(z+2)^2+1} - \frac{2}{(z+2)^2+1}.\end{aligned}$$

Usando il teorema 33 ed alcuni esercizi precedenti, otteniamo:

$$\frac{z+2}{(z+2)^2+1} = \mathcal{L}\{e^{-2t}cost\}, \quad \frac{2}{(z+2)^2+1} = \mathcal{L}\{2e^{-2t}sint\},$$

da cui il risultato é $e^{-2t}\{cost - 2sint\}$.

Gli esercizi precedenti mettono in risalto che il calcolo di $\mathcal{L}^{-1}\{\lambda\}$ viene effettuato "frazionando",ove possibile, la funzione $\lambda(z)$ in funzioni elementari delle quali si conosce la funzione originale. Nella pratica si usano tavole giá predisposte, nelle quali sono elencate centinaia di funzioni di tipo elementare.

3.4 Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie lineari

Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b(t) \\ y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1, \ \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{3.16}$$

Supponiamo qui che le funzioni $y, \ y', \ \ldots, \ y^{(n)}, \ b$, siano di tipo esponenziale ed indichiamo con $\sigma(y), \ \sigma(y'), \ \ldots, \ \sigma(b)$ le relative ascisse di convergenza. Posto $Y(z) = \mathcal{L}\{y\}(z), \ B(z) = \mathcal{L}\{b\}(z)$, con $z \in \mathbb{R}$, usando il teorema 31 per ciascuna delle derivate che compaiono nella (16) e la linearitá della trasformata $\mathcal{L}$, é facile vedere che la (16) si trasforma nell'equazione algebrica:

$$Q(z) + R(z)Y(z) = B(z), \tag{3.17}$$

per ogni $z > max\{\sigma(y), \ \sigma(y'), \ \ldots, \ \sigma(b)\}$.
Nella (17) Q é un polinomio in z di grado $n-1$, mentre la funzione $R(z)$ é

proprio il polinomio caratteristico dell'equazione (16) cioé:

$$R(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^k, \quad (a_0 = 1).$$

Dalla (17) segue:

$$Y(z) = \frac{B(z) - Q(z)}{R(z)}. \tag{3.18}$$

Dalla (18) é possibile ricavare la funzione $y(t)$, che é la soluzione della (16).

ESEMPI

(a) *Risolvere l'equazione differenziale*:

$$y'' + y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

Soluzione. Applicando la trasformata di Laplace, otteniamo:

$$z^2 Y(z) - zy(0) - y'(0) + Y(z) = \mathcal{L}\{t\}(z).$$

Essendo $\mathcal{L}\{t\}(z) = z^{-2}$, si ricava:

$$Y(z) = \frac{2z^2 + 1}{z^2(z^2 + 1)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2 + 1}.$$

Essendo $\mathcal{L}^{-1}\{z^{-2}\} = t, \quad \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{z^2 + 1}\} = sint$, otteniamo:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) = t + sint.$$

(b) *Risolvere l'equazione*:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2.$$

Soluzione Trasformando l'equazione, otteniamo:

$$(z^3 - 3z^2 + 3z - 1)Y(z) - z^2 + 3z - 1 = 2(z - 1)^{-3},$$

da cui:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z^2 - 3z + 1}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^6} \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^6}. \end{aligned}$$

Da questo ricaviamo:

$$y(t) = e^t - te^t - \frac{t^2}{2}e^t + \frac{t^5}{60}e^t.$$

(c) Questo esercizio mostra come agisce la trasformata di Laplace per le equazioni a coefficienti non costanti. Consideriamo l'equazione:

$$ty'' + y' + 4ty = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

Applicando la (8) del teorema 34 con $n = 1$, trasformando l'equazione, otteniamo:

$$-\frac{d}{dz}\{z^2 Y(z) - 3z\} + \{zY(z) - 3\} - 4Y'(z) = 0,$$

da cui:

$$(z^2 + 4)Y'(z) + zY(z) = 0,$$

che é una equazione del 1 ordine. La trasformazione ha quindi prodotto un abbassamento di grado per l'equazione.

ESERCIZI PROPOSTI

1. $y'' + 2y' + 2y = 4, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0;$
2. $y^{IV} + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \ y'''(0) = 1,$
3. $y'' + y' + y = e^t, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0;$
4. $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = 0;$
5. $y'' - y' = t, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = -3.$

Figure 3.1:

3.5 Alcune applicazioni alle travi

Consideriamo una trave orizzontale, assimilabile ad un segmento sull'asse x, di estremi $x = 0$, $x = \ell$. Supponiamo che sulla trave agisca un carico trasversale verticale $F(x)$ nel punto $x \in [0, \ell]$. (fig.1)
In tali condizioni la trave subisce uno spostamento trasversale $y(x)$ in x che verifica l'equazione:

$$y^{IV}(x) = kF(x), \quad 0 < x < \ell, \tag{3.19}$$

dove k é una costante che dipende dalle caratteristiche della trave (elasticitá, momento di inerzia delle sezioni della trave).
In generale occorrerá risolvere un problema ai limiti per la (19); le condizioni ai limiti dipendono da come la trave é vincolata agli estremi $0, \ \ell$. Ad esempio:

a) **Estremitá incastrata** : $y = y' = 0$.

b) **Estremitá appoggiata** : $y = y'' = 0$.

c) **Estremitá libera** : $y'' = y''' = 0$.

ESEMPIO *Determinare l'abbassamento della trave nel caso che essa sia appoggiata alle due estremitá $x = 0$, $x = \ell$, e supponendo F costante (distribuzione uniforme del carico).*

Soluzione L'equazione differenziale é $y^{IV} = kF, \quad 0 < x < \ell$ e le condizioni ai limiti sono in tal caso date dalle:

$$y(0) = y''(0) = 0; \quad y(\ell) = y''(\ell) = 0.$$

Posto $c_1 = y'(0), \ c_2 = y'''(0),$ otteniamo, trasformando:

$$z^4 Y(z) - c_1 z^2 - c_2 = \frac{kF}{z},$$

da cui segue:

$$Y(z) = \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^4} + \frac{kF}{z^5},$$

e quindi antitrasformando:

$$y(x) = c_1 x + c_2 \frac{x^3}{3!} + \frac{kF}{4!} x^4.$$

Le costanti $c_1, \ c_2$ vengono determinate usando le condizioni $y(\ell) = y''(\ell) = 0$; otteniamo perció:

$$c_1 = \frac{kF}{24} \ell^3, \quad c_2 = -\frac{kF}{2} \ell,$$

e quindi lo spostamento trasversale della trave é dato dalla :

$$y(x) = \frac{kF}{24} x(\ell - x)(\ell^2 + \ell x - x^2).$$

3.6 Cenni sulla distribuzione di Dirac

Per il teorema 37 la funzione $\lambda(z) = 1, \ \forall z,$ non é antitrasformabile, cioé non esiste alcuna funzione f localmente sommabile tale che $\mathcal{L}\{f\} = 1$. Tuttavia nelle applicazioni (specie in Elettrotecnica) si assume l'esistenza di una "funzione" che é nulla per ogni $t \neq 0$, che vale $+\infty$ in 0 ed il cui integrale vale 1. Una tale "funzione" non puó esistere, se attribuiamo al termine "funzione" il comune significato. Gli applicati associano ad una tale "funzione" la trasformata uguale ad 1. Tutto ció puó essere precisato dal punto di vista

matematico nel modo seguente.
Per ogni $r > 0$, definiamo:

$$f_r(t) = \begin{cases} r^{-1} & 0 < t < r \\ 0 & t \leq 0, \quad t \geq r \end{cases}$$

Allora f_r é di tipo esponenziale e si ha:

$$\mathcal{L}\{f_r\}(z) = r^{-1} \int_0^r e^{-zt} dt = \frac{1 - e^{-zr}}{zr}, \quad z > 0.$$

Ora se passiamo al limite per $r \rightarrow 0^+$, otteniamo il caso ideale di una "funzione" δ per la quale sussistono le seguenti proprietá:

a) $\delta(t) = 0, \ \forall t \neq 0, \quad \delta(0) = +\infty$,

b) $\int_0^{+\infty} \delta(t) dt = 1$,

c) $\mathcal{L}\{\delta\} = 1$.

La successione generalizzata $\{f_r\}$ viene allora identificata con questa "funzione" δ, e prende il nome di *distribuzione di Dirac*. La distribuzione δ di Dirac é quindi un ente piú generale dell'usuale concetto di funzione.
Se t rappresenta il tempo ed f_r una forza, allora l'integrale $\int_0^r f_r(t) dt$ rappresenta l'impulso della forza f_r, che agisce sull'intervallo $[0, r]$. Se $r \rightarrow 0^+$ possiamo parlare di un impulso unitario in $t = 0$, dovuto ad una forza "infinita" che agisce in un intervallo infinitesimo.

La distribuzione di Dirac é un caso particolare della teoria generale delle distribuzioni, che verrá brevemente accennata nel Cap.6.

Chapter 4

Cenni sulle funzioni speciali

4.1 Le funzioni Euleriane

É noto che per ogni $\alpha > 0$ esiste l'integrale generalizzato:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \tag{4.1}$$

La funzione (1) si chiama *funzione gamma di Eulero.* Essa é di grande aiuto nella risoluzione di integrali ed equazioni differenziali e riveste un ruolo importante nelle applicazioni. Vedremo in seguito qualche esempio.

Nella teoria generale delle funzioni spaciali, la funzione (1) viene definita per valori complessi di α e si dimostra che $\Gamma(z)$ é ben definita ed analitica nell'insieme $Rez > 0$. Tuttavia per semplicitá assumeremo che α sia reale positivo.

Esponiamo qui alcune delle proprietá fondamentali della funzione Γ.

Teorema 41 *La funzione Γ é soluzione dell'equazione funzionale:*

$$f(t+1) = tf(t), \quad t > 0. \tag{4.2}$$

Dimostrazione Verifichiamo che Γ é soluzione della (2). Integrando per parti, otteniamo:

$$\begin{aligned} \Gamma(t+1) &= \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = \lim_{M \longrightarrow +\infty} \int_0^M x^t e^{-x} dx \\ &= \lim_{M \longrightarrow +\infty} \left\{ [-x^t e^{-x}]_0^M + t \int_0^M e^{-x} x^{t-1} dx \right\} \\ &= t\Gamma(t). \end{aligned}$$

Corollario 8 *Per ogni* $n \in I\!N$, *risulta:*

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{4.3}$$

Dimostrazione É chiaro che $\Gamma(1) = 1$. Inoltre dalla (2), si ha:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),$$

e quindi, $\Gamma(2) = \Gamma(1)$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$, e per induzione é facile provare la (3) per ogni n.

La (2) permette di prolungare la funzione Γ anche per certi valori negativi di α. Infatti si ha:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}, \tag{4.4}$$

e quindi se $-1 < \alpha < 0$, possiamo definire $\Gamma(\alpha)$ attraverso la (4), poiché $\alpha + 1 > 0$. Cosí se $-2 < \alpha < -1$, allora $\alpha + 1 \in]-1, 0[$ e cosí $\Gamma(\alpha)$ é ben definita dalla (4).

ESEMPI

(a) *Calcolare* $\Gamma(1/2)$.
Soluzione Risulta:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

(b) *Calcolare* $\Gamma(-1/2)$.
Soluzione Risulta:

$$\Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(1/2)}{-1/2} = -2\sqrt{\pi}.$$

(c) *Calcolare* $\Gamma(-5/2)$.
Soluzione Lasciata per esercizio.

Il teorema seguente permette di valutare il comportamento asintotico della successione numerica $n!$ utilizzando una espressione per $\Gamma(\alpha+1)$. La dimostrazione é omessa.

Teorema 42 *Per ogni* $\alpha > 0$, *esiste* $\theta \in]0,1[$ *tale che:*

$$\Gamma(\alpha+1) = \sqrt{2\pi\alpha}\ \alpha^{\alpha} e^{-\alpha} e^{\theta/12(\alpha+1)}.$$

In particolare, se $\alpha = n \in I\!N$, si ottiene:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}. \tag{4.5}$$

Infatti basta tener conto del fatto che $e^{\theta/12(n+1)}$ tende ad 1 per $n \to +\infty$. La (5) é detta *Formula di Stirling* che fornisce l'ordine di infinito per $n!$.

Se $\alpha > 0,\ \beta > 0$, allora l'integrale generalizzato:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \tag{4.6}$$

esiste finito. Tale funzione si chiama *funzione beta di Eulero*. Come per la funzione Γ, anche la funzione beta ammette una estensione al campo dei numeri complessi $z,\ w$, tali che $Rez > 0,\ \ Rew > 0$. Comunque ci occuperemo soltanto del caso in cui $\alpha > 0,\ \beta > 0$.

Sussiste la seguente immediata proprietá:

Proposizione 6 *Per ogni* $\alpha > 0,\ \beta > 0$ *risulta:*

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha) \tag{4.7}$$

Dimostrazione Operando il cambiamento di variabile $1 - x = t$, nella (6), otteniamo $x = 1 - t$ e quindi:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt = B(\beta,\alpha).$$

La funzione $B(\alpha,\beta)$ é strettamente legata alla funzione Γ. Sussiste infatti il seguente:

Teorema 43 $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

Dimostrazione Operando il cambiamento di variabile $z = x^2$ si ha:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \int_0^{+\infty} z^{\alpha-1}e^{-z}dz = \lim_{M\longrightarrow+\infty}\int_0^M z^{\alpha-1}e^{-z}dz \\ &= 2\lim_{M\longrightarrow+\infty}\int_0^{\sqrt{M}} x^{2\alpha-1}e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} x^{2\alpha-1}e^{-x^2}dx.\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\Gamma(\beta) = 2\int_0^{+\infty} y^{2\beta-1}e^{-y^2}dy.$$

Pertanto:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{2\alpha-1}y^{2\beta-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Dunque, detto C_r il quarto di cerchio di centro l'origine e raggio r, contenuto nel primo quadrante, si ha:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= 4\lim_{r\rightarrow+\infty}\int\int_{C_r} x^{2\alpha-1}y^{2\beta-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\ &= 4\lim_{r\rightarrow+\infty}\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^r \rho^{2(\alpha+\beta)-1}e^{-\rho^2}cos^{2\alpha-1}\theta\ sin^{2\beta-1}\theta d\rho \\ &= 4\left(\int_0^{\pi/2} cos^{2\alpha-1}\theta\ sin^{2\beta-1}\theta d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty}\rho^{2(\alpha+\beta)-1}e^{-\rho^2}d\rho\right) \\ &= 2\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^{\pi/2} cos^{2\alpha-1}\theta\ sin^{2\beta-1}\theta d\theta.\end{aligned}$$

Ora ponendo $x = sin^2\theta$, si ha:

$$B(\alpha,\beta) = 2\int_0^{\pi/2} cos^{2\alpha-1}\theta\ sin^{2\beta-1}\theta d\theta, \tag{4.8}$$

e quindi

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta),$$

da cui segue l'asserto.

Usando le proprietá della funzione $B(\alpha,\beta)$ si puó provare il seguente:

Teorema 44 *(Formula di duplicazione di Legendre) Se* $p > 0$, *allora:*

$$2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2p).$$

Dimostrazione Poniamo:

$$I = \int_0^{\pi/2} sin^{2p}xdx, \quad J = \int_0^{\pi/2} sin^{2p}(2x)dx.$$

Dalla (8) segue facilmente che :

$$I = \frac{1}{2}B(1/2, p+1/2) = \frac{\Gamma(p+1/2)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(p+1)}.$$

Ponendo poi $2x = u$ si ottiene:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} sin^{2p}udu = \int_0^{\pi/2} sin^{2p}udu = I;$$

d'altra parte,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} (2sinx\ cosx)^{2p}dx = 2^{2p}\int_0^{\pi/2} sin^{2p}x\ cos^{2p}xdx \\ &= 2^{2p-1}B(p+1/2, p+1/2) = \frac{2^{2p-1}[\Gamma(p+1/2)]^2}{\Gamma(2p+1)}, \end{aligned}$$

e quindi essendo $I = J$, si ha:

$$\frac{\Gamma(p+1/2)\sqrt{\pi}}{2p\Gamma(p)} = \frac{2^{2p-1}[\Gamma(p+1/2)]^2}{\Gamma(2p+1)}.$$

L'asserto segue allora dalla $\Gamma(2p+1) = 2p\Gamma(2p)$.

4.2 Valutazioni di certi integrali

(a) Se $0 < p < 1$, allora risulta:

$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p).$$

Dimostrazione Posto $x = y/(1-y)$, si ottiene (previo passaggio al limite),

$$I_p = \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{-p}dy = B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p).$$

Inoltre utilizzando per esempio la teoria delle funzioni di variabile complessa, si puó dimostrare che:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{sin \pi p}, \quad \forall p \in]0,1[.$$

(b) *Integrali di Dirichlet*
Si consideri la superficie di equazione cartesiana:

$$(x/a)^p + (y/b)^q + (z/c)^r = 1. \tag{4.9}$$

Sia V la regione di spazio del primo ottante, limitata dalla superficie di equazione (9) e dai piani coordinati. Allora:

$$\begin{aligned} & \iiint_V x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1} dxdydz & (4.10) \\ = \; & \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr} \frac{\Gamma(\alpha/p)\Gamma(\beta/q)\Gamma(\gamma/r)}{\Gamma(1+(\alpha/p)+(\beta/q)+(\gamma/r))}. & \end{aligned}$$

Gli integrali (10) si dicono *Integrali di Dirichlet*. La dimostrazione é omessa.

(c) Risulta:

$$\int_0^1 x^m log^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}, \quad n \in I\!N, \quad m > -1.$$

Dimostrazione Posto $x = e^{-y}$, si ha:

$$\int_0^1 x^m log^n x dx = (-1)^n \int_0^{+\infty} y^n e^{-(m+1)y} dy;$$

posto poi $(m+1)y = u$, si ottiene:

$$\int_0^1 x^m log^n x dx = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \Gamma(n+1),$$

da cui segue l'asserto.

4.3 Esercizi

Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{-y} dy$

2. $\int_0^{+\infty} 3^{-4x^2} dx$

3. $\int_0^{+\infty} x^m e^{-ax^n} dx, \quad m,\ n,\ a > 0$

4. $\int_0^{\pi/2} sin^6\theta d\theta$

5. $\int_0^{\pi/2} sin^4\theta\ cos^5\theta d\theta$

6. $\int_0^1 \sqrt{1-x^4} dx$

7. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt, \quad s > 0$

8. $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4}$

9. *Calcolare la massa della regione limitata da* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ *e di densitá* $\sigma = x^2y^2z^2$.

4.4 La funzione zeta di Riemann

Sia $s \in I\!R,\ s > 1$. Definiamo la funzione:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{4.11}$$

Tale funzione é ben definita per ogni $s \in]1, +\infty[$. Essa si chiama *funzione zeta di Riemann* e trova interessanti applicazioni nella matematica pura ed in quella applicata. In particolare é oggetto di studio da parte dei cultori della Teoria dei Numeri ed é utilizzata anche per la valutazione di certe serie numeriche.

Accanto alla (11) consideriamo la funzione *zeta generalizzata*:

$$F(s,a)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(a+n)^s},\quad s>1,\quad a\geq 0. \tag{4.12}$$

Per $a=0$, riotteniamo la funzione ζ, cioé $F(s,0)=\zeta(s)$. Sussiste il seguente:

Teorema 45 *Per ogni* $s>1,\quad a\geq 0$, *risulta:*

$$F(s,a)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}\ x^{s-1}}{e^x-1}dx. \tag{4.13}$$

Dimostrazione Con la sostituzione $x=(a+n)t$, otteniamo, per ogni $n=1,2,\ldots,$:

$$\frac{1}{(a+n)^s}\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-(a+n)x}x^{s-1}dx$$

Ora:

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(a+n)^s} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(a+n)x}x^{s-1}dx\\ &= \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-(a+n)x}x^{s-1}dx\\ &= \int_0^{+\infty}e^{-ax}\ x^{s-1}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}dx,\end{aligned}$$

dove l'integrazione per serie dipende dal teorema di Beppo-Levi della convergenza monotona, applicato alla successione delle somme parziali della serie $\sum e^{-(a+n)x}x^{s-1}$. Dalla relazione precedente segue allora:

$$F(s,a)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}\ x^{s-1}}{e^x-1}dx. \tag{4.14}$$

In particolare otteniamo:

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx.$$

ESEMPIO *Calcolare* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}, \quad s > 1.$

Soluzione Si ha:

$$\begin{aligned} 2^{-s}\zeta(s) &= \frac{1}{2^s}\left\{1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots\right\} \\ &= \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots \end{aligned}$$

da cui segue:

$$\zeta(s) - 2^{-s}\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

Chapter 5

Equazioni integrali

5.1 Il teorema del punto fisso di Banach

Siano X, Y spazi metrici e sia $D \subset X$. Per operatore $A : D \rightarrow Y$ intendiamo qui un'applicazione di D in Y. Indicheremo con Ax il valore che l'operatore A assume in x. L'insieme D é detto il *dominio* di A.

ESEMPI

(a) Sia $X = C[a, b]$, lo spazio delle funzioni continue definite in $[a, b]$ e a valori reali. L'operatore:

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)\ x(s)ds,$$

dove $K(t, s)$ é una funzione continua nel quadrato $[a, b] \times [a, b]$, é un *operatore integrale* e mostreremo piú tardi che $Ax \in C[a, b]$, cioé $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$.

(b) Sia $X = C^\infty[a, b]$ lo spazio delle funzioni infinitamente derivabili in $[a, b]$, con la metrica indotta da $C[a, b]$. L'operatore $Dx(t) = x'(t)$ é un *operatore di derivazione* e $D : C^\infty \rightarrow C^\infty$.

Teorema 46 *(Banach) Sia X uno spazio metrico completo con metrica d; sia $A : X \rightarrow X$ un operatore tale che esiste $\alpha \in]0, 1[$, che soddisfa alla:*

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha\ d(x, y), \tag{5.1}$$

per ogni $x, y \in X$. Allora esiste un unico punto $x_0 \in X$ tale che $Ax_0 = x_0$.

Dimostrazione Fissiamo un elemento $\overline{x} \in X$. Poniamo poi successivamente:

$$x_1 = A\overline{x}, \quad x_2 = Ax_1, \quad x_n = Ax_{n-1}, \quad \dots,$$

Proviamo che la successione $\{x_n\}$ é di Cauchy. A tale scopo osserviamo che:

$$d(x_1, x_2) = d(A\overline{x}, Ax_1) \leq \alpha\ d(\overline{x}, x_1) = \alpha\ d(\overline{x}, A\overline{x})$$
$$d(x_2, x_3) = d(Ax_1, Ax_2) \leq \alpha\ d(x_1, x_2) \leq \alpha^2\ d(\overline{x}, A\overline{x})$$

ed in generale $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n\ d(\overline{x}, A\overline{x})$.
Inoltre:

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\
&\leq \alpha^n(1 + \alpha\ + \cdots + \alpha^{p-1})d(\overline{x}, A\overline{x}) = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\ d(\overline{x}, A\overline{x}) \\
&< \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\ d(\overline{x}, A\overline{x}).
\end{aligned}$$

Siccome $0 < \alpha < 1$, passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, si ottiene l'asserto. Dalla completezza di X esiste $x_0 \in X$ tale che $x_0 = lim_{n\rightarrow+\infty} x_n$, cioé $d(x_n, x_0) \rightarrow 0$. Dunque dalla relazione:

$$\begin{aligned}
d(x_0, Ax_0) &\leq d(x_0, x_n) + d(x_n, Ax_0) \\
&= d(x_0, x_n) + d(Ax_{n-1}, Ax_0) \\
&\leq d(x_0, x_n) + \alpha\ d(x_{n-1}, x_0)
\end{aligned}$$

segue facilmente che $d(x_0, Ax_0) = 0$, da cui $x_0 = Ax_0$.
Resta da provare l'unicitá. A tale scopo, siano $x_0,\ y_0$ due elementi di X tali che $Ax_0 = x_0, \quad Ay_0 = y_0$. Allora:

$$d(x_0, y_0) = d(Ax_0, Ay_0) \leq \alpha\ d(x_0, y_0) < d(x_0, y_0).$$

La relazione precedente puó sussistere solo se $x_0 = y_0$. Il teorema é cosí completamente dimostrato.

Un operatore $A : X \rightarrow X$ che verifica (1) é detto *operatore di contrazione* ed il punto x_0 di cui si é provata l'esistenza si dice *punto fisso* di A. Dalla relazione:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\ d(\overline{x}, A\overline{x}),$$

passando al limite per $p \to +\infty$, si ottiene:

$$d(x_0, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(\overline{x}, A\overline{x}), \quad \forall n \in I\!N. \tag{5.2}$$

La (2) fornisce la stima dell'errore dell'approssimazione n-esima x_n del punto fisso x_0. Dalla (2) é chiaro che la scelta del punto $\overline{x}$ incide unicamente sulla velocitá di convergenza.

OSSERVAZIONE La condizione (1) non puó essere sostituita con quella piú debole

$$d(Ax, Ay) \leq d(x, y);$$

(in questo caso A si dice *non espansivo*). Basta scegliere per esempio $X = I\!R$, $d(x,y) = |x-y|$, $Ax = \pi/2 + x - arctgx$. Infatti risulta:

$$\begin{aligned} d(Ax, Ay) &= |Ax - Ay| = |x - y - (arctgx - arctgy)| \\ &= |x - y - \frac{x-y}{1+\xi^2}| = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}|x-y| < |x-y|, \end{aligned}$$

con $\xi \in]x, y[$. Tuttavia $Ax \neq x$, per ogni $x \in I\!R$.

Se $A : X \to X$, allora per ogni $x \in X$, é determinato $Ax \in X$. Dunque possiamo applicare A ancora sull'elemento Ax, cioé possiamo calcolare $A(Ax)$. Questo dá luogo all'operatore A^2 definito dalla $A^2x = A(Ax)$. Essendo ora $A(Ax) \in X$ ha senso applicare ancora A, e cosí proseguendo possiamo definire l'operatore A^n ponendo $A^n = A \circ A^{n-1}$, per ogni $n \in I\!N$. Sussiste la seguente importante variante del teorema 46:

Teorema 47 *Sia $A : X \to X$ un operatore, con X spazio metrico completo, tale che A^n sia di contrazione per qualche $n \in I\!N$. Allora l'operatore A ammette un unico punto fisso.*

Dimostrazione Omessa.

5.2 Applicazioni alle equazioni integrali di Fredholm

Consideriamo l'equazione integrale non omogenea:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\ \varphi(s)ds + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{5.3}$$

detta *equazione integrale di Fredholm di seconda specie*; qui λ é un parametro reale o complesso, φ é la funzione incognita, f e K sono funzioni note. La funzione $K(t,s)$ si dice *nucleo* dell'equazione.
Supponiamo che K sia una funzione continua nel quadrato $[a,b]\times[a,b]$, e che $f \in C[a,b]$. Ogni funzione $\varphi_0 \in C[a,b]$ che sostituita nella (3) la trasforma in una identitá, cioé:

$$\varphi_0(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\ \varphi_0(s)ds + f(t), \ \ \forall t \in [a,b],$$

si dice *soluzione* dell'equazione. É ovvio che per $\lambda = 0$ la (3) ha l'unica soluzione $\varphi_0 = f$. Proviamo ora il seguente:

Teorema 48 *Posto* $M = max_Q|K(t,s)|, \quad Q = [a,b]\times[a,b],$ *l'equazione integrale (3), con le ipotesi precedenti su* $K,\ f$*, ha un'unica soluzione, per ogni valore di* λ *tale che* $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$.

Dimostrazione Applicheremo il teorema del punto fisso nella forma espressa dal teorema 46. Consideriamo l'operatore $A : C[a,b]\to C[a,b]$ definito dalla legge:

$$A\varphi = \lambda \int_a^b K(t,s)\ \varphi_(s)ds + f(t), \ \ \varphi \in C[a,b], \ \ t \in [a,b].$$

Il problema dell'esistenza di una soluzione equivale a quello di trovare un punto fisso di A. Proviamo anzitutto che effettivamente $A\varphi \in C[a,b], \ \ \varphi \in C[a,b]$.
A tale scopo, dato t, consideriamo un incremento $t + \Delta t \in [a,b]$. Risulta:

$$\begin{aligned} &|A\varphi(t) - A\varphi(t+\Delta t)| \\ &\le |\lambda| \int_a^b |K(t+\Delta t, s) - K(t,s)||\varphi(s)|ds + |f(t+\Delta t) - f(t)|. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Sia ora $\varepsilon > 0$. Per l'uniforme continuitá di K in Q, e dalla continuitá di f esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, se $|\Delta t| < \delta_\varepsilon$, si ha:

(i) $|K(t+\Delta t, s) - K(t,s)| < \dfrac{\varepsilon}{2\|\varphi\|_{C[a,b]}(b-a)|\lambda|}, \quad \forall s \in [a,b],$

(ii) $|f(t+\Delta t) - f(t)| < \varepsilon/2.$

Dalle (i), (ii) e (4) otteniamo allora $|A\varphi(t) - A\varphi(t+\Delta t)| < \varepsilon$, cioé $A\varphi \in C[a,b]$.
Verifichiamo ora che se $|\lambda| < 1/M(b-a)$, allora A é di contrazione rispetto alla metrica di $C[a,b]$. Si ha:

$$\begin{aligned} d(A\varphi_1, A\varphi_2) &= max_{a\le t\le b}|A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)| \\ &\le |\lambda|M(b-a)max_{a\le t\le b}|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \\ &= |\lambda|M(b-a)d(\varphi_1,\varphi_2). \end{aligned}$$

Essendo $|\lambda|M(b-a) < 1$, l'operatore A é di contrazione e quindi l'asserto segue dal teorema 46.

Le approssimazioni successive $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots$, sono date dalle relazioni:

$$\varphi_{n+1}(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)\ \varphi_n(s)ds + f(t), \quad t \in [a,b], \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{5.5}$$

ESEMPIO *Risolvere l'equazione integrale:*

$$\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\ \varphi(s)ds.$$

Soluzione Il nucleo $K(t,s) = ts$ é continuo nel quadrato $Q = [0,1]\times[0,1]$ e $M = 1$. Ora poiché $\lambda = 1/2$, e $1/M(b-a) = 1$, é possibile applicare il teorema 48. Le approssimazioni successive possono essere costruite a partire per esempio dalla funzione $\varphi_0 = 0$, per ogni $t \in [0,1]$. Allora dalla (5) si ha:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) = \frac{5}{6}t, \quad \varphi_2(t) = \frac{5}{6}t + \frac{t}{2}\int_0^1 \frac{5}{6}\ s^2 ds = \frac{5}{6}t[1+\frac{1}{6}], \\ &\varphi_3(t) = \frac{5}{6}t + \frac{t}{2}\int_0^1 \frac{5}{6}s^2(1+1/6)ds = \frac{5}{6}t(1+1/6+1/6^2), \\ &\varphi_n(t) = \frac{5}{6}t(1+1/6+1/6^2+\ldots+1/6^{n-1}) = t(1-1/6^n). \end{aligned}$$

La soluzione é allora $\varphi(t) = lim_{n\to+\infty}\varphi_n(t) = t$.
Si osservi che se avessimo posto $\varphi_0(t) = t$, allora avremmo ottenuto $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \ldots = t$.

Torniamo ora all'equazione (3), ancora sotto le condizioni di continuitá per K, f. Cercheremo peró le soluzioni nello spazio $L^2[a,b]$ con la metrica:

$$d_2(x,y) = \left\{\int_a^b |x(t)-y(t)|^2 dt\right\}^{1/2}, \quad x,\ y \in L^2[a,b].$$

Mostreremo che usando questa metrica, si trova un insieme piú ampio di valori di λ che danno la risolubilitá dell'equazione. Il lemma seguente mostra che, nelle ipotesi dette, tra tutte le funzioni in $L^2[a,b]$ solo le funzioni continue possono essere soluzioni.

Lemma 6 *Per ogni* $x \in L^2[a,b]$, *la funzione* $y(t) = \int_a^b K(t,s)\ x(s)ds$ *é continua in* $[a,b]$.

Dimostrazione Sia $t_0 \in [a,b]$. Poiché $K(t,s)$ é uniformemente continua in $[a,b]\times[a,b]$, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $t \in [a,b]$ con $|t-t_0| < \delta_\varepsilon$ e per ogni $s \in [a,b]$, si ha $|K(t,s) - K(t_0,s)| < \varepsilon$. Quindi, adoperando la disuguaglianza di Hölder in $L^2[a,b]$, (cfr. Cap.1) otteniamo:

$$|y(t) - y(t_0)| \le \varepsilon \int_a^b |x(s)|ds \le \varepsilon\sqrt{b-a}\left\{\int_a^b |x(s)|^2 ds\right\}^{1/2}.$$

Da questo segue subito l'asserto.

In virtú del lemma 6, si ha $A : L^2[a,b]\to C[a,b] \subset L^2[a,b]$. Poniamo:

$$B = \left\{\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 dsdt\right\}^{1/2} \equiv \|K\|_{L^2}.$$

Sussiste il seguente:

Teorema 49 *L'operatore integrale:*

$$A\varphi = \lambda\int_a^b K(t,s)\ \varphi(s)ds + f(t),$$

con $K \in C([a,b]\times[a,b])$, $f \in C[a,b]$, *ha un unico punto fisso nello spazio* $L^2[a,b]$ *per ogni* λ *tale che* $|\lambda| < B^{-1}$. *Tale punto fisso é una funzione continua ed é soluzione, in* L^2, *dell'equazione integrale (3).*

Dimostrazione Poiché $L^2[a,b]$ é completo, basta provare che A é di contrazione rispetto alla metrica d_2. Ora se $\varphi_1,\ \varphi_2 \in L^2[a,b]$ si ha:

$$A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\ [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]ds,$$

e per la disuguaglianza di Hölder ($p = 2$) otteniamo:

$$[A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t)]^2 \leq \lambda^2 \left\{ \int_a^b K^2(t,s)ds \right\} \cdot \left\{ \int_a^b [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]^2 ds \right\}.$$

Integrando rispetto a t, si ha:

$$\int_a^b [A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t)]^2 dt \leq \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K^2(t,s)\ dsdt \int_a^b [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]^2 ds;$$

da questo segue che $d_2^2(A\varphi_1, A\varphi_2) \leq \lambda^2 B^2 d_2^2(\varphi_1, \varphi_2)$, e quindi:

$$d_2(A\varphi_1, A\varphi_2) \leq |\lambda| B d_2(\varphi_1, \varphi_2),$$

con $|\lambda| B < 1$.

Osserviamo che $B < M(b-a)$ e quindi l'insieme dei valori di λ tali che $|\lambda| < B^{-1}$ é piú grande dell'insieme $|\lambda| < 1/M(b-a)$.
Nell'esempio precedente si ha $B = 1/3$, e la soluzione esiste per ogni $|\lambda| < 3$. Osserviamo tuttavia che se $1/M(b-a) < |\lambda| < B^{-1}$, le approssimazioni successive φ_n convergono in L^2 alla soluzione ed in generale **non uniformemente** .
Sussiste anche il seguente:

Teorema 50 *Sia* $K \in L^2([a,b] \times [a,b])$, $f \in L^2[a,b]$. *Allora se* $|\lambda| < B^{-1}$, *l'equazione (3) ha un'unica (a meno di insiemi di misura nulla) soluzione in* $L^2[a,b]$ *(non necessariamente continua)*

Dimostrazione Omessa.

Cerchiamo ora una rappresentazione integrale della soluzione dell'equazione (3), limitandoci a considerare il caso continuo, cioé supporremo sempre che il nucleo dell'equazione (3) sia una funzione continua in $Q = [a,b] \times [a,b]$, e

che $f \in C[a,b]$.
A tale scopo, poniamo:

$$T\varphi = \int_a^b K(t,s)\ \varphi(s)ds, \quad \varphi \in C[a,b].$$

É possibile dimostrare il seguente:

Teorema 51 *Posto* $M = max_Q|K(t,s)|$, *per ogni* λ *tale che* $|\lambda| < 1/M(b-a)$, *la serie di funzioni:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k T^k f$$

é uniformemente convergente in Q *e la funzione:*

$$\varphi = f + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k T^k f \tag{5.6}$$

é soluzione dell'equazione integrale (3).

Dimostrazione La dimostrazione si basa su alcuni risultati della teoria degli operatori in spazi astratti, che qui non trattiamo. Osserviamo soltanto che la serie nella (6) si chiama *serie di Neumann.*

Studiamo ora in maggior dettaglio la soluzione (6). Nel seguito supporremo sempre che $|\lambda| < 1/M(b-a)$. Cominciamo con il calcolare le potenze dell'operatore T. Si ha:

$$\begin{aligned} T^2 f(t) &= T(Tf)(t) = \int_a^b K(t,s) \left\{ \int_a^b K(s,\tau)\ f(\tau)d\tau \right\} ds \\ &= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t,s)\ K(s,\tau)ds \right\}\ f(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Poniamo

$$\int_a^b K(t,s)\ K(s,\tau)ds \equiv K_2(t,\tau).$$

La funzione K_2 si chiama *nucleo iterato del secondo ordine* oppure *seconda iterazione* del nucleo K. Poniamo anche $K_1 = K$. Dunque:

$$T^2 f(t) = \int_a^b K_2(t,s)\ f(s)ds.$$

Analogamente si ha:

$$T^3 f(t) = T(T^2 f)(t) = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t,s)\ K_2(s,\tau) ds \right\} f(\tau) d\tau = \int_a^b K_3(t,s)\, f(s) ds,$$

dove

$$K_3(t,\tau) = \int_a^b K(t,s)\ K_2(s,\tau) ds.$$

In generale posto $K_n(t,\tau) = \int_a^b K(t,s)\ K_{n-1}(s,\tau) ds$, si ha:

$$T^n f(t) = \int_a^b K_n(t,s)\ f(s) ds. \tag{5.7}$$

Inoltre dal fatto che $T^{n+p} = T^n \circ T^p = T^p \circ T^n$ segue che:

$$K_{n+p}(t,s) = \int_a^b K_n(t,\tau)\ K_p(\tau,s) d\tau = \int_a^b K_p(t,\tau)\ K_n(\tau,s) d\tau. \tag{5.8}$$

Notiamo che tutti i nuclei iterati sono continui.
Introducendo le (7) nella (6) otteniamo:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(t) + \lambda \int_a^b K_1(t,s)\ f(s) ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(t,s)\ f(s) ds + \ldots \quad (5.9) \\ &+ \lambda^n \int_a^b K_n(t,s)\ f(s) ds + \ldots \end{aligned}$$

e la serie a secondo membro della (9) é uniformemente convergente per $|\lambda| < 1/M(b-a)$.
Vogliamo ora scrivere la soluzione φ in una conveniente forma integrale, che in qualche modo richiami l'equazione stessa. A tale scopo sussiste il seguente:

Lemma 7 *La serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1}\ K_n(t,s)$$

é uniformemente convergente in Q, per ogni λ con $|\lambda| < 1/M(b-a)$.

Dimostrazione É facile mostrare per induzione che risulta:

$$|K_n(t,s)| \leq M^n (b-a)^{n-1}$$

da cui $|\lambda|^{n-1} M^n (b-a)^{n-1} \equiv M q^{n-1}$, dove $q = |\lambda| M(b-a) < 1$. La serie é allora totalmente e quindi uniformemente convergente.

Poniamo ora

$$R(t,s;\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1}\ K_n(t,s),$$

con $(t,s) \in Q$ e $|\lambda| < 1/M(b-a)$. La funzione R si chiama la *risolvente* del nucleo K.
Integrando termine a termine otteniamo l'espressione integrale per la soluzione φ :

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t,s;\lambda)\ f(s)ds, \tag{5.10}$$

che formalmente é analoga all'equazione integrale stessa.

Diamo ora alcune proprietá della risolvente.

1. $R(t,s;\lambda)$ é una funzione analitica di $\lambda \in \mathbb{C}$ sul cerchio $|\lambda| < 1/M(b-a)$, per ogni fissato $(t,s) \in Q$. Basta osservare che $R(t,s;\lambda)$ é la somma di una serie di potenze in λ convergente nel cerchio suddetto.

2. La risolvente $R(t,s;\lambda)$ verifica l'equazione funzionale:

$$R(t,s;\lambda+\mu) = R(t,s;\mu) + \lambda \int_a^b R(t,\tau;\mu)\ R(\tau,s;\lambda+\mu)d\tau. \tag{5.11}$$

3. $\dfrac{\partial}{\partial\lambda} R(t,s;\lambda) = \displaystyle\int_a^b R(t,\tau;\lambda)\ R(\tau,s;\lambda)d\tau.$

ESEMPIO *Mediante il metodo della risolvente, determinare la soluzione dell'equazione integrale:*

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 ts\ \varphi(s)ds + f(t), \quad |\lambda| < 1$$

dove $f \in C[0,1]$, é una funzione assegnata.
Soluzione In tal caso $K(t,s) = ts$, $a = 0$, $b = 1$, ed inoltre $M = max_Q|K(t,s)| = 1$, $Q = [0,1] \times [0,1]$.

Troviamo successivamente:

$$\begin{aligned}
&K_1(t,s) = K(t,s) = ts \\
&K_2(t,s) = \int_0^1 t\tau\tau s d\tau = ts/3, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&K_n(t,s) = \frac{ts}{3^{n-1}}
\end{aligned}$$

Allora

$$R(t,s;\lambda) = ts\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda/3)^n = \frac{3ts}{3-\lambda}, \quad |\lambda| < 3.$$

Si osservi che la serie che definisce la risolvente converge per un insieme di valori di λ molto piú ampio di quello richiesto dalla limitazione adottata $|\lambda| < 1/M(b-a)$.

In alcuni casi particolari la formula (10) dá la soluzione dell'equazione *per ogni* valore di λ. Ció avviene, ad esempio, se il nucleo $K(t,s)$ verifica la proprietá: $K_2(t,s) = 0, \quad \forall(t,s) \in Q = [a,b] \times [a,b]$. In tal caso $K_n(t,s) = 0, \quad \forall(t,s) \in Q \quad \forall n \geq 2$. Cosí si ha $R(t,s;\lambda) = K(t,s)$. I nuclei K per i quali $K_2 = 0$ si dicono *ortogonali a se stessi.* Ad esempio il nucleo $K(t,s) = \sin t \cos s, \quad (t,s) \in [0,\pi] \times [0,\pi]$, é ortogonale a se stesso.
In generale due nuclei $K(t,s), \quad L(t,s)$ si dicono *ortogonali* se risulta:

$$\int_a^b K(t,\tau)\ L(\tau,s)d\tau = 0; \int_a^b L(t,\tau)\ K(\tau,s)d\tau = 0,$$

per ogni $(t,s) \in Q = [a,b] \times [a,b]$. Se é verificata una sola delle due condizioni precedenti i nuclei $K, \ L$ si dicono *semiortogonali.*

5.3 L'equazione integrale di Volterra

L'equazione integrale di Volterra é un'equazione del tipo:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\ \varphi(s)ds + f(t). \tag{5.12}$$

Essa puó essere riguardata come un caso particolare dell'equazione di Fredholm di seconda specie ponendo $K(t,s) = 0$, se $s > t$. Tuttavia in tal

caso non si puó assicurare la continuiá del nucleo in tutto il quadrato $Q = [a, b] \times [a, b]$. Inoltre ció che differenzia maggiormente l'equazione (12) dalla (3), é che per la (12) il principio delle contrazioni é assicurato *per ogni valore di* λ.
Supponiamo che $f \in C[a, b]$, $K(t, s)$ sia continuo nel triangolo $\Delta = \{(t, s) \in Q : a \leq t \leq b;\ a \leq s \leq t\}$.
Introduciamo l'operatore:

$$A\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)\ \varphi(s) ds + f(t). \tag{5.13}$$

É facile osservare che $A\varphi \in C[a, b]$, per ogni $\varphi \in C[a, b]$. Proviamo ora il seguente

Teorema 52 *Sotto le condizioni stabilite per f, K l'equazione di Volterra ha una ed una sola soluzione in $C[a, b]$, per ogni valore di λ.*

Dimostrazione Siano φ_1, $\varphi_2 \in C[a, b]$. Allora é facile vedere che:

$$|A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)| \leq |\lambda| M \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C[a,b]}(t - a) \tag{5.14}$$

dove $M = max_{\Delta}|K(t, s)|$, e se g é una generica funzione in $C[a, b]$, poniamo, come al solito, $\|g\|_{C[a,b]} = max_{t\in[a,b]}|g(t)|$.
Dalla (14) segue anche che, posto $d(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C[a,b]}$:

$$|A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)| \leq |\lambda| M d(\varphi_1, \varphi_2)\ (b - a),$$

per ogni $t \in [a, b]$. Dato allora $\varepsilon > 0$, se $d(\varphi_1, \varphi_2) < \varepsilon/|\lambda|M(b-a)$, otteniamo $|A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)| < \varepsilon$, cioé la *continuitá* dell'operatore A.
Usando la (14) otteniamo successivamente:

$$|A^n\varphi_1(t) - A^n\varphi_2(t)| \leq |\lambda|^n \frac{M^n\ (t - a)^n}{n!}\ d(\varphi_1, \varphi_2),\ \forall t \in [a, b]. \tag{5.15}$$

Dalla (15) segue anche:

$$d(A^n\varphi_1, A^n\varphi_2) \leq \frac{|\lambda|^n\ M^n\ (b - a)^n}{n!}\ d(\varphi_1, \varphi_2). \tag{5.16}$$

Fissato ora un λ arbitrario in $\mathbb{C}$, esiste un $\overline{n}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$, risulta:

$$\frac{|\lambda|^n\ M^n\ (b - a)^n}{n!} < 1,$$

e quindi per n sufficientemente grande A^n é di contrazione. Per il teorema 47 A possiede allora un unico punto fisso, che é anche la soluzione dell'equazione (12).

Questa soluzione puó essere trovata col metodo delle approssimazioni successive. Scelta $\varphi_0 \in C[a,b]$, definiamo successivamente:

$$\varphi_{n+1}(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\ \varphi_n(s)ds + f(t), \quad n = 0,1,2,\dots \tag{5.17}$$

La successione $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente, nelle ipotesi del teorema 52.

ESEMPIO *Risolvere l'equazione integrale:*

$$\varphi(t) = t - \int_0^t (t-s)\ \varphi(s)ds$$

Soluzione In tal caso é $f(t) = t, \quad K(t,s) = t - s, \ (s < t)$. Tali funzioni sono continue e quindi per il teorema 52 esiste un'unica soluzione continua. Posto per esempio $\varphi_0(t) = 0, \quad \forall t$, dalla (17) otteniamo successivamente:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t) = t, \quad \varphi_2(t) = t - \int_0^t (t-s)\ sds = t - \frac{t^3}{3!},\\
&\varphi_3(t) = t - \int_0^t (t-s)\ (s - \frac{s^3}{3!})ds = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!},\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_n(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}.
\end{aligned}$$

La soluzione é allora $\varphi(t) = sin\ t$.

Analogamente a quanto fatto per l'equazione integrale di Fredholm, é possibile determinare una rappresentazione integrale della soluzione dell'equazione (12), utilizzando la risolvente. Siccome il nucleo K dell'equazione di Volterra puó essere esteso a tutto il quadrato $Q = [a,b]\times[a,b]$, ponendo $K(t,s) = 0$ per $s > t$, i nuclei iterati vengono definiti nel modo seguente:

$$K_1(t,s) = K(t,s), \ K_n(t,s) = \int_s^t K(t,\tau)\ K_{n-1}(\tau,s)d\tau, \ n \geq 2. \tag{5.18}$$

Supponiamo come al solito che K sia continuo nel triangolo Δ e che $f \in C[a,b]$. Posto $M = max_{\Delta}|K(t,s)|$, otteniamo facilmente:

$$|K_n(t,s)| \leq \frac{M^n \ (t-s)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{5.19}$$

Allora la serie:

$$R(t,s;\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} K_n(t,s),$$

é uniformemente convergente in Q per ogni fissato valore di $\lambda \in \mathbb{C}$ la cui somma pertanto rappresenta una funzione continua di (t,s) in Δ. La funzione R si chiama *risolvente di Volterra* del nucleo K.
Integrando termine a termine si ottiene la seguente rappresentazione integrale della soluzione:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t R(t,s;\lambda) \ f(s)ds. \tag{5.20}$$

ESEMPIO *Mediante la risolvente trovare la soluzione dell'equazione di Volterra*:

$$\varphi(t) = e^t + \int_0^t e^{t-s} \ \varphi(s)ds$$

Soluzione In tal caso é $K(t,s) = e^{t-s}, \ a = 0, \ \lambda = 1$. Si ha:

$$\begin{aligned} &K_2(t,s) = e^{t-s} \ (t-s), \\ &K_3(t,s) = e^{t-s} \ \frac{(t-s)^2}{2!}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &K_n(t,s) = \frac{e^{t-s} \ (t-s)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

La risolvente é data allora dalla funzione:

$$R(t,s;1) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{t-s} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{2(t-s)}$$

e quindi la soluzione dell'equazione data é:

$$\varphi(t) = e^t + \int_0^t e^{2(t-s)} \ e^s ds = e^{2t}$$

OSSERVAZIONE L'operatore di Volterra (13) é caratterizzato dal fatto che il valore della funzione $A\varphi$ in t, é determinato dai valori di φ calcolati per $s \leq t$. Su questo fatto si basa la grande utilitá della teoria delle equazioni integrali di Volterra in modelli matematici che descrivono fenomeni che, nella loro evoluzione, "ricordano" il proprio passato, cioé che tengono conto della propria "storia". La presenza della funzione f sta a significare l'azione di una forza esterna, come puó essere una perturbazione del fenomeno stesso.

Fino ad ora abbiamo supposto K, f funzioni continue in Δ e $[a,b]$ rispettivamente. Supponiamo ora $K \in L^2(Q)$, $Q = [a,b] \times [a,b]$ cioé :

$$\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 \, dtds = B < +\infty,$$

e supponiamo $f \in L^2[a,b]$. Allora si ha il seguente:

Teorema 53 *Nelle ipotesi sopra dette l'equazione integrale di Volterra:*

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t,s) \; \varphi(s) ds + f(t), \quad a \leq t \leq b,$$

ammette una soluzione $\varphi \in L^2[a,b]$ (univocamente determinata a meno di insiemi di misura nulla), per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimosrazione La dimostrazione é omessa. Osserviamo soltanto che la soluzione é ancora definita dalla formula:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t R(t,s;\lambda) \; f(s) ds + f(t),$$

dove la risolvente é ancora definita dalla:

$$R(t,s;\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} \; K_n(t,s). \tag{5.21}$$

In tal caso peró la serie nella (21) converge quasi ovunque in Q.

Infine, se $|K(t,s)| \leq M$, per qualche $M > 0$ e se $f \in L^1[a,b]$, allora é possibile determinare una soluzione in L^1 (unica a meno di insiemi di misura nulla). Occorre osservare che se si ricercano soluzioni φ non sommabili, le soluzioni possono essere infinite.

5.4 Equazioni integrali non lineari

Consideriamo una equazione del tipo:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s, \varphi(s))\ ds + f(t), \tag{5.22}$$

dove $f,\ K$ sono funzioni continue nei loro argomenti, per $a \le t,\ s \le b,\ \ z \in I\!R$. La (22) si chiama *equazione integrale non lineare* e la funzione $K : [a, b] \times [a, b] \times I\!R \to I\!R$ é detta *nucleo* dell'equazione. Sussiste il seguente:

Teorema 54 *Se, oltre alle ipotesi fatte su f e K, la funzione $K(t, s, \cdot)$ é lipschitziana (rispetto alla terza variabile), uniformemente rispetto a $(t, s) \in Q = [a, b] \times [a, b]$, con costante di Lipschitz L, la (22) ammette un'unica soluzione continua, per ogni λ tale che $|\lambda| < 1/L(b - a)$.*

Dimostrazione Poniamo

$$A\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s, \varphi(s))\ ds + f(t).$$

Se $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C[a, b]$ si ha:

$$|A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)| \le |\lambda| L(b - a)\ max_{a \le s \le b} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|, \tag{5.23}$$

per ogni $t \in [a, b]$, da cui, posto $d(\varphi_1, \varphi_2) = max_{a \le s \le b} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|$, si ottiene:

$$d(A\varphi_1, A\varphi_2) \le |\lambda| L(b - a)\ d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Poiché $|\lambda| L(b - a) < 1$, l'operatore A é di contrazione e quindi é possibile applicare il teorema del punto fisso nella versione espressa dal teorema 46. Da questo segue subito l'asserto.

La soluzione puó essere ottenuta col metodo delle approssimazioni successive, secondo lo schema:

$$\varphi_{n+1} = \lambda \int_a^b K(t, s, \varphi_n(s))\ ds + f(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{5.24}$$

con $\varphi_0 \in C[a, b]$ arbitrariamente scelta.

ESEMPIO *Risolvere l'equazione integrale*:

$$\varphi(t) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{ts}{1+\varphi^2(s)}\ ds + 1.$$

Soluzione La funzione $K(t,s,z) = ts/(1+z^2)$ é continua globalmente in $[-1,1]\times[-1,1]\times I\!R$ ed inoltre rispetto a z é lipschitziana con costante 1, poiché si ha:

$$\left|\frac{\partial K}{\partial z}\right| = \left|\frac{2tsz}{(1+z^2)^2}\right| \le 1,$$

per ogni $(t,s) \in [-1,1]\times[-1,1]$, $z \in I\!R$. Essendo $\lambda = 1/3$, $1/L(b-a) = 1/2$, l'equazione ammette una sola soluzione continua. Costruiamo le approssimazioni successive prendendo $\varphi_0(t) = 1$, $\forall t \in [-1,1]$. Otteniamo:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{ts}{2}\ ds + 1 = 1,$$

da cui é ovvio che $\varphi_n(t) = 1$, $\forall n \in I\!N$, e la soluzione é in effetti proprio φ_0. Si puó osservare poi che $\varphi_0 = 1$ é soluzione *per ogni* λ.

5.5 Uso delle trasformate integrali

Consideriamo qui l'equazione integrale di Fredholm di *tipo convolutivo*:

$$\varphi(t) = \mu\int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s)\ \varphi(s)ds + f(t) \tag{5.25}$$

dove μ é una costante complessa. Supponiamo che $K,\ \varphi,\ f \in L^1(I\!R)$. Procedendo per ora formalmente, applichiamo ad ambo i membri della (25) la trasformata di Fourier. Usando il teorema di convoluzione (cfr. teor.25 del Cap.2) otteniamo:

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \mu\sqrt{2\pi}\widehat{K}(\lambda)\ \widehat{\varphi}(\lambda) + \hat{f}(\lambda). \tag{5.26}$$

Dalla (26) ricaviamo:

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \frac{\hat{f}(\lambda)}{1-\mu\sqrt{2\pi}\widehat{K}(\lambda)}, \quad \text{se } 1-\mu\sqrt{2\pi}\widehat{K}(\lambda) \ne 0,\ \forall\lambda \in I\!R.$$

Allora la soluzione puó essere formalmente scritta usando la formula di inversione:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(\lambda)}{1 - \mu\sqrt{2\pi}\widehat{K}(\lambda)} \; e^{i\lambda t} d\lambda. \tag{5.27}$$

Ció ha un senso se per esempio la funzione $\hat{f}(\lambda)\ [1 - \mu\sqrt{2\pi}\widehat{K}(\lambda)]^{-1} \in L^1(I\!R)$. In tal caso la (27) é la soluzione in $L^1(I\!R)$dell'equazione (25). É possibile mostrare che se $f \in L^2(I\!R),\ \ K \in L^1(I\!R)$ e se $\mu\sqrt{2\pi}\widehat{K}(\lambda) \neq 1,\ \ \forall\lambda,$ allora la (27) é l'unica soluzione della (25) (a meno di insiemi di misura nulla).

Consideriamo ora l'equazione di Volterra di tipo convolutivo:

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^t K(t-s)\ \varphi(s) ds + f(t). \tag{5.28}$$

Supponiamo che le funzioni $K,\ f,\ \varphi \in L^1_{loc}(I\!R)$ siano di tipo esponenziale (cfr. Cap.3). Applicando la trasformata di Laplace alla (28) otteniamo, per ogni z con $Re\ z$ sufficientemente grande:

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(z) = \lambda\ \mathcal{L}\{K\}(z) \cdot \mathcal{L}\{\varphi\}(z) + \mathcal{L}\{f\}(z), \tag{5.29}$$

da cui segue:

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(z) = \frac{\mathcal{L}\{f\}(z)}{1 - \lambda\ \mathcal{L}\{K\}(z)}.$$

É possibile mostrare che $\mathcal{L}\{\varphi\}$ é analitica nel semipiano $Re\ z > \nu$ dove $\nu = max\{\sigma(K), \sigma(f)\}$ essendo $\sigma(K),\ \ \sigma(f)$ rispettivamente le ascisse di convergenza di K ed f. Usando una formula di inversione si ottiene:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{\mathcal{L}\{f\}(z)}{1 - \lambda\ \mathcal{L}\{K\}(z)} e^{zt} dz, \quad Re\ z > \nu \tag{5.30}$$

che é la soluzione dell'equazione (28). Nella pratica, si evita di adoperare la (30), ricorrendo ad opportuni artifici, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO *Risolvere l'equazione integrale*:

$$\varphi(t) = t + \int_0^t sin\ (t-s)\ \ \varphi(s) ds.$$

Soluzione Essendo $\mathcal{L}\{t\}(z) = 1/z^2$, $\mathcal{L}\{sin\ t\}(z) = 1/(1+z^2)$, l'equazione si trasforma nella:

$$\Phi(z) = z^{-2} + (1+z^2)^{-1}\ \Phi(z),$$

ove si é posto $\Phi = \mathcal{L}\{\varphi\}$. Dalla precedente segue:

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4},$$

e quindi la soluzione é $\varphi(t) = t + t^3/3!$.

5.6 Esercizi

(a) *Risolvere le seguenti equazioni*:

1. $\varphi(t) = t3^t + \int_0^t 3^{t-s}\ \varphi(s)ds$

2. $\varphi(t) = sin\ t + 2\int_0^t e^{t-s}\ \varphi(s)ds$

3. $\varphi(t) = e^{t^2+2t} + 2\int_0^t e^{t^2-s^2}\varphi(s)ds$

4. $\varphi(t) = cos\ 2t + \int_0^{2\pi} sin\ t\ \ cos\ s\ \varphi(s)ds$

(b) *Trovare le risolventi di Volterra dei nuclei*:

$$K(t,s) = t-s,\quad K(t,s) = e^{t-s},\quad K(t,s) = \frac{1+t^2}{1+s^2}$$

Chapter 6

Cenni sulla teoria delle distribuzioni in $I\!R$.

6.1 Notazioni e definizioni

Indicheremo qui con $L^1_{loc}(I\!R)$ lo spazio di tutte le funzioni $f : I\!R \to I\!R$ localmente integrabili in $I\!R$ (vedi par.1 del Cap.3).Il *supporto* di una funzione f é l'insieme definito dalla:

$$supp\ f = \overline{\{x \in I\!R : f(x) \neq 0\}},$$

dove $\overline{A}$ indica la chiusura dell'insieme A.

Indichiamo con $\mathcal{D} \equiv C^\infty_c(I\!R)$ lo spazio di tutte la funzioni infinitamente derivabili con supporto compatto in $I\!R$. É immediato provare il seguente:

Teorema 55 *$\mathcal{D}$ é uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e moltiplicazioni per scalari.*

Per *operatore* intendiamo in generale ogni applicazione reale definita in uno spazio funzionale. Ad esempio ogni applicazione $T : \mathcal{D} \to I\!R$ é un operatore che associa ad ogni funzione $\varphi \in \mathcal{D}$ un ben determinato numero reale.

Un operatore $T : \mathcal{D} \to I\!R$ si dice *lineare* in $\mathcal{D}$, se

$$T(\alpha\ \varphi_1 + \beta\ \varphi_2) = \alpha\ T(\varphi_1) + \beta\ T(\varphi_2),$$

per ogni $\alpha,\ \beta \in I\!R$ e $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathcal{D}$.

É di fondamentale importanza introdurre un concetto di "continuitá" per un operatore T definito in $\mathcal{D}$. Per fare questo occorrerá definire preventivamente una "nozione di convergenza" in $\mathcal{D}$.

Sia $\{\varphi_n\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$ una successione in $\mathcal{D}$. Diremo che φ_n *converge a* φ_0 *in* $\mathcal{D}$ e scriveremo $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ in $\mathcal{D}$, se sono verificate le seguenti proprietá:

(i) Esiste un intervallo $[a, b] \subset I\!R$ tale che

$$supp\ \varphi_n \subset [a, b], \quad \forall n \in I\!N_0.$$

(ii) Per ogni $k = 0, 1, 2, \ldots,$ si ha:

$$\varphi_n^{(k)} \rightarrow \varphi_0^{(k)},$$

uniformemente (qui $\varphi_n^{(k)}$ rappresentano le derivate k-esime delle φ_n, con la posizione $\varphi_n^{(0)} = \varphi_n$).

Un operatore $T : \mathcal{D} \rightarrow I\!R$ si dice *continuo* in $\mathcal{D}$, se per ogni successione $\{\varphi_n\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$ tale che $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ in $\mathcal{D}$ si ha $T\varphi_n \rightarrow T\varphi_0$ in $I\!R$.

Definiamo *distribuzione* in $\mathcal{D}$ ogni operatore lineare continuo in $\mathcal{D}$.

6.2 Esempi fondamentali

(a) Sia $f \in L^1_{loc}(I\!R)$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, l'integrale:

$$\int_{I\!R} f(x)\varphi(x)dx = \int_K f(x)\varphi(x)dx, \quad K = supp\ \varphi \tag{6.1}$$

é ben definito e l'operatore $T_f : \mathcal{D} \rightarrow I\!R$ definito dalla:

$$T_f(\varphi) = \int_{I\!R} f(x)\varphi(x)dx, \tag{6.2}$$

é una distribuzione.

Dimostrazione Intanto é ovvio che (1) é ben definito, essendo φ a supporto compatto. Inoltre é anche facile verificare che T_f é lineare. Proviamo ora che T_f é anche continuo. Supponiamo che $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ e sia $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}$ tale che $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ in $\mathcal{D}$. Allora per la (i) esiste un intervallo $[a, b] \subset I\!R$ tale che $supp\ (\varphi_n - \varphi_0) \subset [a, b]$ e quindi:

$$|T_f(\varphi_n) - T_f(\varphi_0)| \leq sup_{x \in [a,b]} |\varphi_n(x) - \varphi_0(x)| \int_a^b |f(x)|dx. \tag{6.3}$$

Dato che per la (ii) $\varphi_n \to \varphi_0$ uniformemente e che $f \in L^1_{loc}(I\!R)$, il lato destro della (3) tende a 0 e quindi l'asserto.

Ogni distribuzione T della forma (2), cioé tale che $T = T_f$ per qualche $f \in L^1_{loc}(I\!R)$, si chiama *regolare*. É importante osservare che ogni distribuzione regolare T_f é determinata univocamente da f in $L^1_{loc}(I\!R)$. Cioé:

Teorema 56 *Sia* $f \in L^1_{loc}(I\!R)$. *Se risulta* $T_f(\varphi) = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, *allora* $f = 0$ *quasi ovunque in* $L^1_{loc}(I\!R)$.

In particolare si ha:

Corollario 9 *Se* $f_1,\ f_2 \in L^1_{loc}(I\!R)$, *e se* $f_1(x) \neq f_2(x)$, *per ogni* $x \in A$, *dove* A *é un insieme di misura positiva, allora esiste* $\varphi \in \mathcal{D}$, *tale che* $T_{f_1}(\varphi) \neq T_{f_2}(\varphi)$.

Le dimostrazioni dei risultati precedenti sono omesse.

Una conseguenza importante del teorema 56 é la possibilitá di identificare $f \in L^1_{loc}(I\!R)$ con la sua distribuzione T_f. É inoltre immediato verificare che:

$$T_{f_1+f_2} = T_{f_1} + T_{f_2}, \quad T_{\alpha\ f_1} = \alpha\ T_{f_1},$$

per ogni $f_1,\ f_2 \in L^1_{loc}(I\!R)$ ed $\alpha \in I\!R$.

Queste osservazioni mostrano che é possibile considerare $L^1_{loc}(I\!R)$ come un sottospazio dello spazio delle distribuzioni: quello delle distribuzioni regolari. In questo senso una distribuzione é un ente piú generale delle funzioni localmente sommabili.

Il prossimo esempio mostra che non tutte le distribuzioni sono regolari.

(b) *La distribuzione delta*

In questo esempio riprenderemo la distribuzione di Dirac, (distribuzione delta) da un punto di vista matematico, in una forma piú rigorosa.

Consideriamo l'operatore in $\mathcal{D}$ definito dalla:

$$T(\varphi) = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

É immediato provare che T é un operatore lineare e continuo in $\mathcal{D}$. Usualmente si pone $T = \delta_0$. La distribuzione δ_0 si chiama *delta di Dirac*. Questa distribuzione non é regolare nel senso che non esiste alcuna funzione $g \in L^1_{loc}(I\!R)$ tale che:

$$\int_{I\!R} g(x)\ \varphi(x)dx = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{6.4}$$

Infatti una funzione $g \in L^1_{loc}(I\!R)$ che verificasse (4) dovrebbe avere le seguenti proprietá:

(+) $g(x) = 0, \quad x \neq 0.$

(++) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1.$

É chiaro che (+) e (++) sono contraddittorie.
Piú in generale, se $x_0 \in I\!R$, si definisce la distribuzione:

$$\delta_{x_0} = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ovviamente anche per la distribuzione δ_{x_0} vale quanto appena detto per la delta di Dirac.
Tuttavia in molti campi della Scienza, specialmente in elettrotecnica, si adoperano formalmente funzioni con le proprietá (+) e (++), abusando notevolmente del concetto di funzione e della pazienza dei matematici i quali si sono dovuti adoperare non poco per giustificare teoricamente questo abuso. La sistemazione teorica di questo "dilatato" concetto di funzione é fornita proprio dalla teoria delle distribuzioni. Cosí, noi (matematici) chiameremo funzione ció che é funzione (le distribuzioni regolari) e distribuzione ció che non lo é (le distribuzioni non regolari).
Attraverso la distribuzione δ_{x_0}, $x_0 \in I\!R$, é possibile per esempio descrivere una successione di "impulsi": quella che i fisici chiamano "sampling function" é in realtá una distribuzione (non regolare) definita dalla (fig.1):

$$I\!I\!I(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n).$$

La "sampling function" fornisce informazioni sulla funzione φ in ogni intero n, ed é comunemente usata da fisici ed ingegneri elettronici, in elettrotecnica, nella teoria dei segnali ecc.

(c) *La distribuzione* $\mathcal{P}(1/x)$.

Figure 6.1: Sampling function

Facciamo prima alcune considerazioni.
Poniamo $f(x) = 1/x$. Allora come é noto $f \notin L^1_{loc}(I\!R)$ poiché ad esempio l'integrale di f in $]0,1]$ é $+\infty$. Tuttavia esiste l'integrale "valore principale":

$$(PV)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} f(x)dx.$$

Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, definiamo:

$$\mathcal{P}(1/x)(\varphi) = (PV)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right\} \frac{\varphi(x)}{x}dx. \qquad (6.5)$$

Dimostriamo che $\mathcal{P}(1/x)$ é ben definita.
Dato che $\varphi \in \mathcal{D}$ é differenziabile in $x = 0$, esiste una funzione ψ continua in $x = 0$ tale che:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x). \qquad (6.6)$$

Sia $[-a, a]$ un intervallo contenente il supporto di φ. Allora:

$$\begin{aligned} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx &= \int_{a\geq|x|\geq\varepsilon} \left\{ \frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x) \right\} dx \\ &= \int_{a\geq|x|\geq\varepsilon} \psi(x)dx + \int_{a\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}dx. \end{aligned}$$

Essendo

$$\int_{a\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}dx = 0,$$

passando al limite per $\varepsilon \longrightarrow 0$ otteniamo:

$$\mathcal{P}(1/x)(\varphi) = \int_{-a}^{a} \psi(x)dx < +\infty. \qquad (6.7)$$

L'operatore $\mathcal{P}(1/x)$ é ben definito ed é lineare. Per provare che é anche continuo dalla (7) abbiamo:

$$|\mathcal{P}(1/x)(\varphi)| \leq \int_{-a}^{a} |\psi(x)|dx \leq 2a\|\psi\|_\infty. \qquad (6.8)$$

Se allora $\varphi_n \in \mathcal{D}$, $\varphi_n \to \varphi_0$ in $\mathcal{D}$, ponendo nella (8) al posto di φ, $\varphi_n - \varphi_0$, ed indicate con ψ_n, ψ_0 le corrispondenti funzioni definite dalla (6), otteniamo:

$$|\mathcal{P}(1/x)(\varphi_n - \varphi_0)| \leq 2a \; max_K |\psi_n(x) - \psi_0(x)| \qquad (6.9)$$

dove K é un intervallo contenente tutti i supporti delle funzioni ψ_n, ψ_0. Ora si ha:

$$\psi_n(x) - \psi_0(x) = \frac{1}{x}\int_0^x [\varphi_n'(t) - \varphi_0'(t)]dx. \qquad (6.10)$$

Dato che $\varphi_n'(x) \to \varphi_0'(x)$ uniformemente, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $N(\varepsilon)$ tale che per ogni $n > N(\varepsilon)$ risulta

$$|\varphi_n'(t) - \varphi_0'(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, x],$$

e quindi:

$$|\psi_n(x) - \psi_0(x)| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall x.$$

Dalla (9) segue allora l'asserto.

La distribuzione $\mathcal{P}(1/x)$ é un altro esempio di distribuzione non regolare. Queste distribuzioni vengono dette anche *singolari* oppure *funzioni generalizzate.*

6.3 Derivata di una distribuzione

Supponiamo $f \in C^1(I\!R)$ e per ogni $\varphi \in C_c^\infty(I\!R)$ consideriamo l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \; \varphi'(x)dx.$$

Integrando per parti otteniamo (qui *supp* $\varphi \subset [a,b] \subset I\!R$) :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \varphi'(x)dx &= \int_a^b f(x)\ \varphi'(x)dx \qquad (6.11)\\ &= [f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)] - \int_a^b f'(x)\ \varphi(x)dx\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\ \varphi(x)dx.\end{aligned}$$

La (11) suggerisce un modo semplice per definire la derivata prima di una distribuzione T. Tale definizione coincide, a meno di identificazioni, con la derivata ordinaria di f se $f \in C^1(I\!R)$.

Sia $T : \mathcal{D} \to I\!R$ una distribuzione. Definiamo *derivata di* T, la distribuzione T' definita dalla:

$$T'(\varphi) = -T(\varphi'), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \qquad (6.12)$$

Si osservi che (12) é ben definita, poiché $\varphi' \in \mathcal{D}$, e che T' é effettivamente una distribuzione. Infatti se $\varphi_n \in \mathcal{D}$ e $\varphi_n \to \varphi_0$ in $\mathcal{D}$, é anche $\varphi_n' \to \varphi_0'$ in $\mathcal{D}$. La (12) permette di associare una "derivata" ad ogni funzione localmente integrabile f : tale derivata, detta *derivata distribuzionale*, sará in generale una distribuzione singolare se f non é sufficientemente regolare.

Se $k \in I\!N$, analogamente alla (12) definiamo la derivata k-esima di T ponendo:

$$T^{(k)}(\varphi) = (-1)^k T(\varphi^{(k)}), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \qquad (6.13)$$

ESEMPI

(a) Se $f \in L^1_{loc}(I\!R)$, sia T_f la distribuzione associata ad f. In tal caso:

$$T_f'(\varphi) = -\int_{I\!R} f(x)\ \varphi'(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

(b) Se $\delta_0(\varphi) = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$, la derivata della distribuzione δ_0 é data dalla

$$\delta'(\varphi) = -\varphi'(0).$$

(c) Consideriamo la *funzione di Heaviside*:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

É facile vedere che $H \in L^1_{loc}(I\!R)$ e la sua derivata distribuzionale é data dalla:

$$T'_H = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi), \tag{6.14}$$

cioé la derivata di H é la distribuzione di Dirac in 0, che é quindi singolare.

Tratteremo ora un caso piú generale di (c).
Sia $f : I\!R \to I\!R$ una funzione di classe C^1 a tratti in $I\!R$, cioé esistono n punti $c_1, \ldots, c_n$ tali che $f \in C^1]c_i, c_{i+1}[$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, ed $f \in C^1]-\infty, c_1[$, $f \in C^1]c_n, +\infty[$. Supponiamo inoltre che f' sia limitata. Allora in tal caso, posto $s_i = f(c_i + 0) - f(c_i - 0)$, si ha:

$$T'_f(\varphi) = T_{f'}(\varphi) + \sum_{i=1}^{n} s_i \delta_{c_i}(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Dimostrazione Dalla (12) abbiamo:

$$\begin{aligned} T'_f(\varphi) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \varphi'(x)dx \\ &= -\left\{\int_{-\infty}^{c_1} f(x)\ \varphi'(x)dx + \int_{c_n}^{+\infty} f(x)\ \varphi'(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\ \varphi'(x)dx\right\}. \end{aligned}$$

Tenendo ora conto del fatto che φ é a supporto compatto, applicando la formula di integrazione per parti (prolungando con continuitá la definizione di f nei punti c_i) otteniamo :

$$\begin{aligned} T'_f(\varphi) &= -f(c_1 - 0)\ \varphi(c_1) + \int_{-\infty}^{c_1} f'(x)\ \varphi(x)dx \qquad (6.15) \\ &+ f(c_n + 0)\ \varphi(c_n) + \int_{c_n}^{+\infty} f'(x)\ \varphi(x)dx \\ &- \sum_{i=1}^{n-1}\{f(c_{i+1} - 0)\ \varphi(c_{i+1}) - f(c_i + 0)\ \varphi(c_i) - \int_{c_i}^{c_{i+1}} f'(x)\ \varphi(x)dx\}. \end{aligned}$$

Figure 6.2: $f(x) = H(sinx)$

Prolungando ora in maniera arbitraria la definizione di f' nei punti $c_i, \quad i = 1, \ldots, n$, la (15) si scrive:

$$T'_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\ \varphi(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1} [f(c_i + 0) - f(c_i - 0)]\delta_{c_i}(\varphi), \qquad (6.16)$$

da cui l'asserto.

Osserviamo che la (16) decompone la derivata distribuzionale di f in una parte "regolare" e in una parte "singolare"; quest'ultima compare in corrispondenza delle discontinuitá di f.

Dal punto di vista fisico questo vuol dire che in corrispondenza ad una brusca variazione della grandezza $f(x)$ (discontinuitá), compare un impulso (funzione δ).

Il procedimento descritto sopra puó essere applicato anche nel caso in cui i punti $\{c_i\}$ siano una infinitá numerabile. Un esempio interessante é il seguente: detta H la funzione di Heaviside, poniamo:

$$f(x) = H(sinx).$$

Il grafico di f é riportato nella fig.2. In tal caso utilizzando le tecniche precedenti otteniamo:

$$T'_f(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \varphi(k\pi),$$

che é una "sampling function".

ESERCIZIO *Determinare la derivata distribuzionale della funzione periodica di periodo* 2π *la cui restrizione all'intervallo* $[-\pi, \pi]$ *é data dalla legge:*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0 \\ -\dfrac{\pi + x}{2} & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

6.4 Convergenza distribuzionale

Una successione $\{T_n\}$ di distribuzioni si dice *convergente* ad una distribuzione T, se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha:

$$T_n(\varphi) \to T(\varphi), \quad n \to +\infty.$$

Piú generalmente é possibile definire la convergenza della $\{T_n\}$ senza far intervenire direttamente la distribuzione "limite": cioé diremo che $\{T_n\}$ é convergente, se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, esiste finito il limite $lim_{n\to+\infty} T_n(\varphi)$. Infatti, posto $G(\varphi) = lim_{n\to+\infty} T_n(\varphi)$, é possibile dimostrare che G é effettivamente una distribuzione (la dimostrazione non é banale).

Studiamo ora i legami che intercorrono tra la convergenza distribuzionale e quelle standard note per le funzioni ordinarie.

Teorema 57 *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni localmente integrabili in* $I\!R$*, convergente ad una funzione* $f \in L^1_{loc}(I\!R)$*, uniformemente su ogni intervallo limitato. Allora indicate con* T_{f_n}*,* T_f*, le distribuzioni associate, si ha:*

$$T_{f_n}(\varphi) \to T_f(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Dimostrazione Sia $\varphi \in \mathcal{D}$ e sia $[a, b] \subset I\!R$ un intervallo contenente *supp* φ. Allora dato $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $n > N(\varepsilon)$ e per ogni $x \in [a, b]$, si ha:

$$|f_n(x)\ \varphi(x) - f(x)\ \varphi(x)| < \varepsilon/(b - a)$$

da cui anche per $n > N(\varepsilon)$:

$$|T_{f_n}(\varphi) - T_f(\varphi)| \leq \int_a^b |f_n(x)\ \varphi(x) - f(x)\ \varphi(x)| dx < \varepsilon,$$

cioé l'asserto.

Se la successione $\{f_n\}$ é dominata da una funzione $g \in L^1_{loc}(I\!R)$, allora la convergenza uniforme puó essere sostituita da quella quasi ovunque.

Teorema 58 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $L^1_{loc}(I\!R)$ convergente quasi ovunque ad una funzione f. Se esiste $g \in L^1_{loc}(I\!R)$ tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$, quasi ovunque $x \in I\!R$, per ogni $n \in I\!N$, allora $T_{f_n}(\varphi) \rightarrow T_f(\varphi)$, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$.*

Dimostrazione Osserviamo anzitutto che $f \in L^1_{loc}(I\!R)$, poiché dalle ipotesi segue che $|f(x)| \leq g(x)$, quasi ovunque. L'asserto segue allora applicando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue alla successione $\{f_n\, \varphi\}$, $\varphi \in \mathcal{D}$.

Se la convergenza quasi ovunque (o puntuale) non é dominata, puó accadere che T_{f_n} converga, nel senso delle distribuzioni, a distribuzioni singolari.

ESEMPIO Consideriamo la successione:

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} \quad x \in I\!R.$$

Le funzioni f_n sono localmente integrabili in $I\!R$ (anzi integrabili!) e sono tali che:

$$\int_{I\!R} f_n(x)dx = 1, \quad n \in I\!N. \tag{6.17}$$

Inoltre $f_n(x) \rightarrow 0$ quasi ovunque (in realtá $f_n(x) \rightarrow 0$, $\forall x \neq 0$). Tuttavia:

$$max_{x \in I\!R} f_n(x) = n/\pi = f_n(0)$$

e quindi per ogni $n \in I\!N$ esiste un intervallo $]-\varepsilon_n, \varepsilon_n[$ tale che :

$$f_n(x) > n/2\pi, \quad \forall x \in]-\varepsilon_n, \varepsilon_n[.$$

Dunque la successione non é dominata. Ora dalla (17), se $\varphi \in \mathcal{D}$, detto $[a, b]$ un intervallo con *supp* $\varphi \subset [a, b]$, si ha:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\ \varphi(x)dx - \varphi(0)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\ \{\varphi(x) - \varphi(0)\}dx\right| \\
\leq\ &\left|\varphi(0)\int_{-\infty}^{a} f_n(x)dx\right| + \left|\int_{a}^{b} f_n(x)\{\varphi(x) - \varphi(0)\}dx\right| \\
+\ &\left|\varphi(0)\int_{b}^{+\infty} f_n(x)dx\right| \equiv I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

É facile vedere che $I_1 + I_3 \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, (basta eseguire la sostituzione $t = nx$ e calcolare gli integrali generalizzati). Valutiamo ora I_2. Dato che $\varphi \in \mathcal{D}$, si ha $|\varphi'(x)| \leq M$, per qualche $M > 0$ e per ogni $x \in [a, b]$, e quindi per il teorema di Lagrange:

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq M|x|.$$

Si ha allora:

$$I_2 \leq M \int_a^b |x| f_n(x)dx, \tag{6.18}$$

e poiché é facile vedere che l'integrale nella (18) tende a zero, segue che $T_{f_n} \rightarrow \delta_0$. Tuttavia la distribuzione associata alla funzione $f \equiv 0$, non é δ_0, ma é l'operatore $T(\varphi) = 0$, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$.

É noto che data una successione di funzioni $\{f_n\}$ di classe C^1 convergente uniformemente ad $f \in C^1$, non é detto che $f_n' \rightarrow f'$ (ció avviene se f_n' é uniformemente convergente). Ad esempio basta porre $f_n(x) = (sin(nt))/n$. Questa anomalia viene rimossa usando la convergenza distribuzionale.

Teorema 59 *Sia* $\{T_n\}$ *una successione di distribuzioni convergente, nel senso distribuzionale, ad una distribuzione* T. *Allora anche* T_n' *converge in senso distribuzionale a* T'.

Dimostrazione Dalla (12) si ha, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$|T_n'(\varphi) - T'(\varphi)| = |T(\varphi') - T_n(\varphi')| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

Dal teorema 59 segue che anche le derivate successive sono convergenti.

ESEMPIO Se $f_n(x) = (sin(nx))/n$, allora $T_{f_n}(\varphi) \rightarrow 0$, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$. Dal teorema 59 segue che $cos(nt)$,che é la successione delle derivate delle f_n, é anch'essa convergente nel senso delle distribuzioni alla distribuzione identicamente nulla.

Il teorema 59 permette anche di dimostrare che certe successioni di funzioni $f_n \in L^1_{loc}(I\!R)$ convergenti, per esempio, puntualmente ad una funzione $f \in L^1_{loc}(I\!R)$, convergono anche nel senso delle distribuzioni.

Per esempio, supponiamo che esista un intero $k \in I\!N$ ed una successione $\{g_n\}$ uniformemente convergente ad una funzione g su ogni insieme compatto di $I\!R$, tale che $g_n^{(k)} = f_n$. Allora dato che g_n converge a g nel senso delle distribuzioni, dal teorema 5 segue che $f_n \rightarrow f$, nel senso delle distribuzioni.

Sia $\{T_n\}$ una successione di distribuzioni; allora é possibile considerare la successione:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} T_k \tag{6.19}$$

ponendo, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, $s_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} T_k(\varphi)$.
La successione $\{s_n\}$ si chiama *serie* associata alla successione di distribuzioni $\{T_n\}$ e le (19) si chiamano *somme parziali* della serie. La serie é convergente se la successione $\{s_n\}$ é convergente (nel senso delle distribuzioni), cioé se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, esiste il limite $lim_{n\rightarrow+\infty} s_n(\varphi)$. La distribuzione *somma* si suole indicare, come al solito, con $\sum_{n=1}^{+\infty} T_n$. Applicando il teorema 59 alle serie, si ottiene:

Teorema 60 *Ogni serie di distribuzioni convergente, puó essere derivata termine a termine.*

Il teorema 60 dice che se $\sum_{n=1}^{+\infty} T_n = T$, allora é anche $\sum_{n=1}^{+\infty} T'_n = T'$.

ESEMPIO Consideriamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin(nt)}{n}. \tag{6.20}$$

Tale serie é la serie di Fourier della funzione $\tilde{f}$ dell'esercizio di pag.113. La (20) ha come serie derivata la seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} cos(nt), \tag{6.21}$$

che, per $nt \neq \pi/2 + k\pi$, non é convergente (nel senso usuale).
Proviamo che la (20) é convergente nel senso delle distribuzioni. Ció non é immediato poiché essa converge soltanto puntualmente alla $\tilde{f}$. Tuttavia la (20) é la serie derivata della serie:

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cos(nt)}{n^2},$$

che é uniformemente convergente. Allora l'asserto segue dal teorema 60. Ancora, la (21) é la serie derivata della (20) e quindi risulta convergente nel senso delle distribuzioni.

Non é facile provare che la somma distribuzionale della (21) é proprio la derivata distribuzionale della $\tilde{f}$, perché occorre far vedere che $\tilde{f}$, che é limite puntuale, é anche limite distribuzionale della (20). Questo segue da un profondo risultato di Titchmarsh, che qui non riportiamo.

Bibliography

[1] T.M.Apostol *Mathematical Analysis* Addison-Wesley Publ. Co. 1974

[2] H.Brezis *Analisi Funzionale, Teoria ed Applicazioni* Liguori Ed. 1983

[3] P.L.Butzer -R.J.Nessel *Fourier Analysis and Approximation* Academic Press, 1971

[4] P.L.Butzer -R.L.Stens *Linear Prediction in Terms of Samples from the Past* Numerical Methods, 1988

[5] E.De Castro *Complementi di Analisi Matematica con Applicazioni* Zanichelli, 1978

[6] J.W.Dettman *Mathematical Methods in Physics and Engineering* McGraw-Hill, 1969

[7] F.G.Friedlander *Introduction to the theory of distributions* Cambridge Univ.Press, 1982

[8] A.H.Griffel *Applied Functional Analysis* John Wiley and Sons, 1981

[9] A.N.Kolmogorov -A.Fomin *Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale* Edizioni MIR, 1980

[10] M.L.Krasnov - A.I.Kiselev - G.I.Makarenko *Equazioni Integrali* Edizioni MIR, 1983

[11] A.Papoulis *Signal Analysis* McGraw-Hill, 1977

[12] C.Ray Wylie *Advanced Engineering Mathematics* McGraw-Hill, 1995

[13] W.Rudin *Analisi Reale e Complessa* Boringhieri, 1974

[14] G.F.Simmons *Introduction to Topology and Modern Analysis* McGraw-Hill, 1963 .